Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

Projectionslehre, Schattenconstruction

und

Perspective.

Populär dargestellt

von

Dr. C. A. Menzel,

Königl. Universitäts-Bauinspector, Professor der Baukunst an der staats- und landwirthschaftlichen Academie zu Eldena, Mitglied des älteren Künstlervereins, so wie des Vereins zur Verschönerung des Landes in Wittenberg.

Leipzig,

Romberg's Verlag.

Vorwort.

Aufgefordert durch die geehrte Verlagshandlung unternahm der Unterzeichnete die Bearbeitung des vorliegenden Werkes, welches hauptsächlich zum Selbstunterricht der Gewerksmeister und Gesellen, so wie für Maler und für Gewerbe- und Gewerksschulen bestimmt ist. Mathematische Beweise sind überall absichtlich nicht gegeben, und wo dergleichen Herleitungen unerläßlich waren, sind nur die allerersten Sätze der Mathematik angezogen worden, welche in jeder Elementarschule gelehrt werden.

Was die Projectionslehre betrifft, so ist sie unstreitig das Fundament aller meßbaren Bauzeichnungen, und wenn der Lernende dieselbe nicht ganz begriffen hat, so kann er auch die Schattenlehre und Perspective nicht erlernen, eben so wenig aber kann derselbe ohne sie auch nur den geringsten Gegenstand meßbar darstellen; sie ist also für jeden Gewerbtreibenden unerläßlich.

Die Schattenconstructionslehre kommt zwar bei der jetzigen Art, das Meiste nur in Umrissen darzustellen, nicht mehr in dem Umfange vor, als früher, wo alle Bau- und Maschinenzeichnungen sorgfältig ausgetuscht wurden; allein da eine getuschte Zeichnung mit Angabe der Schatten in sehr vielen Fällen ungleich deutlicher ist, als eine nur in Umrissen dargestellte, so ist es nothwendig, auch die Schattenconstruction zu erlernen, was um so leichter ist, wenn man sich die Projectionslehre erst zu eigen gemacht hat. Für Maler ist dieselbe unentbehrlich.

Die Linearperspective anlangend, so ist dieselbe bekanntlich das Mittel, alle Gegenstände so auf einer ebenen Fläche darzustellen, wie sie in der Natur erscheinen. Diese Darstellungsweise giebt daher das getreueste malerische Abbild der Gegenstände und ist demnach ein vortreffliches Mittel der größeren Verdeutlichung für die sehr vielen Fälle, wo die Darstellung durch geometrische Projectionen nicht mehr ausreicht.

Es ist außer der Linearperspective noch die sogenannte isoperimetrische Perspective gelehrt worden, weil diese namentlich für den Gewerbtreibenden von dem größten Nutzen ist, indem die durch sie dargestellten Gegenstände mittelst des verjüngten Maßstabes so meßbar bleiben, daß man darnach arbeiten kann, was bei der Linearperspective weniger der Fall ist.

Es geht aus dem Vorstehenden hervor, daß wenn der Lernende sich die im vorliegenden Werke gegebenen Lehren zu eigen gemacht, derselbe auch im Stande sein wird, jegliche Art einer gezeichneten Darstellung zu liefern.

Der Verfasser.

Erste Abtheilung.

Projectionslehre.

Erklärung 1. Unter Projectionslehre versteht man diejenige Lehre, welche darthut, wie man in dem freien Raume befindliche Punkte (Linien, Flächen, Körper) auf einer gegebenen Fläche so aufzeichnen kann, daß sie meßbar sind.

Erklärung 2. Die Projection eines einzelnen Punktes entsteht, wenn man von einem im Raume beliebig gegebenen Punkte eine rechtwinklige Linie nach einer gegebenen Fläche zieht und den Durchschnittspunkt der Linie mit der Fläche bemerkt. Dieser Durchschnittspunkt ist die gesuchte Projection des im Raume gegebenen Punktes. Es ist hiernach die Projection eines Punktes das **Bild** desselben, welches entsteht, wenn man von diesem Punkte eine rechtwinklige Linie auf eine gegebene Fläche zieht und den Durchschnittspunkt bemerkt, welcher letztere das **Bild** oder die **Projection** des gegebenen Punktes genannt wird.

Erklärung 3. Jede rechtwinklige Linie auf einer wagerechten (horizontalen — mit dem stillstehenden Wasser gleichlaufenden) ebenen Fläche, heißt bekanntlich eine perpendiculare Linie oder lothrecht.

Jede rechtwinklige Linie auf einer nicht wagerechten Ebene heißt eine normale. Es ist demnach zwar jede lothrechte Linie eine normale, aber nicht jede normale eine lothrechte. Wenn im Verfolge also von einer normalen Linie die Rede ist, so wird überhaupt eine Linie darunter verstanden, welche auf eine gegebene Ebene oder Fläche rechtwinklig gezogen ist, oder gezogen gedacht wird.

§. 1.

Aufgabe. Es soll die Projection eines gegebenen Punktes gefunden werden.

Auflösung. Man denke sich Tafel **1** Fig. **1** über der gegebenen wagerechten Ebene **a b c d** einen Punkt. Ferner denke man sich von diesem Punkte eine normale Linie nach der Ebene gezogen, welche Linie die Ebene in **A** schneidet; bemerkt man den Durchschnittspunkt bei **A** mit einem Punkte, so ist dieser die Projection des oberhalb liegend gedachten Punktes.

Anmerkung 1. Da die gegebene Ebene hier wagerecht angenommen ist, so wird die von dem gegebenen Punkte nach **A** gezogen gedachte normale Linie in dem vorliegenden Falle zugleich eine lothrechte sein.

Anmerkung 2. Wäre die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** nicht wagerecht, sondern senkrecht gestellt gedacht und man sollte die Projection eines davor liegenden Punktes finden, so denkt man sich von diesem Punkte wieder eine normale Linie nach der Ebene zu, und es wird der Durchschnittspunkt in **A** die Projection des vor der Ebene befindlichen Punktes sein.

In diesem Falle wird die normale Linie keine lothrechte, sondern eine wagerechte sein.

Anmerkung 3. Denkt man sich die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** schräg aufgestellt und über oder vor derselben einen Punkt, dessen Projection man finden will, so denke man sich wieder von diesem gegebenen Punkte eine rechtwinklige (normale) Linie nach der Ebene gezogen; auch hier wird in dem Durchschnittspunkte bei **A** die Projection des außerhalb der Ebene gegebenen Punktes erscheinen.

In diesem Falle wird die von dem gegebenen Punkte außerhalb nach der Ebene **a b c d** gezogen gedachte Linie (die Normale) weder lothrecht noch wagerecht sein, sie wird gegen eine wagerecht oder lothrecht gedachte Ebene schräg stehen, obgleich sie rechtwinklig auf der schiefgedachten Ebene **a b c d** steht.

Anmerkung 4. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß das Bild (die Projection) eines **Punktes** immer wieder ein **Punkt** werden wird, da die von einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Ebene gezogene Linie diese Ebene nur immer in einem einzigen Punkte schneiden kann.

§. 2.

Aufgabe. Es soll die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei Tafel **1** Fig. **2** eine wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, über dieser Ebene und mit ihr gleichlaufend (parallel) befinde sich eine gerade Linie **A B**, so findet man die Projection dieser Linie, wenn man von allen Punkten derselben normale Linien nach der Ebene **a b c d** gezogen denkt (siehe §. 1) und diese Punkte bemerkt. Zieht man alsdann durch diese gefundenen Punkte die gerade Linie **A B**, so ist diese die Projection der über der Ebene gedachten geraden Linie. Man hat nämlich dadurch, daß man die einzelnen Punkte der außerhalb der Ebene liegenden Punkte in ihrer Projection gesucht und gefunden hat, auch dadurch die Projection der ganzen Linie gefunden.

Anmerkung 1. Da die einzeln aufgesuchten Projectionspunkte der außerhalb der gegebenen Ebene a b c d liegenden geraden Linie in der Ebene wieder eine gerade Linie A B bilden, so hätte man nur nöthig gehabt, die Projectionen der beiden Endpunkte zu suchen und diese durch eine gerade Linie A B zu verbinden, welches Verfahren die Projection viel kürzer dargestellt hätte, als wenn man sich die gegebene Linie aus vielen einzelnen Punkten bestehend denkt und diese vielen Punkte einzeln sucht, um die Linie zu finden. Deshalb braucht man nur die Projectionen der Endpunkte einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche zu suchen und die gefundenen Projectionen dieser Endpunkte durch eine gerade Linie zu verbinden, wenn man die Projection der ganzen Linie zeichnen will.

Anmerkung 2. Da die außerhalb der Ebene gegebene Linie mit der Ebene a b c d gleichlaufend ist, so wird die Projection dieser Linie, nämlich die Linie A B, genau eben so groß sein, als die außerhalb gegebene Linie selbst ist; denn denkt man sich diese außerhalb der Ebene befindliche Linie so, daß sie sich, in immer gleicher Lage, der Ebene so lange nähert, bis sie in dieselbe zu liegen kommt, so wird ihre Projection genau so groß sein als die Linie selbst ist.

Anmerkung 3. Aus 2 folgt, daß die Projection einer geraden Linie, welche **gleichlaufend** (parallel) mit einer gegebenen Ebene liegt, **genau so groß ist,** als die Linie selbst.

Anmerkung 4. Wenn die gegebene Ebene Fig. 2 a b c d nicht wagerecht, sondern senkrecht stehend gedacht wird, und die gegebene Linie, deren Projection man finden soll, ebenfalls wagerecht und gleichlaufend (parallel) vor derselben liegt, so findet man ihre Projection wieder wie vorhin (Anmerk. 1), wenn man von den Endpunkten der Linie Normalen nach der Ebene gezogen denkt und die Durchschnittspunkte mit der Ebene bei A B durch eine gerade Linie verbindet, wo alsdann eben diese Linie A B die Projection der gegebenen ist.

Anmerkung 5. Denkt man sich Tafel 1 Fig. 3 eine wagerechte Ebene a b c d, so können gerade Linien gegen dieselbe entweder gleichlaufend oder schräg geneigt, oder lothrecht sein.

Liegt die Linie A B gleichlaufend mit der Ebene, so wird die Projection derselben bei A′ B′ in der Ebene eine gerade Linie bilden, welche eben so groß ist, als die gegebene Linie A B war. Liegt die Linie C D schräg geneigt gegen die Ebene a b c d, so findet man ihre Projection, wenn man die Normalen C C′ und D D′ gezogen denkt und die Punkte C′ D′ durch eine gerade Linie verbindet.

Es wird in diesem Falle die Projection C′ D′ kleiner werden als die Linie C D selbst war.

Die Projection C′ D′ wird auch immer kleiner werden, je mehr der Winkel, welchen die Linie C D mit der Ebene a b c d bildet, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht eine Linie Fig. 3 E F senkrecht über der wagerechten Ebene a b c d, so wird ihre Projection bei E′ F′ nur ein Punkt sein. Denn wenn man von allen Punkten der Linie E F normale Linien nach der Ebene a b c d zieht, so werden diese Normalen alle in eine einzige lothrechte Linie zusammenfallen und diese wird die Ebene a b c d nur in einem Punkte zwischen E′ F′ schneiden, welcher Punkt, alsdann die Projection der gegebenen Linie E F sein wird.

Anmerkung 6. Aus der Anmerkung 5 folgt, daß die Projection einer geraden Linie auf einer wagerechten Fläche die folgenden Gestalten je nach der Lage der Linien annehmen kann.

Liegt die gegebene Linie gleichlaufend mit der gegebenen Ebene, so wird ihre Projection A′ B′ eben so groß wie die gegebene Linie.

Liegt die gegebene Linie schräg gegen die gegebene Ebene, so wird ihre Projection C′ D′ kleiner wie die gegebene Linie, und zwar um so kleiner, je mehr der Winkel, welchen die gegebene Linie gegen die Ebene macht, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht die gegebene Linie senkrecht über der gegebenen Ebene, so ist ihre Projection wie hier zwischen E′ F′ ein Punkt.

Anmerkung 7. Denkt man sich die Ebene a b c d (Tafel 1, Fig. 3) nicht wagerecht, sondern senkrecht und die Lagen der Linien A B — C D — E F — in ähnlicher Weise davor (oder dahinter), so werden die Projectionen dieser Linien ganz gleich mit den Projectionen erscheinen, wie wir sie bei der wagerechten Ebene gesehen haben.

Anmerkung 8. Aus den vorhergehenden Anmerkungen folgt: daß die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche, entweder mit der gegebenen Linie **gleich groß** oder **kleiner** oder ein **einzelner Punkt** werden kann, je nach der Lage der gegebenen Linie gegen die gegebene Ebene.

§. 3.

Aufgabe. Es soll die Projection einer krummen Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Tafel 1 Fig. 4) die wagerechte Ebene a b c d gegeben; über dieser befinde sich die beliebig gekrümmte Linie A B . . F.

Man findet ihre Projection, wenn man in der gegebenen Linie die beliebigen Punkte B C D E annimmt, von diesen Punkte aus die Normalen A A′, B B′ . . . . F F′ zieht und die in der wagerechten Ebene gefundenen Durchschnittspunkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ mit einander durch eine krumme Linie verbindet, welche alsdann die gesuchte Projection der über der Ebene a b c d befindlichen krummen Linie A B C D sein wird.

Anmerkung 1. Befände sich eine krumme Linie (Tafel 1 Fig. 5) vor einer senkrechten Ebene a b c d und man sollte die Projection dieser Linie auf der Ebene zeichnen, so verfährt man ganz wie bei der wagerechten Ebene. Man nimmt beliebige Punkte B C D … in der krummen Linie an, zieht von diesen aus normale Linien nach der senkrechten Ebene, bemerkt die Durchschnittpunkte A′ B′ C′ D′ E′, verbindet diese Durchschnittspunkte durch eine Linie, so ist diese die Projection der außerhalb der senkrechten Ebene befindlichen Linie A B C D E.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß die gegebene Linie jede beliebige Krümmung haben kann. Man theilt sie immer wieder durch willkürlich gewählte Punkte in beliebig große Stücken und sucht alsdann die Projectionen dieser einzelnen Punkte und Stücken wie eben gelehrt wurde.

§. 4.

Aufgabe. Es soll die Projection einer gegebenen Fläche auf einer ebenfalls gegebenen wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 6) die wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, über ihr befinde sich das Dreieck **A B C**. Die Projection desselben findet man, wenn man von den Endpunkten **A B C** des Dreiecks normale Linien **A A′**, **B B′**, **C C′** nach der Ebene zieht, und wo diese die Ebene schneiden die Durchschnittspunkte **A′ B′ C′** durch gerade Linien verbindet, wo alsdann das Dreieck **A′ B′ C′** entstehen wird, welches die Projection des gegebenen Dreiecks außerhalb der wagerechten Ebene sein wird.

Anmerkung 1. Liegt das gegebene Dreieck mit der gegebenen Ebene gleichlaufend (parallel), so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß sein, als das Dreieck selbst war.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 7.) Es liege das gegebene Dreieck **A B C** mit der gegebenen wagerechten Ebene nicht parallel, sondern schief gegen diese Ebene, so wird das Projectionsdreieck **A′ B′ C′** kleiner erscheinen als das gegebene, und zwar um so kleiner, je mehr die Neigung des außerhalb der Ebene gegebenen Dreiecks sich einem rechten Winkel nähert, wie aus Tafel 1 Fig. 8 zu sehen, wo das Projectionsdreieck **A′ B′ C′** viel kleiner erscheint als in Fig. 7.

Anmerkung 3. Stünde das gegebene Dreieck **A B C** lothrecht (Taf. 1 Fig. 9) über der wagerechten Ebene **a b c d** und man zieht die Projectionslinien **A A′**, **B B′**, **C C′**, so wird die Linie **A B** und auch die Linie **B C** in eine gerade Linie **A′ B′ C′** fallen und die Projection des ganzen Dreiecks nur aus einer einzigen geraden Linie **A′ B′ C′** bestehen, welche in dem vorliegenden Falle eben so groß wie die Grundlinie des gegebenen Dreiecks **A B C** sein wird.

Anmerkung 4. Befände sich das gegebene Dreieck nicht über einer wagerechten Ebene, sondern vor einer senkrechten, wie Taf. 1 Fig. 10 das Dreieck **A B C** vor der senkrechten Ebene **a b c d**, so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß wie das gegebene Dreieck selbst sein, wenn das gegebene Dreieck **A B C** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene **a b c d** ist.

Stände das gegebene Dreieck schräg gegen die senkrechte Ebene geneigt, so würde die Projection desselben kleiner werden als das gegebene Dreieck, wie wir es eben (Anmerk. 2 §. 4) bei der wagerechten Ebene gezeigt haben.

Stände das gegebene Dreieck normal gegen die senkrechte Ebene, so würde seine Projection eine gerade Linie werden, wie es (§. 4 Anmerk. 3) auch bei der wagerechten Ebene der Fall war.

Anmerkung 5. Es ergiebt sich aus dem Vorangegangenen Folgendes:

1) Die Projection eines Dreiecks auf einer ebenen Fläche kann **eben so groß** sein als das gegebene Dreieck, oder **kleiner**, oder auch **nur eine Linie**.

2) Was für die Figur eines **Dreiecks** gilt, muß auch für alle **möglichen Figuren** gelten, die eine ebene Fläche bilden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Körpers auf einer wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es stehe (Tafel 1 Figur 11) der Cubus **A B C D E F G H** über der wagerechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß die Grundfläche des Cubus, **E F G H**, gleichlaufend (parallel) mit der wagerechten Ebene **a b c d** liege, so werden die Seitenkanten des Cubus lothrecht auf der Ebene stehen und ihre Projectionen werden (§. 2 Anmerk. 5) die Punkte zwischen **A′ F′**, **B′ G′**, **C′ H**, **D′ E′** sein. Eben so wird die Projection der Oberfläche des Cubus **A B C D** mit der Projection der Unterfläche **E F G H** zusammenfallen und die Projection des ganzen Cubus in der Ebene **a b c d** wird das Quadrat **A′ F′**, **B G′**, **C H′**, **D′ E′** sein.

Anmerkung 1. Befände sich derselbe Cubus (Taf. 1 Fig. 12) vor der senkrechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß seine eine Fläche **B C H E** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene liegt, so wird die Projection des ganzen Körpers in das Quadrat **B′ C′ E′ H′** auf der Ebene **a b c d** fallen. Denn da die eine Fläche **B C E H** gleichlaufend mit der Ebene **a b c d** steht, so stehen die Kanten des Körpers, **A B**, **D C**, **G H**, **F E**, normal auf der senkrechten Ebene, und ihre Projectionen fallen in die vier Punkte **B′ C′ E′ H′**. Da ferner die Ebene des Körpers **A D F G** mit der Ebene desselben Körpers **B C E H** zusammenfällt, so wird die Projection des ganzen Cubus hier durch das Quadrat **B′ C′ E′ H′** in der Ebene **a b c d** dargestellt sein.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 13.) Stände der Cubus schief gegen die gegebene wagerechte Ebene **a b c d**, so würde seine Projection wieder eine Figur bilden, welche entsteht, wenn man von den Kanten des Cubus normale Linien auf die wagerechte Ebene zieht und die Durchschnittspunkte **G′ H′ E′ F′** durch gerade Linien verbindet.

Dasselbe würde der Fall sein, wenn der Cubus schräg vor einer senkrechten Ebene läge, wie leicht zu übersehen.

Anmerkung 3. Es folgt aus dem Gesagten: daß die Projection eines Körpers auf einer ebenen Fläche ebenfalls eine **Fläche** bildet.

§. 6.

Folgerung aus den bisherigen Paragraphen.

1) Die Projection eines Punktes ist immer wieder ein Punkt. (§. 1.)

2) Die Projection einer geraden Linie ist
   a) entweder eine gerade Linie, welche eben so groß ist, als die gegebene (§. 2 Anmerk. 3),
   b) oder sie ist kleiner als die gegebene Linie (§. 2 Anm. 5),
   c) oder die gegebene Linie erscheint in ihrer Projection als ein Punkt (§. 2 Anmerk. 4).

3) Die Projection einer Fläche ist
   a) entweder eine Fläche, eben so groß wie die gegebene (§. 4 Anmerk. 1),
   b) oder kleiner als die gegebene Fläche (§. 4 Anmerk. 2),
   c) oder eine bloße Linie (§. 4 Anmerk. 3).

4) Die Projection eines Körpers ist immer eine Fläche. (§. 5.)

§. 7.

Erklärung. Der Maßstab. Um die Projectionen von Linien, Flächen und Körpern auftragen zu können, bedient man sich eines Maßstabes, des gewöhnlichen Duodecimal-Fußstockes, wo ein Fuß in zwölf Zoll getheilt ist.

Des Maßstabes in natürlicher Größe bedient man sich auf den Bauplätzen selbst, und zwar der Zimmermann, indem er aus runden Hölzern vierkantig beschlagene von den verschiedensten Abmessungen bildet, oder indem er die Walmschmiegen eines Sparrens, oder die gekrümmten Wangen 2c. einer gewundenen Treppe aufsucht; der Maurer, um die Maßlatten der Gebäude zu schneiden und zu bezeichnen, um die Gurt- und Gradbögen der Gewölbe 2c. zu bestimmen 2c.

Alle diese Geschäfte sind nichts weiter als das Aufsuchen von Projectionen, und wenn der Gewerksmann auch gewohnt ist, die gewöhnlich vorkommenden Fälle so zu sagen auswendig zu lernen, ohne sich der darauf bezüglichen Lehren bewußt zu sein, so wird man doch in nur wenig veränderten oder gar in seltenen Fällen niemals im Stande sein, sich zu helfen, wenn man keine Projectionslehre versteht. Daher kommt es, daß auf den Zimmerplätzen gewöhnlich nur Einer ist, der schiftet, Treppen aufreißt 2c. und daß die Mehrzahl auch das nicht kann.

Will man Projectionen auf dem Papiere auftragen, so bedient man sich eines sogenannten verjüngten Maßstabes, welcher entweder von einem bestimmten Fußtheile entnommen ist (wo z. B. ein halber Zoll gleich einem Fuß 2c. gesetzt wird), oder man macht sich einen willkürlichen Maßstab von Fußen und Zollen und mißt damit.

Bei den gewöhnlichen Bauzeichnungen nimmt man **10** Fuß auf einen Duodecimalzoll, da bei diesem Maße die einzelnen Theile eines Baurisses noch ziemlich deutlich gezeichnet werden. Kleiner darf man den Maßstab bei Bauzeichnungen nicht nehmen, da sonst die Gegenstände undeutlich und zu klein sich darstellen, um mit dem Zirkel meßbar zu sein.

Denkt man sich die Projection eines Körpers auf einer wagerechten (horizontalen) Ebene, so heißt diese Projection der Grundriß des Körpers.

Denkt man sich die Projection eines Körpers auf einer senkrechten (perpendiculären) Ebene, so heißt diese Projection der Aufriß des Körpers.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene durch einen Körper gelegt und die sämmtlichen durchschnittenen Theile des Körpers auf die senkrechte Ebene in Projection gebracht, so entsteht der Durchschnitt (das Profil) eines Körpers.

Hiernach wäre z. B. der Grundriß eines Cubus ein Quadrat, wenn der Cubus parallel mit der wagerechten Ebene steht. Hiernach wird der Aufriß eines Cubus ebenfalls ein Quadrat, wenn der Cubus parallel mit der senkrechten Ebene steht. Hiernach wird auch der Durchschnitt eines Cubus ein Quadrat, wenn die Durchschnittsebene senkrecht durch den Cubus liegt.

Bei allen Bauzeichnungen nimmt man an, daß die Gebäude oder deren einzelne Theile, welche man eben zeichnen will, gleichlaufend (parallel) mit der wagerechten und der senkrechten Ebene liegen, weil es unnöthiger Weise sehr unbequem für die Meßbarkeit sein würde, wenn man die Projectionsebene geneigt (schräg) gegen die Gebäude annehmen wollte.

Denkt man sich nun ein ganzes Haus aufrecht stehend, und denkt man sich eine wagerechte Ebene durch das Haus gelegt und die Projectionen sämmtlicher durchschnittenen Theile auf der wagerechten Ebene gezeichnet, so erhält man den Grundriß des Hauses.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene vor das Haus gestellt und von allen Punkten des Gebäudes normale Projectionslinien nach der senkrechten Ebene gezogen und die Durchschnittspunkte

dieser Linien durch Linien verbunden, so entsteht der Aufriß des Hauses.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene auf irgend einem Punkte durch das Haus gestellt, und auf dieser Ebene die sämmtlichen Projectionen der von der Ebene durchschnittenen Theile gezeichnet, so entsteht der Durchschnitt des Hauses.

Grundriß, Aufriß und Durchschnitt der Gebäude werden immer nach verjüngtem Maßstabe aufgezeichnet.

Einzelne Theile der Gebäude dagegen (sogenannte Details) werden häufig (wie z. B. bei den Chablonen der Maurer und Zimmerleute) nach der natürlichen Größe des Fußmaßes aufgetragen.

Man sieht, daß nach dem Vorigen der Plan einer ganzen Gegend oder eines ganzen Landes (Landcharte) nichts weiter ist, als die Projection der Gegend oder des Landes auf einer wagerechten Ebene nach verjüngtem Maßstabe.

Nachdem nunmehr die Projectionslehre in ihren allgemeinen Grundbegriffen dargestellt worden ist, soll in vielfachen Beispielen deren Anwendung gezeigt werden, auch sollen die Beispiele so gewählt werden, daß sie immer, so viel wie möglich, auf in der Ausübung (Praxis) vorkommende Fälle Anwendung finden, was namentlich von den zuletzt folgenden gilt. Es dürfen aber deshalb die hier zuerst aufgezeichneten nicht übergangen oder vernachlässigt werden, da ohne das Verstehen derselben auch die schwierigeren Aufgaben nicht gelöst werden können.

Es ist noch ganz besonders darauf aufmerksam zu machen, daß der Leser, welcher Projectionen zeichnen lernen will, die hier gegebenen Beispiele selbst auf dem Papiere zu lösen versuchen muß, denn wenn derselbe nicht mit den Uebungen im Buche gleichen Schritt auf seinem Reißbrette hält, so wird er durch das bloße Anschauen und selbst durch das Verstehen der gestochenen Figuren doch keine Projectionen zeichnen lernen, da jede Wissenschaft nur durch fortschreitende Uebung und durch Wiederholung erlernt wird und gleichsam eine **Gewohnheit** werden muß, ehe wir sie ganz und ohne Mühe für das practische Leben gebrauchen können.

Es ist diese Wahrheit zwar etwas demüthigend für den menschlichen Geist, aber es ist nun einmal nicht anders, wie wohl Jeder an sich selbst wird erfahren haben.

§. 8.

Aufgabe. Es soll die Projection einer senkrechten geraden Linie im Aufriß und Grundriß auf dem Papiere gezeichnet werden.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 14.) Denkt man sich die vordere Kante einer wagerechten Ebene, so stellt diese Kante eine gerade Linie dar, die ebenfalls wagerecht ist, wie die Linie **a b** (Fig. 14). Diese Linie ist zugleich die Projection der ganzen wagerechten Ebene auf einer dahinter liegenden senkrechten Ebene (§. 2. Auflös.). Wir können demnach die Linie **a b** als Aufriß der wagerechten Ebene in der senkrechten Ebene betrachten, und zugleich können wir die Linie **a b** als die Grundlinie der darüber befindlichen senkrechten Ebene bezeichnen.

Eben so können wir den ganzen Raum unter der Linie **a b** als die Projection der wagerechten Ebene selbst betrachten.

Nach §. 2 Anmerk. 4. ist die Projection einer senkrechten geraden Linie, welche mit der senkrechten Ebene parallel ist, ebenfalls eine senkrechte Linie von gleicher Größe, wie die gegebene.

Es wird demnach die Linie A B die Projection der gegebenen Linie im Aufriß sein, wenn sie auf der wagerechten Ebene stehend angenommen worden ist.

Soll die Linie A B außerdem ein bestimmtes Längenmaß enthalten, so braucht man sie nur nach einem zu bestimmenden verjüngten Maßstabe so lang zu machen, als sie werden soll; z. B. sie soll 10 Fuß lang sein, so zeichne man sich erst einen beliebigen verjüngten Maßstab, nehme davon 10 Fuß in den Zirkel und setze diese 10 Fuß von A nach B, so ist die Linie A B 10 Fuß lang. Da wir den Raum unter der Linie a b als die Projection der wagerechten Ebene betrachten können, so würde der Grundriß der senkrechten Linie A B sich in dem Punkte A' als Punkt darstellen (§. 2 Anmerk. 5), denn die Projectionen sämmtlicher in der Linie A B angenommenen Punkte auf die wagerechte Ebene fallen alle in einen einzigen Punkt A' zusammen.

§. 9.

Aufgabe. Es soll die Projection einer auf der wagerechten Ebene unter einem bestimmten Winkel schräg stehenden Linie im Aufriß und Grundriß gezeichnet werden.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 15) die Linie a b wieder die Grundlinie der senkrechten Ebene (§. 8) und der Raum unter ihr stelle die wagerechte Ebene vor.

Die Projection einer schrägen Linie von bestimmter Länge in der senkrechten Ebene wird man erhalten, wenn man die Linie A B unter dem gegebenen Neigungswinkel aufträgt, wo dann die Linie A B eben so lang als die gegebene erscheinen wird, wenn sie parallel mit der senkrechten Ebene liegt. Es wird also die Linie A B die gesuchte Projection sein (§. 2 Anmerk. 5).

Will man dieselbe Linie im Grundriß finden, so punktire man die Normalen A A', B B', bestimme den Anfangspunkt A' der Grundrißlinie und ziehe A' B', so ist diese Linie der gesuchte Grundriß der Linie A B.

§. 10.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 16) der Aufriß und Grundriß einer Linie gefunden werden, welche mit der wagerechten Ebene einen bestimmten Winkel macht und auch in der wagerechten Ebene selbst unter einem bestimmten Winkel liegt.

Auflösung. Zuvörderst zeichne man sich auf die Grundlinie a b die punktirte Linie A B nach ihrer gegebenen Maßlänge und unter dem gegebenen Neigungswinkel. Zieht man ferner die punktirte Linie B C, so zeigt die Linie A C diejenige Länge an, welche die Linie A B in der Projection als Grundriß haben muß. Nun trage man die Linie A C mit dem Zirkel unter der Linie a b (also auf der wagerechten Ebene) von A' nach B', und zwar unter dem gegebenen Winkel (hier 45 Grad) auf, so ist die Linie A' B' die gesuchte Projectionslinie des Grundrisses. Will man nun die gegebene Linie im Aufriß finden, so verfahre man folgendermaßen.

Zuvörderst punktire man mit der Grundlinie gleichlaufend die Linie B B'', beliebig lang, so wird der Höhenraum zwischen den Linien a b und B B'' anzeigen, wie hoch überhaupt die zu suchende Linie reichen könne.

Zieht man nun von A' aus die punktirte Linie A A'', so ist A'' der Grundpunkt der zu suchenden Linie; zieht man ferner die punktirte Linie B' B'', so ist B'' der höchste Endpunkt, welchen die gegebene Linie erreichen kann.

Verbindet man nunmehr die Punkte A'' B'' durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Projectionslinie des Aufrisses.

Anmerkung. Die wirklichen Maßlängen des Grundrisses und Aufrisses würde man bei diesem Beispiele nicht aus den Linien A' B' und A'' B'' finden, sondern für A' B' würde die Linie A B, und eben so für A'' B'' die Linie A B die wirkliche Maßlänge zeigen, da A' B' und A'' B'' kleiner sind als A B (§. 2 Anmerk. 5).

§. 11.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 17) der Aufriß und Grundriß einer krummen Linie gezeichnet werden, wenn die Linie in einer Ebene liegt, welche mit der senkrechten Ebene gleichlaufend (parallel) ist.

Auflösung. Es sei die Linie a b die Grundlinie der senkrechten Ebene und unter ihr befinde sich die Projection der wagerechten Ebene.

Denkt man sich einen Halbkreis in einer Ebene parallel mit der senkrechten Ebene, so wird seine Projection im Aufriß ein eben so großer Halbkreis sein (§. 3 Anmerk. 1).

Man hat demnach nur mit dem Radius C A' den Halbkreis A' D' B' zu ziehen, so ist dieser die gesuchte Projection des Aufrisses.

Will man nun den Halbkreis im Grundrisse zeichnen, so muß man bedenken, daß, wenn man von beliebig vielen Punkten des Halbkreises Projectionslinien nach der Grundlinie a b (welche zugleich die Projection der wagerechten Ebene ist) zieht, eine gerade Linie entstehen wird.

Der Grundriß der senkrecht stehenden Halbkreislinie wird also eine gerade Linie sein, welche so lang ist, wie der Durchmesser des Halbkreises. Bestimmt man nun in der wagerechten Ebene den Punkt A, wo die Linie A B anfangen soll, und zieht A B so lang als A' B', so ist diese Linie der gesuchte Grundriß des Halbkreises.

Man kann sich noch mehr davon überzeugen, wenn man (wie die punktirten Linien zeigen) mehrere Punkte im Halbkreise annimmt und ihre Projectionspunkte einzeln nach einander sucht.

So würden z. B. der Scheitelpunkt D' des Halbkreises und sein Mittelpunkt C' im Grundrisse in den Punkt C zusammenfallen.

Anmerkung. Es ist leicht zu übersehen, daß die krumme Linie, welche hier als halbkreisförmig angenommen worden ist, auch jede beliebige andere Gestalt haben kann, z. B. als flaches Bogenstück, als Ellipse, als Spitzbogen 2c. Das Aufsuchen aller dieser Formen würde immer in ganz ähnlicher Weise geschehen.

§. 12.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 18) der Aufriß und Grundriß einer krummen Linie gefunden werden, welche schräg mit ihrer Grundlinie steht.

Auflösung. Es sei die gegebene krumme Linie wieder ein Halbkreis, so zeichne man sich denselben erst punktirt wie A E D F B nach dem verjüngten Maßstabe auf. Seine Projection auf der Grundlinie zwischen A B wird eben so groß sein als der Durchmesser des Halbkreises.

Diesen Durchmesser (oder die Länge der Projection des Grundrisses vom Halbkreise) trage man mittelst des Zirkels von A′ nach B′ unter demjenigen Winkel auf (hier 45 Grad), welcher gegeben ist. Nun ist die Linie A′B′ die Projection des Grundrisses und C′ der Mittelpunkt des Halbkreises, aber auch zugleich die Projection des Radius C D in dem punktirten Halbkreise.

Will man nun den Aufriß finden, so zieht man erst mit der Grundlinie a b parallel die willkürlich lange punktirte Linie D D″ G. Eben so verlängert man den Durchmesser A B des Halbkreises punktirt willkürlich lang. Der Raum zwischen diesen beiden punktirten Linien zeigt nun die Höhe an, welche der Aufriß des zu suchenden Halbkreises einnehmen muß.

Nun ziehe man vom Grundriß aufwärts die senkrechten punktirten Linien A′ A″, C′ C″ D″, B′ B″ und ziehe durch die Punkte A″, D″, B″ eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte Aufriß des Halbkreises.

Will man den Aufriß genauer bestimmen, so nehme man in dem punktirten Halbkreise noch die Punkte E und F an, suche ihre Projection auf der Grundlinie a b in E und F, trage diese Punkte mit dem Zirkel in E′ und F′ auf die Projectionslinie des Grundrisses A′ B′ und ziehe dann die beliebig langen punktirten Linien E′ E″ und F′ F″. Wenn dies geschehen, nehme man mit dem Zirkel in dem punktirten Halbkreise, vom Durchmesser aufwärts, die Linie E E und trage sie im Aufrisse, wo die Linie E′ E″ den Durchmesser A″ B″ schneidet, nach E″, eben so verfahre man bei F, ziehe dann aus freier Hand die Linie A″ E″ D″ F″ B″, so ist diese der gesuchte Aufriß des Halbkreises.

Anmerkung 1. Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise jede beliebig gekrümmte Linie, welche schräg gegen die senkrechte Ebene mit ihrer Grundlinie steht, finden könne.

Anmerkung 2. Je mehr Punkte man in der krummen Linie, wie E D F, annimmt und ihre Projection bestimmt, um so richtiger wird natürlich auch die aus freier Hand gezeichnete Linie A″ E″ D″ F″ B″ werden.

Am besten thut man, den Durchmesser in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, von diesen Theilungspunkten zieht man alsdann lothrechte Linien bis zum Umkreise, wie hier E D F, und sucht für diese Umkreispunkte die Projectionen des Aufrisses.

Anmerkung 3. Hätte eine krumme Linie (Taf. 1 Fig. 19) A′ B′ im Aufriß eine ganz unregelmäßige Gestalt, so würde ihr Grundriß ebenfalls eine gerade Linie sein, welche man findet, indem man beliebig viele Punkte C D E in der krummen Linie annimmt und ihre Projectionen im Grundrisse sucht, welche Grundrißlinie dann eine gerade Linie A C D E sein wird, wenn die krumme Linie in einer senkrechten Ebene liegt, die mit der gegebenen Aufrißebene parallel ist.

§. 13.

Aufgabe. Die Projection der Fläche eines Quadrats zu zeichnen, welches mit der senkrechten Ebene parallel und mit seiner Grundlinie in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 20) die Linie a b die Grundlinie der senkrechten Ebene, der Raum unterhalb a b sei die Projection der wagerechten Ebene.

Bestimmt man in a b die Länge der Linie A′ B′ als die

Grundlinie des Quadrats, so wird die Linie C′ A senkrecht auf A′ B′ und gleich lang mit A′ B′ die eine Seite des Quadrats sein.

Eben so wird die Linie D′ B′, eben so lang wie A′ C′ gezeichnet, die andere Seite des Quadrats sein, und wenn man die Punkte C′ und D′ durch die gerade Linie C′ D′ verbindet, so wird das Quadrat A′ C′ D′ B′ die gesuchte Projection sein; denn da das gegebene Quadrat parallel mit der senkrechten Ebene angenommen war, so werden auch alle Umrißlinien desselben in gleicher Größe erscheinen, wie sie wirklich sind (§. 2), folglich auch die ganze Figur des Quadrats.

Soll man nun den Grundriß desselben Quadrats zeichnen, so wird er durch die gerade Linie A B dargestellt, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Linie C′ A′ fallen in dem Punkte des Grundrisses A zusammen, eben so die Projectionspunkte der Linie D′ B′ in dem Punkte des Grundrisses B, und endlich fällt die Projection der Linie C′ D′ mit der Linie des Grundrisses A B zusammen.

Es wird also der Grundriß des Quadrats A′ C′ D′ B die gerade Linie A B sein.

Anmerkung 1. Stände das Quadrat schräg gegen die senkrechte Ebene (Taf. 1 Fig. 21), wie der Grundriß A B zeigt, so findet man die schräg gestellte Ebene im Aufriß, wenn man die willkürlich langen Linien A A′ C′ und B B′ D′ lothrecht hinauf zieht.

Setzt man alsdann von A′ nach C′ und von B′ nach D′ das Maß einer Seite des Quadrats und zieht die Linie C′ D′, so ist die gesuchte Projection des schräg stehenden Quadrats im Aufriß gefunden.

Anmerkung 2. Es sei das Quadrat schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt (Taf. 1 Fig. 22), man soll Grundriß und Aufriß derselben finden.

Wenn man die punktirte Linie A″ B″ unter dem gegebenen Neigungswinkel B″ A″ E″ zieht und die Länge der Seite des Quadrats von A″ nach B″ setzt, so ist die Linie A″ B″ die Projection der Seitenansicht des Quadrats.

Bestimmt man nun die Grundlinie A′ B′ des Quadrats in der Grundlinie der senkrechten Ebene a b und zieht man die willkürlich lange Linie B″ D′ C′ parallel mit a b, so zeigt der Raum zwischen der Linie B″ D′ C′ und der Grundlinie a A′ B′ b die Höhe an, zwischen welcher das geneigte Quadrat liegen muß. Zieht man nun die Lothrechten A′ C′ und B′ D′ und verbindet diese beiden durch die Linie C′ D′, so hat man die Projection des Aufrisses des schräg gegen die wagerechte Ebene geneigten Quadrats gefunden.

Den Grundriß würde man auf folgende Weise finden.

Man ziehe die Lothrechten C′ A′ C A und D′ B′ D B abwärts willkürlich lang, so giebt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Länge des zu suchenden Grundrisses, zieht man die wagerechte Linie A B als Grundlinie des Quadrats, so ist diese eben so lang als A′ B′, weil beide Linien Parallelen zwischen Parallelen sind.

Nun betrachte man das Dreieck A″ B″ E″; in diesem ist die Linie A″ E″ die Projection der Linie A″ B″, A″ B″ aber ist die Länge des Quadrats, folglich ist A″ E″ die Projection der Länge des Quadrats. Trägt man nun die Länge der Linie A″ E″ mit dem Zirkel von A nach C und von B nach D und zieht von C nach D eine gerade Linie C D, so ist die Figur A C D B der gesuchte Grundriß des Quadrats.

Anmerkung 3. Wäre die quadratische Ebene unter einem gegebenen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt (wie vorhin), die Grundlinie des Quadrats neige sich aber ebenfalls unter einem beliebigen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene (Taf. 1 Fig. 23), so findet man Grund- und Aufriß des Quadrats wie folgt.

Die punktirte Linie A″ B″ giebt die Neigung des Quadrats gegen die wagerechte Ebene an. Zieht man die willkürlich lange Linie B′ D′ C′ parallel mit a A′ B′ b, so zeigt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Höhe an, welche der Aufriß einnehmen wird.

Zeichnet man sich nun den Grundriß A B C D (wie in Anmerkung 2) in diejenige schräge Lage, wovon die Neigung gegeben ist, so kann man aus diesem gefundenen Grundriß nunmehr den Aufriß bestimmen.

Zieht man nämlich die lothrechten Linien A A′ und B B′, so ist A′ B′ die Grundlinie des Aufrisses in ihrer Projection.

Zieht man ferner C C′ und D D′, so ist die Linie C′ D′ die obere Grenzlinie des Quadrats.

Zieht man nun noch A′ C′ und B′ D′, so ist die Figur A′ C′ D′ B′ die gesuchte Projection des Aufrisses. Man kann sich zur Uebung in jeder der geraden Linien mehrere Projectionspunkte annehmen und diese nach und nach bestimmen, wodurch man sich von der Wahrheit noch mehr überzeugen wird. Hier sind immer nur die Endpunkte der Linien gesucht und bestimmt worden, da die etwa in den geraden Linien angenommenen Zwischenpunkte doch mit diesen Endpunkten in ihren Projectionen immer wieder zusammenfallen. Auch kann man zur Uebung die Neigungswinkel willkürlich verändern, woraus immer andere Figuren im Grund und Aufriß entstehen werden.

Anmerkung 4. Denkt man sich das Quadrat senkrecht in der wagerechten Ebene stehend und zugleich unter einem rechten Winkel gegen die Grundlinie a b (Taf. 1 Fig. 24) der senkrechten Ebene geneigt, wie der Grundriß in der Linie A B zeigt, so erhält man den Aufriß, wenn man die lothrechte Linie A′ B′ zieht und A′ B″ so lang macht wie eine Seite des Quadrats, = A B. Es fällt alsdann die Ebene des Quadrats sowohl bei dem Grundrisse, als bei dem Aufrisse, in einzelne gerade Linien zusammen, nämlich in die Linie A B für den Grundriß und in die Linie A′ B′ für den Aufriß. (§. 4 Anmerk. 3.)

§. 14.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Kreises im Grund- und Aufriß gezeichnet werden, wenn die Kreisfläche parallel mit der senkrechten Ebene steht und der senkrechte Durchmesser des Kreises normal auf die wagerechte Ebene gerichtet ist.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 25.) Denkt man sich die mit der senkrechten Ebene parallele Kreisfläche dieser senkrechten Ebene so nahe gerückt, daß der Kreis in die Ebene zu liegen kommt, so wird der Kreis A′ D′ B′ E′ in seiner Projection wieder als Kreis erscheinen, und zwar von derselben Größe wie der gegebene war. Es ist demnach der Kreis A′ D′ B′ E′ die gesuchte Projection. (§. 3 Anmerk. 1 u. 2.) Will man nun den Grundriß finden, so ziehe man die lothrechten Linien A′ A, D′ C′ E′ C, B′ B, und dann die wagerechte Linie A C B, so ist dieselbe der gesuchte Grundriß, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Kreisfläche, so viele man ihrer auch im Umkreise annehmen mag, fallen alle in die gerade und wagerechte Linie A B.

So liegen z. B. die Projectionen der drei Punkte des Durchmessers D′ C′ E′ alle in dem einzigen Punkte C der Linie A C B.

Anmerkung 1. Es stehe (Taf. 1 Fig. 26) der gegebene Kreis senkrecht in der wagerechten Ebene, aber schräg gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene, man soll den Grundriß und Aufriß dieses Kreises finden.

Zu diesem Zwecke zeichne man sich erst nach dem gegebenen Durchmesser den punktirten Kreis A″ D″ B″ J″ auf die Linie a b.

Man theile ferner den Durchmesser dieses Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in vier, und ziehe durch die Theilungspunkte die senkrechten Linien F′ G′, D′ E′, H′ J′, so hat man die nöthigen Hülfsmittel, um den Aufriß zu ermitteln.

Jn je mehr Theile man den Durchmesser A′ B′ theilt, um so mehr entstehen senkrechte Linien, und um so genauer ist man im Stande, die Aufrißlinie zu finden, wie wir später sehen werden.

Um den Grundriß zu bestimmen, ziehe man die Linien A′ M und B′ N, so wird die Linie M N die Projection des Kreises im Grundrisse sein.

Diese Linie trage man nach ihrer Länge mit dem Zirkel von A nach B, so daß die Linie A B denjenigen Neigungswinkel macht, welchen man bestimmt hat, so ist die Linie A B der Grundriß des Kreises.

Um nun den Aufriß zu finden ziehe man zuvörderst die punktirte Linie D′ D″ willkürlich lang parallel mit a b; eben so verlängere man den Durchmesser A′ B′ des Kreises willkürlich lang. Nun trage man aus dem punktirten Kreise die Punkte des Durchmessers K′ C″ L′ mit dem Zirkel in den Grundriß A B bei K C L. Hierauf ziehe man die Senkrechten A A″, C E C″ D″ und B B″, so hat man die äußersten Punkte des Aufrisses und den Mittelpunkt C″ gefunden. Um nun auch die zwischenliegenden Punkte zu finden, ziehe man die senkrechten K G″ K″ F″ und L J″ L″ H″, alsdann nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie K′ F′ = K′ G′ und trage sie auf dem Durchmesser A″ B″ von K″ nach F″ und abwärts nach G″.

Eben so nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie L′ H′ = L′ J′ und trage sie auf dem Durchmesser A″ B″, von L″ nach H″ und abwärts nach J″. Verbindet man nun aus freier Hand die gefundenen Projectionspunkte A′ F′ D′ H′ B′ J′ E′ durch eine krumme Linie, so hat man die verlangte Projection des Kreises gefunden.

Anmerkung 2. Stände der Kreis (Taf. 1 Fig. 27) senkrecht in der horizontalen Ebene und der wagerechte Durchmesser des Kreises normal gegen die senkrechte Ebene, so würde der Grundriß des Kreises die Linie A B und der Aufriß die Linie A′ B′ sein, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Kreisfläche werden bei der angenommenen Stellung sowohl im Aufriß als im Grundriß in eine bloße gerade Linie zusammenfallen.

Anmerkung 3. Wäre die Kreisfläche (Taf. 1 Fig. 28) gegen die wagerechte Fläche unter einem bestimmten Winkel geneigt, so würde man Grund- und Aufriß derselben auf folgende Weise finden.

Es sei M O N der Durchmesser des Kreises, O der Mittelpunkt desselben und der Winkel N M P der Neigungswinkel gegen die wagerechte Ebene. Ferner sei der punktirte Kreis A′ D′ B′ E′ die Projection des Kreises, welche parallel mit der senkrechten Ebene steht, so sind diese beiden Figuren die Hülfsmittel, um den geforderten Grundriß und Aufriß zu finden. Zuerst wollen wir den Aufriß aufsuchen.

Die Linie N P ist die senkrechte Projection des Kreisdurchmessers M N. Nimmt man nun die Linie N P in den Zirkel und setzt sie von E'' nach D'', so hat man den Höhendurchmesser des Kreises, und wenn man die Höhe P U von E'' nach C'' trägt, so ist C'' der Mittelpunkt des Projectionskreises. Zieht man durch den Punkt C'' die Wagerechte A'' B'' willkürlich lang, so wird in dieser Linie der Breitendurchmesser des Kreises liegen.

Trägt man nun mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie A' C' von C'' nach A'' und die Linie C' B' von C'' nach B'', so hat man in den Punkten A'' D'' B'' E'' die vier äußersten Punkte der Kreisfläche gefunden.

Um nun noch die Zwischenpunkte zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Man trage aus dem Durchmesser des punktirten Kreises die Entfernung C' K' auf der Linie M N, von O nach X und die Entfernung C' L' von O nach W. Ferner ziehe man die Wagerechten X T und W V, so sind T und V die Höhenprojectionen von X und W. Trägt man nun die Entfernung U T von C'' nach K'' und die Entfernung U W von C'' nach L'', so sind K'' und L'' die Projectionen der Punkte T und V. Zieht man durch K'' und L'' wagerechte Linien beliebig lang und setzt aus dem punktirten Kreise die Entfernung K' F mit dem Zirkel von K'' nach F'' und die Entfernung K' G' von K'' nach G''; ferner trägt man die Entfernung H' L von L'' nach H'' und die Entfernung L' J' von L'' nach J'', so hat man die Zwischenpunkte F'' G'' J'' H'' gefunden. Verbindet man nun aus freier Hand die Punkte E'' H'' A'' F'' D'' G'' B'' J'' durch eine krumme Linie, so erhält man die Projection der gesuchten Kreisfläche im Aufriß.

Will man nun den Grundriß dazu finden, so verfährt man wie folgt.

Man ziehe die willkürlich lange Mittellinie A B und verlängere die Mittellinie D'' E'' des oberen Kreises nach unten willkürlich lang, so ist C der Mittelpunkt des Grundrisses.

Die Linie M P in dem Dreieck M N P ist die Projection der Linie M N, oder, was dasselbe ist, M P ist der Durchmesser des Kreises in der Grundrißprojection. Setzt man nun die Entfernung R P von C nach D und die Entfernung R M von C nach E, so hat man in D und E die äußersten Punkte des Breitendurchmessers gefunden; trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Länge C' A' von C nach A und die Länge C' B' von C nach B, so hat man in A und B die äußersten Punkte des Längendurchmessers gefunden.

Um die Zwischenpunkte zu finden verfahre man wie folgt.

Man ziehe in dem Dreieck M N P die Senkrechten W S, O R und X Q, so erhält man in den Punkten S R Q die Projectionen der Punkte W O X. Trägt man nun die Entfernung R Q von C nach K und die Entfernung R S von C nach L, so sind K und L diejenigen Projectionspunkte, welche mit S und Q, mit W und X und im punktirten Kreise mit K' und L' übereinstimmen.

Trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Entfernung K' G' von K nach G und die Entfernung K' F' von K nach F, so hat man die oberen Zwischenpunkte gefunden.

Trägt man ferner aus dem punktirten Kreise die Entfernung L' J' von L nach J und die Entfernung L' K' von L nach K, so hat man die beiden unteren Zwischenpunkte gefunden.

Verbindet man nun die sämmtlichen Projectionspunkte A F D G B J E durch eine krumme Linie, so hat man die gesuchte Projection der Kreisfläche im Grundriß.

Es ist von selbst einleuchtend, daß, jemehr Punkte des Umkreises man in ihrer Projection sucht, um so genauer findet man die Projection der ganzen Kreislinie.

NB. Es sind nicht immer alle Hülfslinien genannt worden, welche gezogen werden müssen und die man schon in der Zeichnung von selbst sieht, um den Text dadurch nicht ohne Noth zu weitläufig und mithin schwerer verständlich zu machen.

Anmerkung 4. (Taf. 1 Fig. 29.) Es sei derselbe Kreis wie in Anmerk. 3 gegeben. Der Kreis neige sich unter gleichem Winkel wie dort gegen die wagerechte Ebene, sein Grundriß stehe aber gleichzeitig unter einem gegebenen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene geneigt; man soll Grundriß und Aufriß finden.

Zuvörderst vergegenwärtige man sich alles das genau, was in der vorigen Anmerk. 3 über das Auffinden des Grund- und Aufrisses gesagt wurde.

Man denke sich nun den Grundriß der vorigen Figur (28) in Fig. 29 gezeichnet, aber so, daß seine Achse A B mit der Grundlinie a b der senkrechten Ebene den vorgeschriebenen Winkel mache, so ist der gesuchte Grundriß gefunden. (Wären andere Winkel für die Neigungen der Kreisfläche gegeben als in der vorigen Fig. 28, so bliebe nichts weiter übrig, als den Grundriß in gleicher Weise wie in Anmerk. 3 zu suchen, aber für die schräg geneigten Durchmesser A B und E D.)

Den Aufriß findet man, wie folgt.

Man bestimme erst aus dem gegebenen Durchmesser und der gegebenen Neigung desselben die Abstände der parallelen Linien N D'', X F'', O A'', W H''. Nun ziehe man vom Grundrisse aus aufrecht die Normalen D D'', C C'', E E'', A A'', B B'', so hat man die Projectionen der Durchmesser und des Mittelpunktes gefunden.

Auf gleiche Weise bestimmt man die Punkte F'' G'' J'' H'', und der gesuchte Aufriß ist gefunden.

Anmerkung 5. Sollte eine elliptische Fläche oder ein regelmäßiges Vieleck, ein Achteck, Sechseck rc. gezeichnet werden, so würde in allen Fällen ganz in ähnlicher Weise Grund- und Aufriß dafür gefunden werden, wie wir es in dem vorliegenden §. 14 und den zugehörigen vier Anmerkungen gesehen haben.

Zur Uebung kann man sich diese Aufgaben selbst stellen und lösen. Ob man falsch gezeichnet hat, wird man sogleich sehen, wenn man die gesuchten Punkte nicht auffinden kann.

§. 15.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Würfels (Cubus) im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden, wenn der Würfel in der wagerechten Ebene steht und seine senkrechte Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist. (Tafel 2 Fig. 30.)

Auflösung. Wenn der in der wagerechten Ebene stehende Würfel im Grundriß gezeichnet werden soll, so giebt er das Quadrat A B C D, denn die obere Fläche fällt mit der unteren zusammen, weil sie parallel mit derselben ist. Eben so fallen die vier Kanten des Würfels in ihrer Projection in den vier Punkten

A B C D zusammen und Quadrat A B C D ist der gesuchte Grundriß des Cubus. (§. 5.)

Den Aufriß findet man, wenn man die Seiten A C und B D des Grundrisses senkrecht bis über die Grundlinie a b der senkrechten Ebene verlängert, A′ C′ und B′ D′ gleich A C und B D macht und C′ D′ zieht, so ist das Quadrat A′ C′ D′ B′ der gesuchte Aufriß. (§. 5 Anmerk. 1.)

Hier fallen ebenfalls die beiden senkrechten Ebenen zusammen in das Quadrat A′ B′ C′ D′ und die vier auf die senkrechte Ebene normalen Kanten des Würfels fallen in den Punkten A′ C′ D′ B′ zusammen.

Anmerkung 1. Sollte man von dem Würfel in Figur 30 einen senkrechten Durchschnitt zeichnen (§. 7), so verfahre man wie folgt.

Es sei (Fig. 30) die punktirte Linie E F im Grundriß die Richtung einer senkrechten Ebene, welche durch den Würfel liegt.

Trägt man die Länge der Linie E F in Fig. 31 auf der Linie a b von A nach B, so ist A B = E F. Da nun aber E F auch = A′ B′ ist, so ist A B die Grundlinie des Würfeldurchschnittes. Zieht man nun Fig. 31 die Senkrechten A C und B D und macht A C = A′ C′ und B D = B′ D′, so hat man die Kanten des Durchschnittes, verbindet man dann noch C mit D, so ist A B C D Fig. 31 die gesuchte Durchschnittsebene.

Anmerkung 2. Es sei der Würfel unter einem beliebigen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt, man soll Grund- und Aufriß davon zeichnen, wenn der geneigte Würfel mit seiner vorderen Fläche parallel mit der senkrechten Ebene steht. (Tafel 2 Fig. 32.)

Das Quadrat A B C D wird der verlangte Aufriß sein, wenn man die Linie A B desselben unter dem vorgeschriebenen Winkel gegen die Linie a b geneigt hat.

Um den Grundriß zu finden, ziehe man von den Punkten A B C D des Aufrisses normale Linien abwärts und ziehe dann die wagerechte Linie B′ C′ D′, nun mache man B′ E′, C′ F′ und D′ G′ gleich einer Seite des Würfels, so ist der Grundriß gefunden. Die Kante A′ H′ wird von der Fläche F′ G′ D′ C′ verdeckt und nicht sichtbar sein; eben so werden die unterhalb liegenden Flächen des Würfels, welche im Aufriß durch die Linien B A und A D dargestellt werden, im Grundriß nicht zu stehen kommen.

Anmerkung 3. Es sei (Tafel 2 Fig. 33) der Würfel schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt, aber er stehe mit der senkrechten Ebene nicht parallel.

Fig. 33 sei auf der Grundlinie a b der senkrechten Ebene der Durchschnitt A B C D des Würfels unter dem vorgeschriebenen Neigungswinkel gezeichnet.

Um den Aufriß zu bekommen, ziehe man die beliebig langen Wagerechten C D′ C′ und B E′ B′, ferner trage man auf die Linie a b die Linie A′ F′ so lang auf, als eine Seite des Würfels ist, so hat man die Grundlinie des Aufrisses gefunden, nun ziehe man die Senkrechten A′ B′ C′ und F′ E′ D′, verbinde C′ wagerecht mit D′ und B′ wagerecht mit E′, so ist die Figur A′ B′ C′ D′ E′ F′ der gesuchte Aufriß.

Will man nun den Grundriß finden, so verfährt man wie folgt.

Von den Kanten des Durchschnittes B C D ziehe man die Senkrechten B E, C F, D G. Nun verlängere man die Seitenlinien des Aufrisses nach unten willkürlich lang und ziehe die

Wagerechte C″ D″, alsdann mache man C″ B″ und D″ E″ gleich lang mit E F und B″ A″ und E″ F″ gleich lang mit F G, verbinde dann B″ mit E″ und A″ mit F″, so ist die Figur A″ B″ C″ D″ E″ F″ der gesuchte Grundriß.

Anmerkung 4. Wäre der gegebene Körper anstatt eines Würfels, ein Prisma, mit quadratischer Ober- und Unterfläche, so würde die Aufsuchung seiner Grund- und Aufrisse so wie seines Durchschnittes ganz eben so erfolgen, wie wir es eben §. 15 für den Würfel gezeigt haben.

Zur Uebung kann man sich anstatt eines Würfels nun einen prismatischen Körper mit quadratischer Grundfläche in allen Lagen, wie vorher den Würfel zeichnen.

§. 16.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Prisma gefunden werden, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist (Tafel 2 Fig. 34), wenn die senkrechte Achse des Prisma parallel mit der senkrechten Ebene und das Prisma in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Der Grundriß wird durch das regelmäßige Achteck A B C D E F G H dargestellt werden, denn die Projection der oberen achteckigen Fläche fällt mit der Projection der Grundfläche zusammen. (§. 5.) Eben so fallen die sämmtlichen senkrechten Kanten des Prisma mit den Punkten A B C … zusammen. Es ist also das Achteck A B C D E F G H der gesuchte Grundriß.

Will man nun den Aufriß zeichnen, so ziehe man von den Eckpunkten des Grundrisses aufwärts beliebig lange Linien, so wird H′ C′ dem unteren Durchmesser des Achtecks gleich sein. Nimmt man ferner in den Zirkel das gegebene Maß der Höhe des Prisma und setzt dieses Maß von H′ nach J′, von A′ nach K′, von B′ nach L′, von C′ nach M′ und zieht die Linie J′ K′ L′ M′, so hat man den Aufriß gefunden.

Die Seitenflächen des Prisma, wovon H G, G F, F E, E D und D C im Grundriß die Projectionen sind, werden nicht sichtbar erscheinen, indem sie, wie man sich leicht durch den Augenschein überzeugen kann, im vorliegenden Falle durch die vorderen sichtbaren Flächen gedeckt werden.

Eben so sieht man von der oberen und unteren achteckigen Fläche nichts, als die geraden Linien im Aufrisse H′ A′ B′ C′ und J′ K′ L′ M′. (§. 4 Anmerk. 5.)

Anmerkung 1. (Tafel 2 Fig. 35.) Wenn das achteckige Prisma mit der wagerechten Ebene einen bestimmten Winkel macht, die Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene liegt, so findet man den Aufriß folgendermaßen.

Man zeichne den Aufriß des Prisma aus Fig. 34 (wo derselbe aufrecht steht) in der geneigten Lage auf, wie er Fig. 35 unter dem angenommenen Winkel vorgestellt ist, so hat man den verlangten Aufriß.

Die Projectionspunkte A′ H′ G′ F′ des Aufrisses stimmen nun mit den Projectionspunkten des Grundrisses A H G F Fig. 34 überein. Die Punkte B′ C′ D′ E′ des Aufrisses fallen in ihrer Projection mit den Punkten A′ H′ G′ F′ zusammen und sind nicht sichtbar.

Zieht man im Grundriß die Parallelen H P, F K, E L, C Q so weit von einander wie sie im Aufrisse von einander abstehen, zieht dann von den Punkten F′ G′ H′ A′, O′ M′ Q′ K′ normale Linien nach dem Grundrisse und bemerkt die mit den Aufrißkanten übereinstimmenden Durchschnittspunkte **A B D C E F H G** ꝛc., so hat man, wenn man diese mit geraden Linien verbindet, den Grundriß gefunden.

Anmerkung 2. Es neige sich das Prisma unter demselben Winkel wie in Anmerk. 1 gegen die wagerechte Ebene, stehe aber mit der Projection seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene wie Tafel 2 Fig. 36, so findet man den Grundriß, wenn man den in Fig. 35 bereits gefundenen Grundriß in diejenige Lage zeichnet, wie er in Fig. 36 angegeben ist.

Zieht man nun aus den Aufrißkanten Fig. 35 die parallelen Hülfslinien **O N, M J, O P, L K** ꝛc. nach Fig. 36 herüber und eben so aus den Kanten des Grundrisses Fig. 36 die normalen Hülfslinien hinauf in den Aufriß, bemerkt die Durchschnittspunkte und verbindet diese im Aufriß durch die Linien O′ N′, N′ J′, J′ P′, P′ K′ ꝛc. ꝛc., so erhält man den Aufriß des Prisma in der vorgeschriebenen Lage.

Zur Bequemlichkeit sind im Grundriß und Aufriß gleiche Buchstaben zur Bezeichnung der Kantenpunkte gewählt worden, wodurch das Aufsuchen bedeutend erleichtert wird, besonders wenn man auf die einander entgegen stehenden Buchstaben Rücksicht nimmt, so steht z. B. dem **A** in Grund- und Aufriß das **K** entgegen, dem **B** das **L** (als Anfang und Ende der Seitenkanten des Prisma) dem **D** das **Q** ꝛc. ꝛc.

Zur Uebung kann man auch den Grundriß in einer schrägen Lage gezeichnet annehmen und dann den zugehörigen Aufriß suchen.

§. 17.

Aufgabe. Man soll einen Cylinder im Grund- und Aufriß zeichnen, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. So wie für diese Stellung der Grundriß eines Cubus ein Quadrat war, so wird (Tafel 2 Fig. 37) der Grundriß des Cylinders ein Kreis sein. Denn wenn man sich einen Cylinder in der wagerechten Ebene senkrecht stehend denkt, so werden alle in seinem Mantel gedachten senkrechten Linien in ihren Projectionen in einzelnen Punkten zusammenfallen, und wenn man diese Projectionspunkte dann durch eine krumme Linie verbindet, so wird ein Kreis entstehen, welcher der verlangte Grundriß ist. (§. 3 u. §. 4.)

Um den Aufriß zu finden, ziehe man die Linien **A A′ F′, E C D E′ D, B B′ G′** willkürlich lang, setze von A′ nach F′, von E′ nach D′ und von B′ nach G′ die gegebene Höhe des Cylinders, so ist die Figur A′ F′ D′ G′ B′ E′ der gesuchte Aufriß, denn die Normalen, welche man sich im Mantel des Cylinders als Hülfslinien denkt, erscheinen in der Aufrißprojection alle gleich lang und folglich erscheint die Hälfte des Mantels vom Cylinder hier im Aufriß als Rechteck, welches die Höhe des Cylinders zur Höhe und den Durchmesser des Cylinders zur Breite hat.

Anmerkung 1. Wäre (Tafel 2 Fig. 38) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, seine Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Den Aufriß findet man, wenn der Aufriß des Cylinders,

wie er sich in Figur 37 dargestellt hatte, in Figur 38 eben so gezeichnet wird, nur mit dem Unterschiede, daß man ihn unter dem angenommenen Winkel gegen die Linie **a b** neigt.

Den Grundriß findet man, wenn man von dem Aufrisse aus den bezeichneten Punkten **A B . . .** die nöthigen Normalen abwärts zieht und die Achse des Cylinders im Grundrisse bestimmt. Macht man nun den Cylinder im Grundrisse eben so breit wie er im Aufrisse war und sucht mit Hülfe von §. 14 die obere und untere Kreisfläche, so ist der Grundriß für den geforderten Fall dargestellt.

Anmerkung 2. Es stünde (Tafel 2 Fig. 39) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, wie vorhin, er sei aber auch gegen die senkrechte Ebene geneigt, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Zuvörderst zeichne man sich den gegebenen Cylinder **A B F G** unter der gegebenen Neigung auf die Linie **a b**. Dann ziehe man die wagerechten Hülfslinien **F F′, D H′ D′ J′** ꝛc. parallel mit **a b**, so wird der zu suchende Aufriß zwischen der Linie **a b** und **F F′** liegen. Nun bestimme man zuerst die Achse des Aufrisses B′ . . F′ und ziehe damit parallel die Senkrechten K′ H′ und J′ L′, nachdem man D′ J′, D′ H′ gleich den Radien der Kreisflächen gemacht hat, bestimme alsdann die einzelnen Projectionspunkte der Kreise und verbinde sie mit einer krummen Linie, so ist der Aufriß dargestellt.

Je mehr Punkte im Umkreise man (§. 14) bestimmt, um so genauer wird die Figur.

Um nun den Grundriß zu finden, ziehe man in dem Hülfsaufrisse **A B F G** die Normalen **A Q, C P, F M, D N, G O**, ferner ziehe man von dem bereits gefundenen Aufrisse die Normalen H′ H″, G′ G″, J′ J″ willkürlich lang.

Nun bestimme man den Mittelpunkt C″ willkürlich, alsdann suche man die Projection des zugehörigen Kreises, darin ist B″ C″ = B P, C″ A″ = P Q, C″ K″ = C′ K′ und C″ L″ = C′ L′.

Ferner suche man die Projection der Achse des Grundrisses C″ D″ = P N. Hierdurch ist auch der Mittelpunkt D″ des zugehörigen Kreises bestimmt. Zu diesem Mittelpunkte D″ suche man wie vorhin den zugehörigen Kreis, so ist darin F″ D″ = M N, D″ G″ = N O, D″ H″ = D′ H und D″ J″ = D′ J′.

Je mehr Punkte dieser Kreise man nach §. 14 sucht, um so genauer wird die Figur, wenn man die gefundenen einzelnen Projectionspunkte der Kreise durch krumme Linien verbindet.

§. 18.

Aufgabe. Es soll der Grund- und Aufriß eines Kegels gefunden werden, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Höhenachse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. Der Grundriß desselben (Tafel 2 Fig. 40) wird ein Kreis sein, eben so groß, wie der Kreis, welcher die Grundfläche des Kegels bildet. (§. 5 u. §. 14.)

Den Aufriß findet man, wenn man von **C** aus die Normale **C C′ D′** willkürlich lang zieht und von C′ nach D′ die gegebene Höhe des Kegels mit dem Zirkel aufträgt. Dann zieht man die Linien A′ D′ und D′ B′, so ist A′ D′ B′ der Kegel im Aufriß; denn die Linie A′ B′ ist die Projection der Grundfläche und das Dreieck A′ D′ B′ ist die Projection der Hälfte des Kegelmantels.

Anmerkung 1. Soll man mehr Punkte des Mantels im Grund- und Aufrisse finden, so bestimme man die Punkte, welche man finden will; z. B. man will den Punkt E' zwischen A' und D' suchen.

Der Punkt E' aber liegt in der Mitte zwischen A' und D', folglich liegt der Punkt E' im Grundrisse in der Mitte des Radius A C, bei E, denn der Radius A C des Grundrisses ist zugleich die Projection der schrägen Linie A' D' im Aufrisse.

Eben so würde man die Projection des Punktes F' im Aufrisse bei F im Grundrisse finden.

Sollte man den Punkt J des Grundrisses im Aufrisse bestimmen, so ziehe man C J G, trage die Projection von G nach G' und ziehe G' D'; trägt man nun die Projection von dem Punkte J des Grundrisses hinauf nach der Linie G' D' des Aufrisses, so findet man den Punkt J' (wo sich die Projectionslinien schneiden), als den gesuchten Projectionspunkt von J.

Eben so würde man den Punkt K des Grundrisses bei K' im Aufrisse finden.

Wäre umgekehrt der Punkt J' im Aufrisse gegeben und man sollte aus ihm den Punkt J des Grundrisses bestimmen, so ziehe man erst die wagerechte Hülfslinie J' E', ferner die Normale E' E bis zum Durchmesser des Kreises im Grundrisse (weil A' D' die Projection von A C ist).

Beschreibt man nun im Grundrisse mit dem Radius C E einen Kreis, so ist dieser die Projection der wagerechten Linie E' F' des Aufrisses und alle Punkte, welche in der Linie E' F' des Aufrisses liegen, werden in ihrer Projection in den Kreis E J K F im Grundrisse fallen; eben so wie alle Punkte der Linie A' G' C' H' B'' in dem Kreise A G L H B des Grundrisses liegen.

Will man nun den Punkt J' des Aufrisses im Grundrisse bestimmen, so zieht man von J' abwärts die Normale J' J, alsdann ist J der gesuchte Punkt.

Eben so würde man aus dem Punkte K' des Aufrisses den Punkt K des Grundrisses finden.

Man sieht hieraus, daß sich auf ähnliche Weise jeder beliebige Punkt des Grundrisses im Aufrisse und umgekehrt finden läßt.

Anmerkung 2. Läge der Kegel, wie in Tafel 2 Fig. 41, mit einer Seite in der wagerechten Ebene, so würde sein Aufriß das Dreieck D' A' B' sein und C' die Projection des Kreisdurchmessers, so wie auch dessen Mittelpunkt, und die Linie A' C' B' würde die Projection der Kegelgrundfläche (des Kreises) darstellen.

Den Grundriß würde man finden, wenn man zuvörderst nach §. 14 Anmerk. 3 die Kreisfläche suchte. Sie bestimmt sich zunächst durch die Normalen B' B, C' C, A' A und daraus, daß man C E = C' B' und C F = C' A' macht.

Zieht man dann von C im Grundrisse die Wagerechte C D und von D' die Normale D' D, so ist C D im Grundrisse die Achse des Kegels und wenn man noch D F und D E im Grundrisse zieht, hat man den ganzen verlangten Grundriß des Kegels gefunden.

Zur Uebung zeichne man sich noch den Kegel in mehreren andern Lagen, z. B. im Grundrisse auch schräg gegen die senkrechte Ebene gestellt, oder in bestimmten Lagen, über oder unter der wagerechten Ebene, oder hinter oder vor der senkrechten Ebene.

§. 19.

Aufgabe. Es soll eine Kugel im Grund- und Aufriß gezeichnet werden. (Tafel 2 Fig. 42.)

Auflösung. Die sämmtlichen Projectionspunkte einer Kugel, welche man sich vom Mantel derselben auf eine wagerechte Ebene gezogen denkt, werden einen Kreis darstellen, dessen Durchmesser gleich dem gegebenen Durchmesser der Kugel war.

Es ist also in Fig. 42 der Kreis mit dem Durchmesser A B die Projection der Kugel im Grundriß.

Eben so wird der Aufriß einer Kugel wieder ein Kreis sein, dessen Durchmesser dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich ist und es wird der Kreis mit dem Durchmesser A' B der Aufriß der Kugel sein.

Anmerkung 1. Der Grundriß einer Halbkugel (Tafel 2 Fig. 43) ist aus obigen Gründen in der wagerechten Ebene wieder ein Kreis, wenn der Durchmesser der Kugel parallel mit der wagerechten Ebene liegt und der Aufriß der Halbkugel ist in diesem Falle ein halber Kreis mit dem Durchmesser der gegebenen Kugel.

Anmerkung 2. Will man bestimmte Punkte auf einer Halbkugel-Oberfläche finden, so verfährt man folgendermaßen.

Es sei (Tafel 2 Fig. 44) A' B' D' der Aufriß, A C B der Durchmesser des Grundrißkreises.

Im Grundrisse sei der Punkt E gegeben, man soll seine Lage im Aufrisse bestimmen.

Man ziehe die Linie E C' und mit diesem Radius beschreibe man den Kreisbogen E F.

Nun ziehe man von F im Grundrisse die Normale F F', bis sie den Umkreis des Aufrisses in F' schneidet, so ist F' der Projectionspunkt von F.

Zieht man nun von F' nach G' eine Parallele mit A' B', so ist F' G' die Projection eines Kreises, welcher parallel mit der Grundfläche der Halbkugel herumläuft, und ist dieser Kreis zugleich die Projection eines Kreises, der im Grundrisse durch E F H G gelegt gedacht wird. In diesem Kreise liegt der gegebene Punkt E des Grundrisses, es muß also seine Projection im Aufrisse auch in der Projection des Kreises E F H G liegen. Die Projection dieses Kreises ist aber im Aufrisse die Linie F' G', folglich muß der Punkt E des Grundrisses in der Linie F' G' des Aufrisses liegen. Zieht man nun von E die Normale E bis E', so ist E' der gefundene Projectionspunkt (von E) des Grundrisses.

Es sei umgekehrt ein willkürlicher Punkt im Aufrisse gegeben, man soll seine Projection im Grundrisse finden. Es sei J' dieser gegebene Punkt im Aufrisse.

Man ziehe durch J' die Linie J' K' L' parallel mit A' B', so ist diese Linie wieder die Projection eines Kreises, welcher um die Halbkugel herum parallel mit der Grundfläche der Halbkugel liegt. Nun ziehe man im Grundrisse mit dem Radius C K den Kreis K L M, so ist dieser Kreis die Projection der Linie L' K' des Aufrisses, in welcher der Punkt J' liegt.

Fällt man nun die Normale J' bis J, so ist der Punkt J des Grundrisses die verlangte Projection des willkürlich gegebenen Punktes J' im Aufrisse.

Es leuchtet ein, daß man auf diese Weise jeden beliebigen Punkt, sowohl im Aufrisse als Grundrisse, geben kann, und auf eben angegebene Weise seine Projection zu finden sein wird. Was nun für die Halbkugel gegolten, gilt natürlich auch für eine, aus zwei Halbkugeln zusammengesetzte ganze Kugel ganz in derselben Weise.

§. 20.

Aufgabe. Eine Schraubenlinie zu finden, welche um einen Cylinder gewunden ist.

Auflösung. Es sei (Taf. 2 Fig. 45) das Rechteck D' A' B' E' die Projection des senkrecht stehenden Cylinders im Aufriß (§. 17). Der Kreis A N B M sei die Projection desselben Cylinders im Grundriß. Die Neigung des Schraubenganges sei gleich dem Winkel F' A' B', man soll die Linie selbst finden.

Der Punkt A des Grundrisses liegt in seiner Projection im Punkte A' des Aufrisses.

Der Punkt M des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen A und B, also auch in der Mitte der Höhe zwischen B' und F' bei O.

Der Punkt B des Grundrisses wird auch zugleich der Projectionspunkt für den Höhenpunkt F der ersten halben Windung des Schraubenganges sein, und die krumme Linie A' O' L' wird die erste halbe Windung des Schraubenganges zeigen.

Der Punkt N des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen B und A (auf der Rückseite des Cylinders), also in der Mitte der senkrechten Höhe zwischen F' und J' des Aufrisses bei P', und die krumme punktirte Linie F' P' J' wird die andere Hälfte des ersten Schraubenganges auf der Rückseite des Cylinders zeigen. Um aber die Schraubenlinie mit mehr Gewißheit zu bestimmen, muß man noch Zwischenpunkte suchen, und je mehr man deren annimmt, um so genauer wird die Schraubenlinie gezeichnet werden können.

Zieht man im Grundrisse die Linien Q S und T R, so hat man vier Hülfspunkte.

Es liegen aber diese vier Punkte so, daß, wenn man auch die Linien T Q und S R zieht, der vordere Punkt Q zugleich die Projection des hinteren Punktes T ist. Eben so ist R die Projection von S.

Nun ziehe man die Linien Q Q' und R R' durch die ganze Höhe des Cylinders.

Es liegt aber Q im Grundrisse in der Mitte zwischen A und M, folglich wird Q im Aufrisse in der Mitte der Höhe zwischen dem senkrechten Abstande von A' O' des Aufrisses liegen.

Eben so wird R' zwischen F' und P' 2c. liegen und man wird auf gleiche Weise den Schraubengang in beliebiger Höhe bestimmen können.

Nimmt man zwischen den Punkten des Grundrisses A Q M.... noch Zwischenpunkte an und verfährt in gleicher Weise, so wird man die Schraubenlinie noch genauer finden. Dies gilt für jede Höhe eines ganzen Umganges der Schraubenlinie, so daß, wenn man z. B. nur den Gang A' Q' O' F' R P' J' gefunden hat, man nach diesem alle übrigen höher liegenden leicht finden kann.

§. 21.

Aufgabe. Es soll eine Schneckenlinie (Spirale) gezeichnet werden. (Taf. 2 Fig. 46.)

Auflösung. Es sei im Aufrisse die Höhe des ersten halben Ganges der Spirale durch die Linie E' F' bezeichnet, so ist der Punkt J im Grundrisse die Projection des Punktes J' im Aufrisse, denn der Punkt J liegt in der Mitte zwischen A und B', und J' wird in der Hälfte der Höhe zwischen A' und E' und C' und K' liegen. Es wird also der erste halbe Gang der Spirale, die krumme Linie A' J' F' des Aufrisses sein. Um diese krumme Linie noch genauer zu finden, braucht man nur mehr Punkte anzunehmen, durch welche die krumme Linie gehen muß.

Man ziehe C L und C M im Grundriß und L' D', M' D' im Aufriß. Nun ziehe man im Aufriß O' P' in der Mitte der Höhe zwischen N' J' und A' C', ferner ziehe man L' D', so ist L'' der Projectionspunkt von L und eben so M'' von M.

Auf gleiche Weise findet man die übrigen Theile der Windungen, welche man zur Uebung aufsuchen kann.

Ein für allemal wird hierbei bemerkt: je größer man den Maßstab der Uebungsfiguren auf dem Papiere nimmt, um so deutlicher wird die Zeichnung, um so mehr Bestimmungspunkte ist man im Stande, mit Deutlichkeit zu finden, und um so größer und schneller wird man die Ueberzeugung aller derjenigen Lehren gewinnen, welche hier gegeben wurden.

§. 22.

Aufgabe. Den Aufriß und Grundriß eines körperlichen **Ringes** zu zeichnen. (Taf. 2 Fig. 47.)

Auflösung. Steht der Ring senkrecht in der wagerechten Ebene und parallel mit der senkrechten Ebene, so ist sein Grundriß durch die Figur A B ausgedrückt.

Im Aufrisse bildet er zwei concentrische Kreise. Die Figur E ist die Ansicht des Ringes, wenn er mit seiner wagerechten Achse normal auf der senkrechten Ebene steht.

Die Figur F zeigt den senkrechten Durchschnitt desselben Ringes.

Die Figur G im Grundrisse zeigt den wagerecht liegenden Ring in der Mitte durchschnitten.

Zur Uebung zeichne man an verschiedenen Stellen durchgelegte Kreisebenen, welche durch punktirte Linien in der Figur angegeben sind; nach §. 14 wird sich dies sehr leicht bestimmen lassen.

Zur weiteren Uebung kann man sich noch den Ring unter schräger Stellung, entweder gegen die wagerechte oder gegen die senkrechte Ebene oder gegen beide zugleich, denken, und wieder die Projectionen der verschiedenen Kreisebenen suchen, welche entstehen, wenn man sich in der Verlängerung der Kreisradien den Ring an beliebigen Stellen durchschnitten denkt.

§. 23.

Die am meisten vorkommenden Aufwickelungen der Umkreise verschiedener Flächen.

Aufgabe. Es soll die Aufwickelung der Umrißlinie einer gegebenen Fläche gezeichnet werden.

Auflösung. Unter Aufwickelung der Umrißlinie irgend einer beliebigen Fläche versteht man diejenige gerade Linie die man erhält, wenn man das Maß des Umrisses (Umfanges) der gegebenen Fläche auf eine gerade Linie aufträgt.

Anmerkung 1. Wollte man hiernach die Aufwickelung eines Dreiecks zeichnen, so trägt man die einzelnen Maße seiner drei Seiten unmittelbar neben einander auf eine gerade Linie auf, so daß die nunmehr entstehende gerade Linie so groß gemacht wird, als die Summe aller drei Seiten des Dreiecks zusammengenommen.

Anmerkung 2. Auf dieselbe Weise findet man die Aufwickelung eines Quadrats, wenn man die Länge einer Seite desselben viermal neben einander auf eine gerade Linie trägt.

Anmerkung 3. Die Aufwickelung jedes regelmäßigen Vielecks findet man demnach, wenn man z. B. bei einem Achteck eine Seite achtmal neben einander auf eine gerade Linie setzt 2c.

Anmerkung 4. Die Aufwickelung eines Kreises findet man in der Praxis am leichtesten, wenn man denselben als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, oder, was dasselbe ist, wenn man ihn entweder in der Natur mit einem möglichst genau umgelegten Faden abmißt und die gefundene Länge des Fadens dann auf eine gerade Linie abträgt; oder wenn man einen auf dem Papiere gezeichneten Kreis mit dem Zirkel in sehr kleine gleiche Theile zerlegt und die Summe dieser gleichen Theile auf eine gerade Linie trägt.

Soll aber die Abwickelung mathematische Genauigkeit haben, so ist es unter allen Umständen besser, die Längen der Abwickelung durch Rechnung zu bestimmen.

Bei geradlinigen Figuren hat dies gar keine Schwierigkeit, man addirt die in Fußen und Zollen gemessenen Seiten zusammen und setzt die so gefundene Summe der Maße auf eine gerade Linie. Auf dem Papiere berechnet man ebenfalls zuvor die Summe der Maße, nimmt diese Summe alsdann nach dem verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel ab und trägt sie auf eine gerade Linie.

Bei krummlinigen Figuren bestimmt nur die Rechnung genau die Abwickelung gegebener Figuren. So erhält man die Kreislinie nach mathematischer Bestimmung, wenn man erst den Halbmesser (Radius) doppelt nimmt und dann mit $\frac{3}{1400} = 3{,}14$ multiplicirt. Es sei der Radius 4 Fuß, so ist der Umkreis (oder die Abwickelung) $4 \times 2 \times 3{,}14 = 25{,}12$ Fuß $= 25\frac{12}{100} =$ circa 25 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll.

Anmerkung 5. Sollte man die Abwickelung einer Ellipse finden, so verfährt man ganz ähnlich wie bei dem Kreise; man legt nämlich für die Praxis einen Faden möglichst genau um eine gegebene Ellipse, was man am leichtesten dadurch erreicht, daß man kleine Nägel in den Umkreis sehr nahe an einander schlägt und darum den Faden zieht, womit man die Länge des Umkreises messen will.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß auf diese Art zwar ein Vieleck entsteht, welches sich aber der krummen Linie um so mehr nähert, je näher man die Nägel an einander geschlagen hat.

Ferner muß man sich hüten den Faden zu straff anzuziehen, weil er sich sonst bei dem Abnehmen und Uebertragen wieder zusammenzieht und man so eine zu kurze Abwickelung erhalten würde.

Sicherer ist hier wieder die Rechnung.

Man findet aber den Umfang einer Ellipse, wenn man die Quadratwurzel der halben Summe der Quadrate beider Achsen mit 3,14.... multiplizirt.

Es sei die große Achse 9 Fuß lang, die kleine 4 Fuß, so ist die Summe der Quadrate beider Achsen $81 + 16 = 97$; die halbe Summe davon ist $48\frac{1}{2}$; die Wurzel davon liegt zwischen 6,96.... und 6,97..... Nehmen wir 6,96.... und multipliciren dies mit 3,14...., so steht $6{,}96.... \times 3{,}14.... = 21{,}8544.... = 21\frac{11}{12}$ Fuß, welche Art zu rechnen für alle practische Fälle hinlänglich genau ist.

Dieses gefundene Maß trägt man nun entweder in wirklichem Fußmaße oder nach dem verjüngten Maßstabe auf eine gerade Linie, in der Natur oder auf dem Papiere gegeben, auf, so ist die gesuchte Aufwickelung der gegebenen Ellipse gefunden.

Anmerkung 6. Sollte man Abwickelungen von Kettenlinien, Parabeln 2c. zu suchen haben, so thut man für die Praxis wohl am besten, daß man die gegebenen Linien entweder in natürlicher Größe construirt und sie mit dem Faden mißt (wie bei der Ellipse) oder auf dem Papiere mit dem Zirkel die Länge der Abwickelung bestimmt, da Berechnungen dieser Linien für den Anfänger schon ziemlich schwierig sind.

Anmerkung 7. Wollte man die Abwickelung einer Schraubenlinie finden, so betrachte man (Taf. 2 Fig. 45) den Aufriß und Grundriß des Cylinders und der darauf gezeichneten Schraubenlinie.

Dieselbe folgt immer demselben Gesetze, wäre man demnach nur im Stande, die Länge eines bestimmten Theiles derselben zu ermitteln, so könnte man daraus die Länge der ganzen Linie finden.

Man suchte z. B. die Länge der Linie **A′ O′** im Aufrisse, so findet man sie auf folgende Weise.

Die Projection der Linie **A′ O′** des Aufrisses ist im Grundrisse der Quadrant **A Q M**. Nimmt man die Aufwickelung dieser Linie als Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, ferner **C′ O′** als Länge der anderen Seite, welche rechtwinklig auf **C′ O′** steht, und verbindet dann die Endpunkte **O′** und **A** durch eine gerade Linie, so ist diese die Hypothenuse des Dreiecks und zugleich die gesuchte Aufwickelung von **A′ O′** des Aufrisses. Es reicht aber die Länge dieser Linie gerade über $\frac{1}{4}$ des einen Schraubenumganges, nimmt man nun die Summe aller Viertel zusammen und trägt sie als gerade Linie auf, so hat man die Abwickelung der sämmtlichen Schraubengänge.

§. 24.

Verwandelung einiger bei Bauten oft vorkommenden Linien.

Aufgabe. Ein halber Kreis soll in eine krumme Linie verwandelt werden, welche länger als der halbe Kreis ist, deren Höhenpunkte aber mit einander übereinstimmen. (Taf. 2 Fig. 48.)

Auflösung. Es sei der Halbkreis **A D B** gegeben, man soll über der ebenfalls gegebenen Linie **A′ B′**, welche länger ist, als der Durchmesser des Halbkreises, eine krumme Linie **A′ H′....B′** bilden, deren Höhenpunkte überall mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Diese Forderung kommt bei Anfertigung der sogenannten Lehrbogen der Gewölbe sehr oft vor. Man theile den Durchmesser des Halbkreises **A B** in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in sechs), alsdann ziehe man aus diesen Theilungspunkten die Normalen **G H**, **E F**, **C D**, **J K** und **L M**, bis sie den Umkreis berühren. Nun theile man die gegebene Linie **A′ B′** in eben so viele gleiche Theile, als vorher den Halbkreis-Durchmesser (hier in sechs). Auf diesen Theilpunkten errichte man beliebig lang die Normalen **G′ H′**, **E′ F′**, **C′ D′**, **J K′**, **L′ M′**. Nun fasse man im Halbkreise mit dem Zirkel die Linie **G H** und trage sie auf der Linie **A′ B′** von **G′** nach **H′**. Eben so trage man **E F** von **E′** nach **F′**, **C D** von **C′** nach **D′** u. s. w., so erhält man über der Linie **A′ B′** die Höhenpunkte **H′**, **F′**, **D′**, **K′**, **M′**, welche mit den gleichnamigen Punkten des Halbkreises **H**, **F**, **D**, **K**, **M** gleich hoch liegen, weil man die Linien gleich gemacht hat. Verbindet man nun die Punkte **A′**, **H′**, **F′**,.... durch eine krumme Linie, so ist diese die gesuchte, welche mit dem Halbkreise gleiche Höhenpunkte hat.

Anmerkung 1. Es sei bei derselben Figur (Taf. 2 Fig. 48) eine Linie **A″ B″** gegeben, welche kleiner als der Durchmesser des gegebenen Halbkreises ist, man soll über **A″ B″** ebenfalls eine krumme Linie (einen sogenannten überhöhten Bogen) zeichnen, deren Höhenpunkte auch mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Nachdem man den Halbkreisdurchmesser wie vorhin getheilt und die Normalen **G, H, E, F....** gezogen hat, theile man die gegebene Linie **A″ B″** in eben so viele gleiche Theile wie den Halbkreisdurchmesser **A B**, ferner errichte man auf **A″ B″** in den angenommenen Theilpunkten die Normalen **G″ H″....** und mache sie gleich lang wie die Normalen des Halbkreises **G H....**, ziehe dann durch diese gefundenen Punkte die krumme Linie **A″ H″ D″ B″**, so ist diese die gesuchte krumme Linie, deren Höhenpunkte mit denen des gegebenen Halbkreises zusammenfallen.

Anmerkung 2. Aus den so eben im Vorigen gegebenen Beispielen ersieht man leicht Folgendes. Eben so gut, wie man aus dem Halbkreise eine längere und eine kürzere Linie mit gleichen Höhenpunkten bilden konnte, eben so gut kann man aus der gegebenen längeren Linie **A′ H′....** auch einen Halbkreis bilden, welcher gleiche Höhenpunkte mit dieser gegebenen Linie gemeinschaftlich hat.

Setzt man nämlich die höchste Linie **C′ D′** auf die Mitte der vorläufig willkürlich lang gezogenen Linie **A B** und macht **C D = C′ D′**, so ist **C D** ein Radius des Halbkreises; macht man nun **A C = C D** und **C B** auch **= C D**, so ist die Linie **A B** der Durchmesser des gesuchten Halbkreises.

Theilt man nun diesen in eben so viel gleiche Theile, als die Linie **A′ B′**, und errichtet auf den Theilpunkten die Normalen **G H....** beliebig lang, so braucht man nur die Längen der normalen Linien **G′ H′**, **E′ F′....** von **G** nach **H**, von **E** nach **F....** zu setzen, um den Halbkreis zu erhalten, welcher gleiche Höhenpunkte mit der gegebenen Linie **A′ H′ F′....** haben wird.

Da es aber ein Halbkreis werden mußte, hätte man nur nöthig gehabt, mit dem Radius **C D** den Halbkreis **A D B** zu ziehen, welcher alsdann die Punkte **H F....** ebenfalls berührt haben würde. Auf ganz gleiche Weise kann man auch aus der gegebenen kürzeren Linie **A″ H″ D″ B″** einen Halbkreis mit übereinstimmenden Höhenpunkten bilden, wenn man, wie vorhin, die Linie **C″ D″** als Radius des Halbkreises betrachtet und eben so verfährt, wie vorhin gezeigt wurde.

Anmerkung 3. Es folgt ferner aus dem bisher Gesagten: eine Linie kann so lang oder so kurz sein, wie sie will, so ist man immer im Stande, über ihr irgend eine Bogenlinie zu beschreiben, welche mit einer anderen, bereits gegebenen gemeinschaftliche Höhenpunkte haben muß.

Es ist einleuchtend, daß in je mehr Theile man die Grundlinie des gegebenen Bogens theilt, und jemehr Punkte man demnach durch die gezogenen Normalen in seinem Umkreise bestimmt, um so genauer wird die gesuchte krumme Linie werden.

Anmerkung 4. Es sei (Taf. 2 Fig. 49) der Spitzbogen **A D B** gegeben, man soll daraus einen flacheren **A′ D′ B′** oder einen steileren **A″ D″ B″** gestalten, so verfährt man ganz nach den Auflösungen, welche für den Halbkreis in dem vorhergehenden Beispiele gegeben worden sind, man hat ebenfalls nur nöthig, die verschiedenen Längen der Normalen zu bestimmen.

Anmerkung 5. Es soll ein Halbkreis in einen sogenannten steigenden Bogen verwandelt werden. (Taf. 3 Fig. 50.) Es sei der Halbkreis **A D B** gegeben, so theile man seinen Durchmesser **A B** wieder in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ziehe die Normalen **G H**, **E F**, **C D....** bis zum Umkreise.

Ferner setze man auf der wagerechten Linie **A′ N′** die schräge Grundlinie des steigenden Bogens **A′ B′** unter dem bestimmten Neigungswinkel an.

Nun verlängere man sämmtliche Normalen des Halbkreises willkürlich. Dann mache man **G′ H′ = G H**, ferner **F″ E″ = F E**, ferner **C′ D′ = C D** u. s. w., endlich verbinde man die gefundenen Punkte **A′ H′ F′ D′ K′ M′ B′** durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte steigende Bogen, dessen Höhenpunkte mit dem des gegebenen Halbkreises übereinstimmen werden.

Anmerkung 6. Wäre der gegebene Bogen, den man in einen steigenden Bogen verwandeln soll, kein Halbkreis, sondern ein Spitzbogen (Taf. 3 Fig. 51), so verfahre man ganz eben so wie bei dem Halbkreise. Das Verfahren wird aus der Fig. 51 deutlich, da die sämmtlichen Bezeichnungen ganz wie bei dem Halbkreise (Anmerk. 5) gewählt sind.

Anmerkung 7. Man sieht leicht ein, daß man auf ganz gleiche Weise jedes beliebige Bogensystem in einen steigenden Bogen verwandeln kann, wie es auch in der Praxis bei den steigenden Treppengewölben immer vorkommt. Alsdann zeichnet man sich aber die zu verwandelnden Bögen nicht auf dem Papiere, sondern auf einem Bretterboden (dem sogenannten Reißboden) in natürlicher Größe auf und verfährt dabei ganz so, wie wir es hier auf dem Papiere gezeigt haben, nur mit dem Unterschiede, daß man die zu übertragenden Maße nicht mit dem Zirkel, sondern mit dem Fußmaßstabe nimmt.

§. 25.

Zeichnung einiger Netze von Oberflächen, die bei Bauten oft vorkommen.

Aufgabe. Das Netz eines Prisma zu zeichnen, dessen Grundfläche ein Dreieck ist.

Auflösung. (Taf. 3 Fig. 52.) Es sei **A′ B′ C′ F′ G′ H′** das Prisma. Man zeichne das Rechteck **A C H F**, setze hieran die beiden Dreiecke **F G H** und **A B C**, alsdann verlängere man **A C** und **H F** willkürlich lang nach beiden Seiten und mache die Linien **C D**, **F E**, **H J**, **K A** gleich einer Seite der Dreiecke (wenn diese wie hier gleichschenklig sind), so hat man das verlangte Netz, und wenn man die Flächen gegen einander legt, erhält man das Prisma **A′ B′ C′ H′ G′ F′**.

Es stellt diese Figur die Gestalt eines gewöhnlichen Satteldaches dar.

Anmerkung 1. Das Netz eines Cubus oder Würfels wird gefunden, wenn man (Taf. 3 Fig. 53) das Grundquadrat **O L H C** zeichnet, an dieses setzt man die vier Seitenquadrate **A B C O**, **L H J K**, **C D G H**, **L O N M** und endlich das Quadrat **D E F G**, welches die obere Fläche des Cubus bilden wird, wenn man die Seitenflächen senkrecht aufklappt und das Quadrat **D E F G** wagerecht darüber legt.

Diese und die folgenden Netze kann man sehr leicht aus Papier oder Pappe schneiden und sich so das Verfahren verdeutlichen.

Anmerkung 2. Man soll das Netz eines Cylinders zeichnen. (Taf. 3 Fig. 54.) Der Kreis **A** ist die obere Fläche des Cylinders, der eben so große Kreis B die untere Fläche desselben. Die Linie **H G** zeigt die Höhe des Cylindermantels an.

Nun mache man **H D**, **H C**, **G E** und **G F** so lang als die Abwickelung des halben Umfanges eines der beiden Kreise (**A** oder B) nach §. 23 Anmerk. 4. Klappt man alsdann den Mantel C D E F senkrecht in die Höhe, legt ihn um den Umkreis des unteren Kreises B, und deckt endlich den oberen Kreis wagerecht darüber, so hat man den Cylinder.

Anmerkung 3. Man soll das Netz eines Bohlendaches zeichnen, das zugleich ein Satteldach ist. Es sei (Taf. 3 Fig. 55) das Dreieck A B C der gegebene Durchschnitt des Bohlendaches, so zeichne man sich erst das Rechteck **A′ B′ F′ E′**, welches den Grundriß des Daches nach seiner Länge und Breite darstellt.

Um die schmalen Seiten (Giebelseiten) dieses Rechteckes setze man die beiden Dreiecke **A′ B′ D′** und **E′ F′ G′**, jedes eben so groß wie **A B D.** Alsdann zeichne man an das Rechteck auf der Seite **A′ E′** ein Rechteck **A′ H′ J′ E′**, wovon die Seiten **A′ H′** und **J′ E′** so lang sind, als die Abwickelung **D B** (oder **A D**) des krummlinigen Dreiecks **A B D**; ferner ziehe man die Linie **H′ J′**, so ist das Rechteck **A′ H′ J′ E′** die eine Seitendachfläche. Die andere Seitendachfläche B′ K′ L′ F′ findet man eben so, wie man **A′ H′ J′ E′** gefunden hat.

Klappt man nun die beiden Giebeldreiecke senkrecht in die Höhe und die Seitenflächen so darüber hin, daß die Kanten der Seitenflächen K′ L′ und H′ J′ oben zusammenstoßen, so erhält man das verlangte Netz des Bohlendaches.

Anmerkung 4. Man soll das Netz einer vierseitigen Pyramide zeichnen. (Taf. 3 Fig. 56.)

Zuerst zeichne man die quadratische Grundfläche **A B E G**, dann setze man an die vier Seiten derselben die vier Dreiecke A C B, **B D E**, **E F G**, **G H A**, biege dieselben alsdann so zusammen, daß sie mit ihren Spitzen über dem Punkte **J** zusammentreffen, so hat man das verlangte Netz.

Man sieht, daß es zugleich das Netz eines sogenannten ganzen Walmdaches ist, an welchem man (wenn es nach einem bestimmten verjüngten Maßstabe aufgetragen ist) die Längen der Gradsparren und Schifter bequem zu finden im Stande ist.

Anmerkung 5. Man soll das Netz eines ganzen Walmdaches zeichnen, dessen Grundfläche und Höhe gegeben ist. (Taf. 3 Fig. 57.)

Es sei das Rechteck B G J O der Grundriß des Walmdaches nach verjüngtem Maßstabe. Zieht man in diesem Rechtecke die Mittellinie **V W** und macht auf dieser **V S = V O = V B** und **R W = J W = G W**, so sind S und **R** die Projectionen der oben darüber liegenden Anfallspunkte der Walme. Trägt man nun an die verlängerte Mittellinie **V W** die senkrechte Höhe des Daches **V A** und **W H** und vollendet die Dreiecke **A B O** und **G H J**, so hat man die beiden Giebelwalmflächen gefunden. Nun verlängere man beliebig die Linien **P T** und **Q U** (welche parallel mit den Linien O B und **J G** gezogen sind) nach oben und unten und mache **M O = O A**, **B D = B A**, ferner **L J = J H** und **H G = G E**, so sind, wenn man endlich noch **M** mit **L** und **D** mit **E** verbindet, die beiden Trapeze **O M L J** und **B D E G** die beiden Seitenflächen des Daches.

Klappt man nun die beiden Dreiecke so weit herüber, daß der Punkt **A** über **S** und **H** über **R** zu liegen kommt und daß die oberen Kanten der beiden Trapeze, **D E** und **M L**, einander oberhalb berühren, so hat man das Netz eines ganzen Walmdaches von sonst regelmäßiger Form.

Anmerkung 6. Man soll das Netz eines Giebeldaches zeichnen, wenn der Grundriß ein Trapez ist.

Es sei (Taf. 3 Fig. 58) das Trapez **A B C D** der gegebene Grundriß des Daches und **E F** die Mittellinie desselben. Man nimmt nun die Hälfte der Linie C B = C F und setzt diese als Grundlinie C′ F′ des Dreieckes (Z), setzt ferner auf diese Grundlinie die senkrechte Dachhöhe **F′ G′** und zieht **G′ C′**, so ist **G′ C′** die Höhe der Seitendachflächen; nimmt man nun die Länge der Linie C′ G′ und zieht mit dieser Entfernung die parallelen Linien **J L** und **K M** beliebig lang, so werden diese Linien auf beiden Seiten die Breiten der Dachflächen darstellen, da sie so breit sind, als die Sparrenlänge **G′ C′** war. Will man nun noch die Kantenpunkte **J L K M** bestimmen, so zieht man durch **E** und **F** die Normalen **K J** und **L M**, und die Durchschnittspunkte **J L M K** sind die gesuchten. Will man die Giebelflächen finden, so mache man **G D = J D** und **A G = A K**, und man hat in dem Dreieck **A G D** die eine Giebelfläche gefunden. Die andere findet man, wenn man **L C = C N** und **B N = B M** macht, so ist das Dreieck B C N die andere Giebelfläche.

Klappt man nun das Ganze so zusammen, daß oberhalb die Punkte **K G J** und **L M N** zusammenfallen, so hat man das verlangte Netz gefunden.

Anmerkung 7. Man soll das Netz zu einem Dache wie Taf. 3 Fig. 59 finden, wenn dasselbe ganze Walme hat.

Es sei in dem Dreiecke Fig. (Z) C′ F′ die halbe Tiefe des Gebäudes, **F′ G′** die senkrechte Höhe des Daches, so ist C′ G′ die Sparrenlänge der Seitenflächen.

Zieht man nun mit **O J** die Parallele **M L** in der Entfernung = C′ G′, und eben so mit B G die Parallele **D E** in der Entfernung = C′ G′, so bestimmen die Räume zwischen beiden Parallelen die Höhen der Seitenflächen.

Zieht man nun durch die Anfallspunkte **R** und **S** die Normalen **M D** und **L E**, so sind die Punkte **M L D E** diejenigen, welche zusammengeklappt über **R** und **S** fallen. Da hier die Walme schief sind, so muß die Länge eines jeden Grades eine andere sein.

Die Gradlänge über **O S** findet man, wenn in dem Dreiecke (Z′) **O′ S′** (die Grundlinie) = **O S** gemacht wird; macht man nun **S Y** = der senkrechten Dachhöhe und zieht **O′ Y**, so ist **O′ Y** die Gradlänge über **O S**. Beschreibt man nun mit der Länge **O′ Y** aus **O** einen Kreisbogen, sucht dann die Gradlänge über B C auf gleiche Weise aus dem Dreieck (Z″) und beschreibt mit B″ Y den andern Kreisbogen aus B, so ist das Dreieck **B A O** die gefundene Walmfläche. Die entgegengesetzte **J H G** findet man eben so.

Anmerkung 8. Sollte man ein eben solches Dach wie in Anmerk. 7, nur mit einer Wiederkehr, zeichnen (Taf. 3 Fig. 60), so verfährt man ganz wie in Anmerk. 7. Es tritt nur hier der Fall ein, daß die Seitenfläche **N K L P** über eine andere fortfällt. Will man demnach das Modell wirklich aus Pappe schneiden, so muß man dieses Stück besonders aufzeichnen, ausschneiden und ansetzen.

Anmerkung 9. Ist ein Gebäude auf einem Giebel breiter als auf dem andern, wie Taf. 3 Fig. 61, so theilt man die schmalste Giebelseite in zwei gleiche Theile, $AM = MB$; durch den Mittelpunkt M zieht man MN parallel mit BX, so ist MN die Projectionslinie des Dachfirstes. Nun suche man die Sparrenlänge, indem man in dem Dreiecke (Z′) $M'B' = MB$, $B'H' =$ der senkrechten Dachhöhe macht. Dann ist M′H′ die Sparrenlänge, diese setze man von B nach P und von X nach O und ziehe OP, so ist XOPB die eine Dachfläche. Um die Dachfläche auf der schiefen Seite zu bestimmen, zieht man aus M eine Normale auf VA und setzt die Sparrenlänge M′H′ aus A nach Y. Eben so wird eine Normale aus V auf VA gezogen und die Sparrenlänge VZ aus V nach Z gesetzt. Diese Sparrenlänge findet man folgendermaßen. Man macht in dem Dreiecke (Z″) $V'N' = VN$ als Grundlinie, $X'N' =$ der bestimmten senkrechten Dachhöhe und zieht V′X′, so ist dies die gesuchte Sparrenlänge.

Anmerkung 10. Nach den bisher angegebenen Verfahrungsarten wird man leicht die Modelle auch für verwickelte Dachformen herausfinden, da sich dieselben in ihren einzelnen Stücken immer auf einen der angeführten Fälle werden zurückführen lassen; eben so wird man nun auch im Stande sein, alle Arten **halber Walme** zu finden, was man zur Uebung thun kann.

§. 26.

Aufgabe. Es soll der Grundriß, Aufriß und Durchschnitt einer hölzernen Fachwand gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 62.)

Auflösung. Denkt man sich, wie es in der Natur wirklich der Fall ist, die sämmtlichen Holzstücken, aus denen die Holzwand besteht, von gleicher Breite und Stärke, so sind sie sämmtlich prismatische Figuren, und es kommt demnach nur darauf an, diese Prismen je nach ihrer gegebenen Länge und ihrer Lage gegen und über einander nach dem verjüngten Maßstabe auf dem Papiere aufzutragen.

Das unterste Holz der Wand, die sogenannte Schwelle, ist ein wagerechtes Prisma, im Grund- und Aufriß mit A B bezeichnet.

Da es nun ein wagerechtes Prisma ist, so wird im Grundrisse die Projection seiner oberen Fläche ein längliches Viereck A B sein. (§. 15 Anmerk. 4.)

Aus demselben Grunde wird ihr Aufriß ebenfalls ein längliches Viereck A′ B′ sein.

Die senkrechten Stiele C D E F im Grundrisse erscheinen im Grundrisse als Vierecke, die so groß sind, wie die obere oder untere Fläche der Prismen, die sie bilden. Die Stiele sind im Grundrisse durch C D E F bezeichnet. (§. 15 desgl.) Im Aufrisse erscheinen sie als längliche Vierecke (§. 15 desgl.) und sind mit C′ D′ E′ F′ bezeichnet. Man erhält sie aus dem Grundrisse, wenn man die Seitenlinien der Stiele normal und beliebig lang über der Schwelle im Aufrisse in die Höhe zieht. Bestimmt man nun durch den verjüngten Maßstab die Höhe der Stiele, so hat man dieselben gefunden.

Quer über den Stielen, in gleicher Ebene mit der Schwelle liegt der sogenannte Rähm, im Aufrisse G′ H′. Derselbe wird im Aufrisse ebenfalls als längliches Viereck erscheinen. Im Grundrisse

würde derselbe unmittelbar über die Schwelle treffen und die Stiele verdecken. Man pflegt ihn daher im Grundrisse nur dann zu zeichnen, wenn (wie bei Balkenlagen) seine obere Ansicht sichtbar wird.

Es muß hier ein für allemal bemerkt werden, daß bei Bauzeichnungen viele solche Fälle vorkommen, wo die Projection eines Körpers die eines andern verdeckt; um nun die **wesentlichen** Projectionen sichtbar zu lassen (damit man sie messen kann), läßt man in allen diesen Fällen die **unwesentlichern** Projectionen fort, wie es z. B. hier mit dem Rähme im Grundrisse der Fall ist.

Man wird nun im Grundrisse bei J und K zwei schmale Vierecke bemerken, dies sind die Projectionen der Zapfenlöcher für die sogenannten Streben. Im Grundrisse werden diese Streben nicht weiter angedeutet. Im Aufrisse sind sie mit J′ und K′ bezeichnet. Ihre schräge Stellung erhält man, wenn man sie oben im Rähm und unten in der Schwelle um etwa 3—6 Zoll entfernt von den Stielen anfangen läßt.

Die Streben bilden zwei schräg gestellte Prismen, die mit ihren Zapfen (welche hier nicht sichtbar sind) in Schwelle und Rähm stehen und im Aufriß als längliche Vierecke erscheinen. Nun sind noch die Riegel L′ M′ N′ O′ P′ im Aufrisse zu sehen. Auch diese sind prismatische Hölzer von gleicher Stärke mit Schwellen und Stielen. Sie erscheinen deshalb im Aufrisse mit ihrer Seitenansicht, ebenfalls wie die übrigen Hölzer, als längliche Vierecke.

Im Grundrisse werden sie eben so wenig wie die Streben angegeben, da sie die Schwelle verdecken würden und diese als meßbarer Hauptheil mit den Stielen sichtbar bleiben muß.

Wir haben demnach bis jetzt den Grund- und Aufriß einer hölzernen Wand gefunden, wovon die Abmessungen der einzelnen Holzstücken, so wie ihre Stellung als vorausbestimmt angenommen war.

Nun soll der Durchschnitt dieser Wand bestimmt werden. Zu diesem Zwecke denke man sich sowohl durch den Aufriß als durch den Grundriß eine senkrechte Ebene gelegt, deren Durchschnittslinie hier durch die punktirte Linie Q R angedeutet ist. Im Grundrisse wird der Durchschnitt der Schwelle als ein Rechteck erscheinen, dessen Seiten so groß als die Breite und Höhe der Schwelle sind.

Im Aufrisse wird der Durchschnitt der Wand so breit werden, wie die Stärke der Stiele ist. Man trage demnach die Stärke der Stiele (oder die Breite der Schwelle, was hier einerlei ist) bei A″ hin und ziehe zwei senkrechte Linien, welche so weit von einander abstehen, als die Breite der Schwelle beträgt, so hat man die Breite des Durchschnittes der Wand.

Wenn man nun im Aufrisse die Höhen der Schwelle, der Riegel und des Rähmes herüber punktirt, so findet man bei A″ die Schwelle im Durchschnitt, bei C″ den Riegel im Durchschnitt und bei B″ den Rähm im Durchschnitt. Die senkrechten Linien des Durchschnittes aber zeigen die Länge und Breite desselben an. (§. 7 und §. 14.)

Man kann zur Uebung den Grundriß schräg stellen und dann den Aufriß und Durchschnitt suchen; man wird alsdann nicht nur die Breiten, sondern auch die Stärken der Hölzer in ihrer senkrechten Projection sehen.

§. 27.

Aufgabe. Ueber einem senkrecht stehenden Stiel liege ein wagerechter Rähm und quer über diesem ein ebenfalls wagerechter Balken, man soll davon den Grund- und Aufriß finden.

Auflösung. Es sei (Taf. 3 Fig. 63) A ein Stiel im Grundrisse, so wird er als Rechteck erscheinen. (§. 26.) Quer über diesem liege ein Rähm B C von unbestimmter Länge, aber eben so breit, wie der Stiel, so werden die beiden Linien bei B C seine Richtung, und ihre Entfernung dessen Breite anzeigen.

Quer über diesem Rähm liege der Balken **D E**, ebenfalls unbestimmt lang, durch die beiden parallelen Linien bei D und E seiner Breite nach begrenzt, so ist der Grundriß fertig.

Zeichnet man nun (§. 26) den Stiel bei A′ im Aufrisse und giebt ihm nach dem verjüngten Maßstabe diejenige Länge, welche er haben soll, so kann man queer darüber den Rähm B′ C′ zeichnen. Der Balken **D E** des Grundrisses wird aber mit seiner vorderen Fläche in der Projection erscheinen, wie bei D′ zu sehen.

Um nun den Rähm vom Stiele aus zu unterstützen, zeichne man die beiden Bänder F′ und G′, welche im Grundrisse nicht sichtbar sind, da sie vom Rähme B C verdeckt werden.

Ferner ist bei H′ ein Zapfenloch angedeutet, welches einem Bande angehört, das vom Stiele aus nach dem Balken hinaufgeht. Dieses Band wird in seiner vorderen Ansicht nicht gezeichnet. Eben so wenig sieht man das ihm entgegenstehende Band auf der anderen Seite des Stieles, da der Stiel selbst es verdeckt.

Nun hat man den Aufriß von vorn gesehen gefunden; man soll aber noch den Aufriß von der Seite gesehen suchen.

Zu diesem Ende zeichnet man sich den Stiel A″ in der Seitenansicht, punktirt die Höhe des Rähmes B′ C′ aus der vorderen Ansicht herüber, so wird der Rähm hier nur in seiner vorderen Ansicht erscheinen, wie bei B″ gezeigt ist.

Nun punktire man aus der vorderen Ansicht die Höhe des Balkens D′ herüber und ziehe E″ D″ und die dazu gehörige untere Parallele, so hat man die Seitenansicht des Balkens, welcher hier nach seiner Länge erscheint.

Punktirt man nun von H′ herüber, so findet man die Anfänge der beiden Bänder J″ und K″, welche aus dem Stiele in den Balken gehen, und wovon man in der vorderen Ansicht nur das Zapfenloch H′ zu sehen bekam.

Nun ziehe man von den Bändern F′ und G′ die punktirten Linien herüber, so findet man das Zapfenloch G″. Zur Uebung stelle man den Grundriß schräg und suche davon die Ansicht.

§. 28.

Aufgabe. Man soll Grundriß, Aufriß und Durchschnitt einer Fensteröffnung zeichnen, die in einer massiven Mauer liegt.

Auflösung. (Taf. 3 Fig. 64.) Es befinde sich unter der Grundlinie **a b** der senkrechten Ebene der Grundriß einer Fensteröffnung nach dem verjüngten Maßstabe in gegebenen Maßen gezeichnet; **G D E H** sei der Anschlag nach außen; **H O E M** die Breite der Fensterbrüstung, so weit sie voll gemauert wird, und der ganze Raum **L F J H** sei die innere Fenstervertiefung; man soll zuerst den über dieser Zeichnung befindlichen Durchschnitt zeichnen.

Zu dem Ende denke man sich durch die Mitte des Grundrisses eine senkrechte Durchschnittsebene gelegt, deren Grundlinie die punktirte Linie A C ist.

Nun ziehe man von den Punkten A B N C des Grundrisses über der Grundlinie normale Linien willkürlich lang und bestimme nach dem verjüngten Maßstabe zuerst die Höhe R′ A = 3 Fuß, dann A′ A″ = 7 Fuß, dann B″ P′ = $\frac{1}{2}$ Fuß, dann B′ Q′ abwärts = $\frac{1}{2}$ Fuß, und ziehe die Wagerechten A′ B′, Q′ N′, A″ B″, P′ F″, bestimme endlich die obere Schlußlinie V′ W′, so ist der Durchschnitt gefunden.

Den Aufriß findet man, wenn man von den Durchschnittspunkten wagerechte Linien beliebig lang zieht, dann aus dem Grundrisse von der Mittellinie rechts und links die entsprechenden Breiten einträgt und die gefundenen Punkte durch Linien verbindet, wie die Figur des Aufrisses hier zeigt. Die entsprechenden Punkte sind in allen drei Zeichnungen, dem Grundrisse, Aufrisse und Durchschnitte möglichst mit einerlei Buchstaben bezeichnet worden, um das Auffinden zu erleichtern.

Daß man bei Projectionszeichnungen nicht immer alle Punkte zeichnen kann, sieht man an dem vorliegenden Grundrisse recht deutlich; denn es ist in ihm nur der ganze untere Theil des Fensters angegeben. Die oberen Fensterpunkte fallen aber, da sie alle in normal auf den unteren Punkten stehenden Linien sich befinden, mit den unteren Punkten zusammen, so daß, wenn man diese erst gefunden hat, man auch leicht im Stande ist, die oberen Punkte zu finden.

§. 29.

Aufgabe. Es soll ein einzelner Stein aus einem Tonnengewölbe gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 65.)

Auflösung. Unter einem Tonnengewölbe versteht man bekanntlich ein Gewölbe, welches (gewöhnlich halbkreisförmig) über einen Raum geschlagen ist, dessen Mauern parallel mit einander in gerader Linie fortlaufen, wie aus dem Grundrisse der Fig. 65 ersichtlich.

Die Fugenschnitte der einzelnen Steine eines solchen Gewölbes gehen alle verlängert nach dem Mittelpunkte der Halbkreisebene, an welche diese Fugenschnitte stoßen. So ist im Aufrisse für den einzelnen Stein A′ B′ D′ C′ der Mittelpunkt J′ zugleich derjenige Punkt, wonach die Lagerfugen A′ C′ und B′ D′ bestimmt werden. Die Stoßfugen werden durch normale Flächen gebildet, unter welchen jeder einzelne Stein des Gewölbes an den andern der Länge nach anstößt.

Es sei der Stein A′ C′ D′ B′ im Aufrisse gegeben, man soll seinen Grundriß finden.

Zu diesem Zwecke ziehe man von den Endpunkten des Steines abwärts die punktirten normalen Linien, so muß der Raum zwischen diesen die äußerste Breite der Projection des Steines bestimmen.

Die Länge des Steines im Grundrisse **A E** und **H D** ist nun nach dem verjüngten Maßstabe willkürlich festzusetzen. Es wird demnach die Figur **A D H E** des Grundrisses die Projection des gesuchten Steines sein. Die Buchstaben A C B D im Grundrisse stimmen mit denen des Aufrisses A′ C′ B′ D′ überein, woraus man die Lage der Punkte im Grundrisse genau zu übersehen im Stande ist. Neben dem Grundrisse ist der Stein A″ B″ F″ H″ D″ E″ G″ C″ einzeln ausgetragen, wobei die Buchstabenbezeichnung der einzelnen Punkte mit der des Grund- und Aufrisses wieder übereinstimmt.

Die Längen des Steines B″F″, D″H″, C″G″ werden aus dem Grundrisse entnommen und = BF, DH, CG gemacht.

Wäre die Aufgabe umgekehrt gestellt, daß man nämlich aus dem Grundrisse den Aufriß bestimmen soll, so muß die Größe des Steines AEHD im Grundrisse bestimmt sein. Alsdann zieht man von dessen Kanten nach oben normale Linien, bis diese den Durchschnitt des Gewölbes treffen, so findet man den Punkt A des Grundrisses in A′ des Aufrisses, C in C″ ꝛc. Aus dem Gesagten wird klar, daß man auf diese Weise jeden beliebigen Stein des Gewölbes, sowohl im Aufrisse als im Grundrisse, finden kann, je nachdem einer von beiden bestimmt wurde.

In dem vorliegenden Falle ist, wie sich wohl von selbst versteht, von einem Schnittsteingewölbe die Rede, und nicht von einem solchen, welches mit gewöhnlichen Mauersteinen gewölbt wird, da bei diesem die Mauersteine nur nothdürftig in die Form der Gewölbesteine gehauen werden und die Ausfüllung der Fugen mit Mörtel alsdann das beste zur Erreichung der vorgeschriebenen Form und der Haltbarkeit thun muß.

Gewöhnlich sind dergleichen Schnittsteingewölbe der größeren Leichtigkeit wegen im Scheitel dünner als unten, wo sie anfangen, hier aber ist das Gewölbe überall gleich stark angenommen, um das Aufsuchen der Steine noch mehr zu erleichtern.

§. 30.

Aufgabe. Es soll ein sogenannter Drehling (Taf. 3 Fig. 66) im Grund- und Aufriß gezeichnet werden.

Auflösung. Unter einem Drehlinge versteht man bekanntlich einen Maschinentheil, welcher aus einer Welle besteht, um welche zwei kreisrunde Scheiben in einiger Entfernung von einander liegen, die durch eine bestimmte Anzahl cylindrischer Stäbe verbunden sind.

Betrachtet man den Grundriß, so ist der größte Kreis CD der Grundriß der Scheibe C′D′ des Aufrisses. E ist die Welle und die einzelnen kleinen Stäbe sind durch die kleinen Kreise am Rande des großen angedeutet. Da im Aufrisse alle einzelnen Theile Cylinder sind, so sind die Grundrisse davon überall Kreise. (§. 17.)

Es tritt hier wieder ein solcher Fall ein, daß man, um den Grundriß meßbar und deutlich zu erhalten, nicht Alles hinein zeichnen kann. Denkt man sich die Projection des Drehlings genau, so müßte man eigentlich die Projection des oberen Cylinders AB zeichnen, welche alsdann nichts weiter sein würde, als ein Kreis von dem Durchmesser A′B′. Die einzelnen kleinen Stäbe würden alsdann verdeckt sein; da aber eben diese ein Haupttheil des Drehlings sind, so denkt man sich durch den Aufriß bei G′H′ eine wagerechte Ebene gelegt und auf diese sämmtliche Projectionen genommen, wo alsdann der Grundriß in seiner jetzigen Gestalt erscheinen wird.

Hat man den Grundriß und will daraus den Aufriß finden, so zeichne man zuerst die Welle, dann bestimme man den *Abstand* der beiden Scheiben A′B′ und C′D′ nach dem verjüngten Maßstabe, eben so ihre Stärke, und ziehe alsdann aus dem Grundrisse die normalen Projectionslinien der einzelnen Stäbe, von den kleinen Kreisen aufwärts.

Von diesen Stäben wird man nur die vordere Hälfte sehen, da die hinteren Stäbe durch die vorderen verdeckt werden. In seknrechter Stellung hat die Zeichnung keine Schwierigkeit.

Anmerkung 1. Liegt der Drehling mit seiner Wellenachse wagerecht, so werden Grund und Aufriß gleiche Ansichten gewähren. (Taf. 3 Fig. 67.)

Anmerkung 2. Zur Uebung kann man wie in Taf. 3 Fig. 68 den Drehling in schräger Lage gezeichnet annehmen. Der Aufriß ist alsdann ganz leicht, man bringt nur den Aufriß aus Fig. 67 oder 66 in diejenige schräge Lage, welche der Drehling haben soll, und sucht dann nach §. 17 die Grundrisse sämmtlicher Cylinder, der Welle, der Scheiben, der Stäbe, einzeln.

Anmerkung 3. Zur weiteren Uebung kann man noch annehmen, daß der Cylinder nicht bloß im Aufrisse eine bestimmte Neigung gegen die wagerechte Ebene habe, sondern daß auch die Achse des Grundrisses unter einem beliebigen Winkel gegen die senkrechte Ebene stehe, wodurch die Aufgabe schon bedeutend zusammengesetzter wird und hauptsächlich nach §. 14 Anmerk. 4 und §. 17 Anmerk. 2 zu lösen ist.

Es muß hier nochmals auf das dringendste empfohlen werden, die Figuren auf einem besonderen Brette nicht blos abzuzeichnen, sondern Punkt für Punkt zu suchen, weil man durch die bloße Anschauung der Figuren, wenn man auch Alles vollkommen verstanden hat, doch niemals im Stande sein wird, die allergeringste Aufsuchung einer gegebenen Projection zu finden.

Auch wird sehr empfohlen, die Aufgaben selbst beliebig zu verändern oder auch sich selbst neu erfundene zu geben und diese zu lösen.

§. 31.

Aufgabe. Es soll ein Schornstein im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden, wie er über die schräge Dachfläche hinausreicht. (Taf. 3 Fig. 69.)

Auflösung. Es sei im Grundrisse der Schornstein ABCD gegeben, so ziehe man von seinen Seitenkanten die Normalen BB′, AA′ beliebig lang über die oben in der Ansicht gezeichnete schräge Giebelfläche hinauf; alsdann setze man nach dem verjüngten Maßstabe von A′ und B′ im Aufrisse die bestimmte Höhe des Schornsteins aufwärts, ziehe die wagerechten Bekrönungsglieder, so ist die Aufgabe gelöst.

Dasselbe gilt für den an der Seite der Dachfläche herauskommenden Schornstein, welcher im Grundrisse mit EFHG bezeichnet ist.

Anmerkung 1. Soll man die Seitenansicht dieser Schornsteine zeichnen, so verlängere man sämmtliche wagerechte Linien der gefundenen Schornsteine beliebig lang seitwärts, bestimme die Stellung des Schornsteines ABCD, welcher auf dem First sich befindet, trage seine Breite von B″ nach C″ und ziehe von diesen Punkten senkrechte Linien, so hat man den gesuchten Schornstein gefunden.

Wollte man nun auch den andern Schornstein suchen, welcher mit EFHG bezeichnet ist, so verfahre man im Aufrisse ganz eben so, trage die Breite des Schornsteins von H″ nach F″ und ziehe von diesen Punkten aufwärts wieder senkrechte Linien, so ist die Aufgabe gelöst.

Zur Uebung kann man den Grundriß schräg stellen und alsdann die Giebel, Seitendachflächen und Schornsteine suchen.

§. 32.

Aufgabe. In einer halbkreisförmigen Nische (Taf. 3 Fig. 70) sollen Linien auf der gebogenen Fläche gezeichnet werden, welche vom untern Anfange der Krümmung bis zum Scheitel hinaufsteigen.

Auflösung. Es sei die Nische im Grundrisse gegeben, so zeichne man sich darüber den Aufriß und neben diesem den Durchschnitt wie in Fig. 70 angegeben. Um nun die gesuchten Linien zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Es leuchtet ein, daß wenn man im Stande ist, eine dieser Linien zu finden, man sie alle finden kann, da sie alle einerlei Gesetz folgen. Zur Bequemlichkeit sind wieder die Buchstaben zur Bezeichnung der Punkte in den Zeichnungen gleichlautend angenommen worden.

Es soll nun zuvörderst die Linie **FSTUC** gefunden werden.

Man theile den Quadranten des Durchschnittes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, G″J″, J″K″, K″L″, L″M″, und ziehe von diesen Punkten aus wagerechte Linien R′L′ 2c. durch die vordere Ansicht der Nische, so kann man sich diese Linien auch als die Projectionen von solchen Halbkreisebenen denken, welche die hohle Fläche der Nische nach den Richtungen R′L′, O′K′ 2c. berühren. Oder, was dasselbe ist, man kann sich diese geraden Linien als die Projection derjenigen krummen Linien denken, welche wagerecht an der Krümmung der Nische hinlaufen.

Nimmt man nun im Aufrisse den Radius **V′R′** und beschreibt damit im Grundrisse den Halbkreis **RUVL** aus dem Mittelpunkte C, so ist dieser Halbkreis die Projection der geraden Linie **R′V′L′** im Aufrisse.

Eben so findet man den Halbkreis **OTWK** im Grundrisse als Projection der geraden Linie O′K′ des Aufrisses.

Eben so den Halbkreis **PSZJ** als Projection der geraden Linie **P′J′** des Aufrisses, und eben so ist endlich der Halbkreis BFGHD die Projection der Grundlinie O′N′ des Halbkreises im Aufrisse. Nun wird ferner jeder beliebige Punkt, welcher im Grundrisse, z. B. in dem Halbkreise **RUVL** liegt, im Aufrisse in die Linie **R′L′** fallen. Es sei im Grundrisse der Punkt **U** im Halbkreise **RUVL** gegeben, man soll seine Projection im Aufrisse finden, so ziehe man die Normale **UU′**, so ist **U′** der gesuchte Punkt.

Eben so findet man die Projection des Punktes **T** in **T′**, des Punktes **S** in **S′**, des Punktes **F** in **F′**. Verbindet man nun die gefundenen Punkte im Aufrisse durch eine krumme Linie **F′S′T′U′M′**, so ist diese Linie die Projection der Linie **FSTUC** im Grundrisse.

Eben so wie man diese einzelne Linie gefunden hat, kann man jede beliebige andere finden. Die Linie **GZWVC** im Grundrisse z. B. wird, wenn man sie im Aufrisse sucht, keine krumme, sondern eine senkrechte, gerade werden, da die Projectionspunkte, wenn man die Normalen von den einzelnen Punkten zieht, alle in einer senkrechten Linie zusammenfallen.

Eben so findet man die Projection der Linie **HC** des Grundrisses im Aufrisse als die krumme Linie **H′M′**, welche mit der entgegengesetzt gekrümmten **F′S′T′U′M′** ganz gleich gekrümmt ist.

Je mehr Halbkreise man im Grundrisse annimmt und in je mehr Theile man folglich den Quadranten des Durchschnittes theilt, um so genauer findet man die gekrümmten Linien des Aufrisses.

Zur Uebung kann man den Grundriß schräg stellen und dann den Aufriß suchen.

§. 33.

Aufgabe. Es sollen an einem kreisrunden Thurme Thüre und Fenster im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 71.)

Auflösung. Wenn der Thurm kreisrund ist und senkrecht in der wagerechten Ebene steht, so wird sein Grundriß aus zwei concentrischen Kreisen bestehen, deren Abstand von einander die Stärke der Thurmmauer anzeigt.

Es sei diese Thurmmauer im Grundrisse zur Hälfte gezeichnet.

Der Radius **CA** sei die Mittellinie der Thüre, die Radien **CB** und **CD** seien die Mittellinien der Fenster. Thüren und Fenster sollen mit halbkreisförmigen Bögen zugewölbt sein und man soll diese Wölbungen im Aufrisse suchen. Betrachtet man das Fenster, wozu der Radius **CD** die Mittellinie bildet, im Grundrisse, so ist seine äußere Umrißlinie eine gebogene. Diese Umrißlinie ist aber zugleich der Durchmesser des Halbkreises, welcher die Wölbung des Fenstersturzes ausmachen soll; es wird also der Halbkreis eine doppelt gekrümmte Linie sein, einmal hat er die Krümmung des Halbkreises selbst, dann aber auch noch die Krümmung der äußeren Umrißlinie des Thurmes.

Um nun die Projection davon zu finden zeichne man sich auf die Linie **ab** die Aufwickelung der äußeren Fensterbreite (§. 23 Anmerk. 4), so ist diese der Durchmesser der darüber beschriebenen Halbkreisöffnung. Zieht man in diesem Halbkreise mehrere normale Linien vom Durchmesser bis zum Umkreise und in gleich weiten Abständen vom Mittelpunkte, so erhält man am Umkreise des Halbkreises mehrere bestimmte Höhenpunkte desselben.

Setzt man nun diesen Halbkreis über **ab** im Aufrisse auf diejenige Linie **gab**, welche die Grundlinie für die Anfänge der Halbkreisbögen ist, und zieht von den Höhenpunkten des Halbkreises wagerechte Linien herüber, so werden durch dieselben die Höhenpunkte für die Projection der Fensterwölbung bestimmt.

Nun ziehe man aus dem Grundrisse die Normalen von dem Eck- und Mittelpunkte der äußeren Fensteröffnung hinauf, so erhält man die Breite der Projection der Wölbung und ihre höchste Höhe. Um nun auch die andern Höhenpunkte zu finden, theile man in der Grundrißlinie von deren Mittelpunkte rechts und links die Oeffnungslinie in eben so viele gleiche Theile, als den Durchmesser **ab** des Halbkreises (hier in zwei). Nun ziehe man von diesen Theilpunkten normale Linien bis in den Aufriß hinauf, wo sie die wagerechten, vom Halbkreise aus gezogenen Linien treffen werden, dort sind die Projectionspunkte des Gewölbebogens. Je mehr Höhenpunkte man im Umrisse des Halbkreises annehmen wird, um so genauer findet man die Wölbungslinie.

Eben so wie man den vordersten Halbkreis gefunden hat, eben so findet man den zweiten dahinter liegenden; eben so auch den dritten, der die innere Kreislinie des Grundrisses überwölbt, nur mit dem Unterschiede, daß für diese Wölbung eine besondere Aufwickelung und ein besonderer Halbkreis gesucht werden muß, da die Wölbung breiter und höher wird.

So wie man nun eine dieser Gewölbeprojectionen gefunden hat, findet man nach und nach alle. Diejenigen Projectionen, welche von der Mittellinie gleich weit abstehen, sind einander gleich, wie hier die Fenster, und wenn man eine dieser Projectionen gefunden hat, kann man die andere darnach copiren, ohne sie erst zu suchen.

§. 34.

Aufgabe. Es sollen zwei in einander steckende Cylinder gezeichnet werden. (Taf. 4 Fig. 72.)

Auflösung. Es stecke der kleine Cylinder A B D C so in dem größern, daß die Achsen derselben normal auf einander stehen und zugleich in einer wagerechten Ebene liegen, so wird, wenn der große Cylinder mit seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene steht, die Achse des kleineren Cylinders parallel mit der senkrechten Ebene liegen, wie die Zeichnung des Aufrisses zeigt.

Setzt man nun neben den Aufriß die Durchschnittsfläche als Kreis und theilt den Quadranten g h desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so erhält man verschiedene Höhenpunkte dieses Quadranten; zieht man von diesen aus wagerechte Linien nach dem großen Cylinder hinüber (wie in der Zeichnung angegeben), so erhält man auf dem großen Cylinder diejenigen Punkte, wo die Höhenpunkte des kleinen Cylinders in dem großen Cylinder einschneiden.

Zieht man nun von diesen Einschneidungspunkten lothrechte Linien bis zur Achse des kleinen Cylinders im Grundrisse, so erhält man diejenigen Linien, in welchen die Einschnittspunkte des kleinen Cylinders in den großen liegen müssen.

Man hat z. B. aus dem kleinen Kreise den obersten Punkt h nach A' hin angeschnitten, so wird h im Grundrisse derjenige Punkt sein, wo der kleine Cylinder am tiefsten in den großen einschneidet. Nun trage man auf der Linie C A des Grundrisses die Stücken c d, d e, e f auf, welche eben so groß sind als die Stücken c d, d e, e f auf dem Radius c g des kleinen Kreises neben dem Aufrisse, alsdann ziehe man aus den Punkten des Grundrisses c d e f wagerechte Linien, bis sie die von oben herabkommenden senkrechten Linien treffen, und bezeichne die erhaltenen Durchschnittspunkte. Ist dies geschehen, so verbinde man aus freier Hand diese verschiedenen Durchschnittspunkte durch die Linie A h, so wird man den einen sichtbaren Quadranten gefunden haben, womit der kleine Cylinder in den großen einschneidet. Die andere Hälfte h C im Grundrisse wird ganz eben so gefunden, und man braucht die gefundene Linie A h im Grundrisse nur von h nach C hinzutragen, so ist die ganze Aufgabe gelöst.

Anmerkung 1. Haben beide Cylinder gleichgroße Querdurchmesser und stecken in gleicher Art, wie vorhin, in einander, daß ihre Achsen normal auf einander stehen, so wird der Punkt h bis in die Mitte des großen Cylinderkreises rücken und die Linien A h, h C im Grundrisse werden gerade Linien.

Zur Uebung kann man die Achsen der Cylinder schräg stellen, wodurch die Aufgabe schon ziemlich verwickelt wird.

Anmerkung 2. (Taf. 4 Fig. 73.) Stände der große Cylinder senkrecht und der kleinere durchschnitte ihn normal, so würde A' der große, B' der kleinere in der vorderen Ansicht sein, und A der große, B der kleinere Cylinder im Grundrisse.

Man muß hierbei bemerken, daß die Projection des kleinen Cylinders auf dem großen im Aufrisse zwar als Kreis erscheint, die Figur aber, welche durch die Berührungspunkte des kleinen Cylinders auf dem großen gebildet wird, ist durchaus kein Kreis, sondern eine ganz andere Linie.

Dies Ineinandergreifen von Cylindern kommt namentlich bei Röhrenwerken der Maschinen sehr häufig vor.

Anmerkung 3. Betrachtet man den Grundriß (Taf. 4 Fig. 72) und denkt sich den großen Cylinder (anstatt daß er hier wagerecht liegt) senkrecht stehend und den kleineren wagerecht darin eingreifend, so wird man die Eingriffslinie A h C des kleinen Cylinders in den großen eben so finden, wie vorhin gezeigt wurde.

§. 35.

Aufgabe. Es sei durch einen Kegel (Taf. 4 Fig. 74) eine Ebene A' C' so gelegt, daß sie mit der einen Seite des Kegels (hier D' B') parallel liegt und die Grundfläche schneidet, man soll im Grundrisse diejenige Linie bestimmen, welche auf der Oberfläche des Kegels durch den Schnitt der Ebene entsteht.

Auflösung. Man theile die Linie C' A' des Aufrisses, welche die Durchschnittslinie der durch den Kegel gelegten Ebene ist, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, C' a' = a' b', = b' d', = d' A'. Es ist hier aber die Entfernung d' A' noch einmal halbirt in e', um einen Theilpunkt mehr zu haben, welcher, wie man weiter unten sehen wird, die Auffindung der gesuchten Linie erleichtert. Die Punkte a' b' d' e' in der Linie C' A' sind alle Mittelpunkte von wagerechten Linien, welche man sich in der durch den Kegel gelegten Ebene A' C' gezogen denken kann. Denkt man sich ferner diese wagerechten Linien so weit nach beiden Seiten verlängert, bis sie den Mantel des Kegels treffen, so hat man nur diese sämmtlichen Durchschnittspunkte aufzusuchen, um die zu suchende Linie im Grundrisse zu bestimmen.

Nimmt man z. B. in der Linie A' C' den Punkt a' an und zieht die Wagerechte K' a' o', so wird der Punkt o' den Abstand von a' bezeichnen, wenn man die Länge a' o' durch den Punkt a' normal auf C' A' nach beiden Seiten so weit verlängert denkt, bis diese Linie den Mantel des Kegels auf beiden Seiten schneidet. Beschreibt man nun mit dem Radius K' O' = C' O' im Grundrisse den Kreis P O Q, so wird in diesem Kreisbogen die Projection desjenigen Punktes liegen, wo die durch a' gezogene Wagerechte den Mantel des Kegels schneidet. (Vergleiche §. 18, besonders Anmerk. 1.)

Fällt man aus a' die Normale $a' a^2 a^3$, so sind die beiden Punkte a^2 und a^3 die gesuchten im Grundrisse. Eben so findet man durch die Normale $b' b^2 b^3$ die beiden Punkte $b^2 b^3$ im Grundrisse.

Ferner durch die Normale $d' d^2 d^3$ die Punkte $d^2 d^3$; sodann durch die Normale $e' e^2 e^3$ die Punkte $e^2 e^3$, und endlich liegt der Punkt A' im Grundrisse in A. Zieht man nun aus freier Hand im Grundrisse die Linie $P a^2 \ldots A e^3 \ldots Q$, so hat man die gesuchte Linie gefunden.

Es braucht wohl nicht erst erinnert zu werden, daß man eben so, wie man für den Punkt a' den Kreis C O gefunden hat, man für den Punkt b' des Aufrisses den Kreis C N u. s. w. zieht, um die Lage der Durchschnittspunkte an dem Mantel des Kreises zu bestimmen. Eben so ist einleuchtend, daß, je mehr man Punkte im Aufrisse in der Linie C' A' annimmt, man auch mehr Kreise im Grundrisse und demnach mehr Bestimmungspunkte erhält, wodurch die Linie **P A Q** im Grundrisse immer genauer gefunden werden kann.

Anmerkung 1. Nachdem man nun die gesuchte Linie im Grundrisse gefunden hat, soll man die ganze Durchschnittsebene, wovon C′ A′ die Mittellinie ist, im Aufrisse zeichnen, und zwar so, daß die ganze Ebene senkrecht steht (Taf. 4 Fig. 75). Zu diesem Zwecke trage man aus Fig. 74 den Radius C′ E′ nach Fig. 75 von C″ nach E″ und von C″ nach D″, so ist D″ E″ die Grundlinie der Ebene, und weil die durch den Kegel gelegte Ebene unten bis an die Mittellinie des Kreises reicht, so ist in diesem Falle in Fig. 75 D″ E″ gleich dem Durchmesser des Grundkreises des Kegels.

Setzt man dann, Fig. 75, in C″ die Normale C″ A″ beliebig lang auf, so ist diese die Mittellinie der Durchschnittsebene.

Nimmt man dann aus Fig. 74 mit dem Zirkel die Länge der Linie C′ A′ im Aufrisse und trägt sie in Fig. 75 von C″ nach A″, so ist A″ der höchste Punkt der Durchschnittsebene.

Man hat demnach bis jetzt die Breite und Höhe der Durchschnittsebene bestimmt.

Um nun die übrigen Punkte zu finden, verfahre man wie folgt.

Man trage aus Fig. 74 die Punkte a′ b′ d′ e′ auf der Linie C′ A′ nach Fig. 75 von C″ aus nach a″ b″ d″ e″. Durch diese Punkte ziehe man parallele Linien mit D″ E″ beliebig lang.

Nun nehme man im Grundrisse Fig. 74 die Linie $a a^2$ und trage sie in Fig. 75 von a″ aus nach beiden Seiten auf die wagerechte Linie auf, so sind die Durchschnittspunkte die gesuchten.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $b b^2$ nach Fig. 75 von b″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $d d^2$ nach Fig. 75 von d″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Zuletzt trage man noch aus dem Grundrisse die Länge $e e^2$ in Fig. 75 von e″ nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Verbindet man nun alle diese in Fig. 75 gefundenen Durchschnittspunkte durch eine krumme Linie, so hat man in der Ebene D″ A″ E″ diejenige Ebene gefunden, welche die Durchschnittsebene des Kegels im Aufrisse Fig. 74 war.

Man nennt die krumme Begrenzungslinie, welche auf die in der gegebenen Aufgabe §. 35 erwähnte Art entsteht, eine Parabel und die ganze Fläche eine parabolische Ebene.

Anmerkung 2. Man kann aber jede parabolische Linie, deren Breite und Höhe gegeben ist, auch noch auf eine andere leichtere Art finden, was namentlich in der Praxis bei Zeichnung von Leerbogen parabolischer Gewölbelinien sehr bequem ist.

Es sei (Taf. 4 Fig. 75) D″ E″ die Grundlinie der parabolischen Ebene gegeben, eben so C″ A″ die Höhe derselben, man soll die parabolische Umrißlinie finden.

Zu diesem Zwecke verlängere man C″ A″ willkürlich und setze die Entfernung C″ A″ noch einmal von A″ nach (8), so daß C″ (8) doppelt so lang wird wie C″ A″ war.

Nun ziehe man D″ (8) und E″ (8), theile diese beiden Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile 1, 2, 3.... Eine Theilung von 8 oder 16 Theilen ist bequem, weil man nur zu halbiren braucht.

Dann bezeichne man die Theilpunkte, wie in der Zeichnung angegeben, auf beiden Seiten verschieden. Ist dies geschehen, so ziehe man Linien von 1 nach 1, von 2 nach 2, von 3 nach 3, ... Wo diese Linien sich durchschneiden, bemerke man die Durchschnittspunkte und verbinde diese durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese die gesuchte Parabel. Man wird finden, daß die auf die zuletzt angegebene Art gefundene Linie ganz mit der zusammenfällt, welche man vorhin (Anmerk. 1) auf ganz andere Art gefunden hat.

§. 36.

Aufgabe. In einer halbkugelförmigen Kuppel sollen sogenannte Casseturen gezeichnet werden.

Auflösung. Es sei Taf. 4 Fig. 76 im Aufrisse und Grundrisse die Hälfte einer solchen Kuppel gegeben. Die Casseturen (Vertiefungen im Gewölbe) seien ebenfalls im Durchschnitte des Gewölbes eingezeichnet, wie im Aufrisse auf der linken Seite zu sehen, so findet man diese Casseturen auf der gekrümmten Fläche sowohl im Aufrisse als im Grundrisse, wenn man folgendes Verfahren beobachtet.

Zuerst theile man sich im Grundrisse die sämmtlichen Mittellinien der Vertiefungen ein. Beiläufig gesagt nimmt man eines guten Verhältnisses wegen mindestens 16 und höchstens 20 Vertiefungen in einer Reihe rings herum an. Ferner sind in dem vorliegenden Beispiele zwar alle Vertiefungen von gleicher Höhe angenommen, um die Zeichnung deutlicher erscheinen zu lassen; dies thut man aber in der Ausführung nicht, dann werden die Höhen der Cassetten nach oben immer kleiner, und zwar so, daß man sie in jeder Reihe so hoch wie breit macht. Sind nun die Mittellinien eingetheilt, so kann man dieselben leicht finden. Im Grundrisse zieht man nur von dem Theilpunkte am Umkreise Radien bis nach dem Mittelpunkte C; wie der Radius A C, so sind diese Radien die Projectionen der in der hohlen Wölbung des Aufrisses laufenden Linien. (§. 32.)

Ferner ziehe man im Aufrisse aus allen Eckpunkten der Vertiefungen, wie sie in der Gewölbstärke links eingezeichnet sind, wagerechte Linien durch die Breite der Kuppel, so hat man durch diese wagerechten Linien die Projectionen von eben so vielen wagerechten Kreislinien erhalten, welche ebenfalls wagerecht an der Krümmungsfläche herumlaufen. Es seien dies im Aufrisse die am mittleren Radius mit 1, 2, 3, 4.... bezeichneten Linien.

Zieht man nun auch von den Eckpunkten der Casseturen in der Gewölbestärke normale Linien nach dem Durchmesser des Grundrisses herunter, so hat man diejenigen Punkte im Grundrisse erhalten, welche die Projectionen der Cassettenbreiten angeben. Zieht man nun aus allen diesen Punkten concentrische Kreise 1, 2, 3, 4...., so liegen zwischen diesen Kreisen sowohl die Breiten der Cassetten als der Steege.

Will man nun die einzelnen Umrisse der Zeichnung bestimmen, so verfährt man bei allen Linien, wie wir es jetzt gleich für die einzelne Linie A C im Grund- und Aufrisse zeigen werden.

Der Punkt A am innern Umkreise der Kuppel liegt im Aufrisse in einer Kreisebene, welche die Projection des Umkreises ist, also im untern Durchmesser der Halbkugel bei A′.

Aus denselben Gründen liegt der Punkt 6 der Linie AC im Grundrisse in der wagerechten Linie 6 des Aufrisses, der Punkt 5 des Grundrisses in 5 des Aufrisses, der Punkt 4 des Grundrisses in 4 des Aufrisses u. s. w. bis zum Punkte C hinauf. Hat man nun eine solche Linie gefunden, so ist man auch im Stande, alle Linien eine nach der andern auf gleiche Weise zu finden.

Nachdem man sich nunmehr von den Mittellinien aus die Breite der Cassetten und der neben ihnen befindlichen Steege am Umkreise des Grundrisses eingetheilt hat, zieht man von diesen Theilpunkten Radien nach dem Mittelpunkte C, wodurch sowohl die Breiten der Cassetten als der Steege bestimmt werden. Durch die im Grundrisse gezogenen concentrischen Kreise werden nun die Höhen der Cassetten bestimmt. Will man nun die einzelnen Cassetten im Aufrisse finden, so braucht man nur aus dem Grundrisse die Eckpunkte jeder einzelnen Cassettenreihe in diejenigen wagerechten Linien des Aufrisses zu tragen, welche mit den Kreisen des Grundrisses übereinstimmen.

Es liegt z. B. die Cassettenreihe, welche im Grundrisse sich zwischen den Kreisen 3 und 4 befindet, im Aufrisse zwischen den wagerechten Linien 3 und 4 u. s. w.

Es bilden aber die Cassetten nicht blos Flächen, sondern sie haben eine bestimmte Tiefe, wie aus den Cassetten hervorgeht, deren Durchschnitt in der Gewölbestärke eingezeichnet ist. Um nun diese Vertiefungen zu finden, braucht man sich blos eine zweite Halbkugel mit der ersteren concentrisch zu denken und für diese ebenfalls die Vertiefungspunkte der Cassetten eben so zu suchen, wie man es bei der ersten Halbkugelfläche gethan. Man wollte z. B. die Vertiefung der Cassette bei B im Grundrisse und B′ im Aufrisse finden.

Im Grundrisse ziehe man von den beiden Vertiefungspunkten Radien nach C, so geben diese die nach oben abnehmende Breite für alle Cassetten der Höhe nach an, also auch für B.

Will man nun die obere und untere Ansicht der Vertiefung in B haben, so ziehe man im Aufrisse in der mittelsten Cassettenreihe, worin B′ liegt, vom Durchschnitte aus wagerechte Linien **F D**, **G E**. Diese geben die Höhenansichten der Vertiefung.

Sucht man nun noch aus dem Grundrisse herauf die Linien in B′, welche die Breiten der Ansichten bestimmen, so findet man nach und nach den ganzen Umriß einer einzelnen Cassetur.

Wie man eine gefunden hat, so findet man auf demselben Wege nach und nach alle, und bei weiterem Verfolg sieht man zugleich, daß sich das Aufsuchen ungemein vereinfacht, da die Radien und Kreise im Grundrisse immer die Breiten und Höhen bestimmen, so wie die wagerechten Linien im Aufrisse ebenfalls alle Höhen angeben und man demnach überhaupt nur die gekrümmten Linien des Aufrisses eine nach der andern aus dem Grundrisse zu suchen braucht.

Zweite Abtheilung.

A. Construction der Schatten.

§. 1.

Einleitung.

Wird ein Körper von der Sonne oder irgend einem andern Lichte beleuchtet, so zeigt er auf seinen Flächen sehr verschiedene Grade der Helligkeit und Dunkelheit, je nachdem diese Flächen dem Lichte mehr zugekehrt oder davon abgewendet sind. Diese Verschiedenheit von hell und dunkel nennt man die Beleuchtung des Körpers.

Wo das Licht am hellsten auf den Körper scheint nennt man die Beleuchtung volles Licht.

Wo die Flächen weniger beleuchtet sind nennt man die Beleuchtung halbes Licht.

Wo kein Lichtstrahl die Fläche unmittelbar treffen kann, da ist der Körper im Halbschatten.

Jeder beleuchtete Körper wirft einen Schatten hinter sich auf die dem ihn beleuchtenden Körper entgegengesetzte Seite, und dieser Schatten heißt der Schlagschatten.

Die **Auffindung** dieser **Schlagschatten** ist diejenige Aufgabe, welche wir im Verfolg zu lösen haben.

Steht ein beleuchteter Körper gegen eine helle Fläche angelehnt (z. B. gegen eine helle Mauer), so werden die von dieser hellen Fläche zurückspringenden Lichtstrahlen die Schattenseite (besonders abgerundeter Körper) einigermaßen erhellen, und diese Erhellung nennt man den Reflex.

Zwischen dem Reflex und dem Halbschatten entsteht bei runden Körpern ein dunkler als der Reflex erscheinender Schattenstreifen, welcher der Mittelschatten heißt.

Legt oder stellt man z. B. einen Cylinder auf oder gegen ein hell beleuchtetes Papier, so wird auf der Schattenseite desselben der Reflex an der Stelle erscheinen, welche dem beleuchteten Papiere am nächsten ist, und unmittelbar an diesen Reflex wird sich der Mittelschatten als dunklerer Streif anschließen. Ist der beleuchtende Körper viel größer, als der beleuchtete, und weit entfernt, so kann man annehmen, daß die Lichtstrahlen parallel auf den beleuchteten Körper fallen. Dieser Fall tritt bei dem Sonnenlichte ein, denn die Sonne ist viele Millionen Male größer als die Erde selbst, und folglich auch als jeder von ihr auf der Erde beleuchtete Körper.

Die Sonnenstrahlen also, welche einen Körper beleuchten, sind unter sich als parallel anzunehmen.

Ist der beleuchtende Körper kleiner als der beleuchtete, wie es bei Kerzen, Lampen oder Fackellichte der Fall ist, so sind die Lichtstrahlen nicht als parallel anzunehmen, sondern als nach hinten zu aus einander weichend (divergirend). Wenn man z. B. einen dünnen Stab von einem Kerzenlichte beleuchten und den Schlagschatten gegen eine Wand fallen läßt, so wird der Schlagschatten des Stabes länger und breiter, als der Stab selbst erscheinen, ein Beweis, daß die ihn beleuchtenden Lichtstrahlen aus einander weichen, denn wenn sie parallel wären, würde der Schlagschatten des Stabes eben so lang und eben so dick als der Stab selbst erscheinen.

Für die hier folgenden Schattenconstructionen wird für die Beleuchtung der Körper immer das Sonnenlicht angenommen. Die Lichtstrahlen sind demnach bei allen anzuführenden Beispielen als unter sich parallel zu betrachten.

Das Aufsuchen der Schatten wird in den folgenden Beispielen ausschließlich für in geometrischer Projection gezeichnete Körper stattfinden, da die Auffindung der Schatten an perspectivisch gezeichneten Körpern erst in der dritten Abtheilung gelehrt werden wird.

Um die im Verfolg angegebenen Aufgaben und Lehren verstehen zu können, ist es durchaus nothwendig, sich erst mit der in der ersten Abtheilung dieses Werkes befindlichen Projectionslehre **genau** und **vollständig** bekannt gemacht zu haben, weil außerdem die Schattenconstructionslehre für jeden unverständlich ist.

Man kann sich jeden Lichtstrahl, welcher von einem leuchtenden Körper ausgeht, als gerade Linie denken, und unter dieser Gestalt werden die Lichtstrahlen auch bei den folgenden Aufgaben immer gedacht und gezeichnet werden.

Eben so wird es sich zeigen, daß der Schlagschatten, welchen ein Körper wirft, immer als eine bestimmt begrenzte meßbare Fläche erscheint.

Anmerkung. Wenn im Verfolg der vorliegenden zweiten Abtheilung Paragraphen (§§.) genannt werden (z. B. §. 1), so beziehen sich diese §§. nur auf die zweite Abtheilung. Sollten §§. aus der ersten Abtheilung vorkommen, so wird „I. Abtheilung" dabei stehen. (Z. B. §. 3 2c. I. Abthl.)

§. 2.

Aufgabe. Es soll der Schlagschatten (Schatten) eines Stabes gefunden werden, welcher senkrecht in einer wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Es stehe (Taf. 5 Fig. 1) der Stab A B senkrecht in der wagerechten Ebene b c d b' c' d'. Die Sonne stehe bei a so, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad gegen den Stab scheine, so wird der Lichtstrahl a B a′, welchen man sich von der Sonne aus über den Stab hinweg bis zur wagerechten Ebene gezogen denkt, einen Winkel von 45 Grad mit der wagerechten Ebene machen.

Es wird nun die Linie B a′ die Diagonale eines Quadrats sein, von welchem der Stab B A eine Seite ist (denn bekanntlich bildet die Diagonale eines Quadrats immer einen Winkel von 45 Grad mit den Seiten des Quadrats).

Ist nun aber die Linie A B die eine Seite eines Quadrats und B a′ die Diagonale desselben, so ist die Linie A a′ ebenfalls eine Seite des Quadrats, und folglich die Linie A a′ = A B. Die Linie A a′ aber zeigt zugleich die Länge des Schlagschattens an, welchen der Stab A B hinter sich in die wagerechte Ebene wirft, und es folgt hieraus ein für allemal der Satz:

Wenn die Sonne unter einem Winkel von 45 Grad über einem Stabe (einer Linie) steht, so wird der Schatten, welchen dieser Stab (diese Linie) in die wagerechte Ebene wirft, **eben so lang** wie der gegebene Stab (die gegebene Linie) selbst.

Wegen der Bequemlichkeit, welche aus dieser Folgerung für das Auffinden der Schatten bei in geometrischer Projection gezeichneten Körpern entsteht, nimmt man ein für allemal an, daß die Sonne **immer** unter einem Winkel von 45 Grad auf die von ihr beleuchteten Körper herab scheine. Es folgt ferner:

Denkt man sich die Sonne in der Höhe des Grundpunktes des Stabes und die Sonnenstrahlen (wie immer) unter sich parallel, so werden sie in diesem Falle parallel mit der wagerechten Linie laufen, und folglich würde der Schatten des Stabes unendlich lang sein. Denkt man sich die Sonne senkrecht über dem Stabe stehend und ihre Strahlen senkrecht und parallel herunter gezogen, so würde der Stab gar keinen sichtbaren Schatten werfen, denn derselbe würde unter die Grundfläche desselben fallen. Es folgt ferner, daß man sich außerdem die Sonne unter jedem beliebigen Winkel über dem Stabe stehend denken kann, und daß alsdann der Schatten immer um so länger werden wird, je niedriger die Sonne steht, und um so kürzer, je höher die Sonne steigt; und daß in diesen Fällen der Schatten des Stabes länger und kürzer als der Stab selbst sich zeigen werde, wenn aber die Sonne unter 45 Grad über dem Stabe steht, wird, wie bereits oben erwähnt, der Schatten genau so lang wie der Stab selbst sein.

Auf einer senkrechten Ebene würde man den Stand der Sonne bei a zeichnen können, wenn ihre senkrechte Projection in c auf der Linie c a′ fiele.

Dächte man sich aber die Stellung der Sonne in der Höhe so, daß ihre senkrechte Projection in der senkrechten Ebene nicht nach c, sondern nach b oder d fiele, so würde man in der senkrechten Ebene (auf dem Papiere) die Sonne selbst nicht zeichnen können, da sie außerhalb derselben zu stehen käme.

Wohl aber könnte man in der wagerechten Ebene durch die Punkte b c d die Standpunkte der Sonne oberhalb angeben, wenn man die Punkte b c d als die Projectionspunkte der senkrecht darüber stehenden Sonne betrachtet. Denkt man sich nun die Linien b A, c A, d A gezogen, so zeigen sie die Richtung an, unter welcher die Sonne gegen den Stab scheint. Zugleich aber sind sie die wagerechten Projectionen der Neigungswinkel,

unter welchem die Sonne von oben herab gegen den Stab scheint.

Ist nun dieser Neigungswinkel 45 Grad und man verlängert die Richtungslinie d A und macht A d′ = A B, so ist A d′ die Länge des Stabschattens für den Standpunkt der Sonne bei d. Eben so A b′ die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei b, und eben so, wie schon vorhin gezeigt wurde, A a′ die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei c, welcher Punkt c die Projection des Sonnenstandes bei a ist. Aus alle dem geht hervor, daß man sich den Stand der Sonne (unter einem Höhenwinkel von 45 Grad) um den Stab herum denken kann wo man will, und daß die Richtungslinien b A, c A, d A im Grundriß zugleich die wagerechten Projectionen des Neigungswinkels der Sonnenstrahlen sind.

Der Bequemlichkeit wegen (weil es ebenfalls die Auffindung der Schatten erleichtert) nimmt man immer die Richtungslinie des Sonnenstandes so gegen den beleuchteten Gegenstand (hier der Stab) an, daß die Richtungslinie der Sonne d A auch im Grundrisse einen Winkel von 45 Grad macht. Es fallen also die Lichtstrahlen unter einem Winkel von 45 Grad von oben herunter ein, und **zugleich** bildet die Richtungslinie d A **immer** einen Winkel von 45 Grad mit dem beleuchteten Gegenstande. Eben so nimmt man den Stand der Sonne immer so an, daß die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten hin einfallen, obgleich man auch die Lichtstrahlen von der Rechten zur Linken einfallend annehmen könnte, was ganz gleich wäre. Alsdann würde die Sonne rechts vom beleuchteten Gegenstande (hier bei b′) stehen.

Es ist durchaus nothwendig, sich diesen und die beiden folgenden Paragraphen ganz deutlich zu machen, da wir im Verfolg stets darauf werden verweisen müssen, indem sie die Grundbegriffe für alle möglichen Schattenconstructionen enthalten und wir in vielen Fällen, der Kürze wegen, nicht erst darauf verweisen werden, sondern sie späterhin, größtentheils als bekannt voraussetzen wollen.

§. 3.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Prisma im Grundriß gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 2.)

Auflösung. Es sei A B C D der Grundriß eines rechteckigen Prisma, und die Papierfläche um dasselbe herum sei die wagerechte Ebene. Die Höhe des Prisma soll eben so hoch gedacht werden, als die Länge des Stabes A B nebenbei in Fig. 1 angenommen war; so ist also die Größe des Prisma A B C D genau bestimmt, und es soll nun dessen Schlagschatten für zwei verschiedene Sonnenstände gefunden werden. Denke man sich zuvörderst die Sonne so über der wagerechten Ebene stehend, daß ihre Projection nach a fällt und die Sonnenstrahlen im Grundrisse parallel mit den Seiten des Quadrats A B und D C gehen, so werden sie hinter dem Körper verlängert in der Richtung B a′ und C a² fallen. Nun stehe die Sonne über ihrem Projectionspunkte bei a so hoch, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad über das Prisma hinweg scheine, so wird sich unter dieser Voraussetzung die Länge der Schattenstrahlen B a′ und C a² bestimmen lassen.

Die vier Höhenkanten über den Punkten A B C D des Prisma sind nämlich so hoch angenommen, als in Fig. 1 der Stab A B.

Es wird aber nach §. 1 der Schatten einer Linie (eines Stabes) so lang wie die Linie selbst, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel von 45 Grad über die Linie hinweg scheint; dies ist hier angenommen, und folglich werden die Schattenlinien B a' und C a^2 so lang wie die Kanten des Prisma hoch sind, das heißt so lang, wie der Stab A B in Fig. 1. Verbindet man nun noch die Schattenpunkte a' und a^2, so ist das Rechteck B a' a^2 C der Schlagschatten des Prisma, wovon das Quadrat A B C D den Grundriß darstellt.

Da die Sonnenstrahlen von a aus parallel mit A B und C D gehen, so streifen sie an den Seitenflächen hin, so daß diese keinen Schatten werfen, sondern nur die Höhenkanten, deren Grundpunkte B und C sind, werfen den Schatten hinter sich, so wie die oberhalb B C befindliche Querkante, deren Schatten die Linie a' a^2 begrenzt.

Wir haben aber in §. 1 angenommen, daß die Stellung der Sonne gegen die Körper, zu denen wir die Schatten suchen wollen, immer unter einer Richtungslinie von 45 Grad, sowohl von oben herab, als auch in der Richtungslinie des Grundrisses statt finden soll, wir nehmen daher jetzt an, daß die Projection der Sonne bei b erscheine und die Richtungslinie der Sonnenstrahlen in der Linie b D B b^2 liege (also in der Diagonale des Grundrisses), oder, was dasselbe ist, unter einer Richtung von 45 Grad gegen den Grundriß des Körpers.

Mit der Richtungslinie der Sonnenstrahlen b D B b^2 gehen die Strahlen A b' und C b^3 parallel (§. 2), und es wird also durch sie die Breite des ganzen Schlagschattens bestimmt.

Nimmt man die Höhe des Prisma wie vorhin an, so wird die Schattenlinie B b^2 so lang, wie die Höhenkante über dem Punkte B werden, oder so lang, wie B a' und C a^2 waren.

Eben so lang werden die Schattenlinien A b' und C b^3 werden. Zieht man nun b' b^2 und b^2 b^3, so sind diese beiden Linien die Schattenbegrenzungen für die über A B und B C oberhalb befindlichen Kanten des Prisma, wodurch der ganze Schatten des gegebenen Körpers begrenzt wird. Man sieht aus diesen beiden Beispielen, daß die Schlagschatten, je nach dem verschiedenen Stande der Sonne, auch eine verschiedene Gestalt annehmen würden.

§. 4.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers im Grund- und Aufrisse gefunden werden, wenn der Körper an eine senkrechte Wand angelehnt steht. (Taf. 5 Fig. 3.)

Auflösung. Es sei E C D F der Grundriß des Prisma, welcher an einer Wand steht, deren Verlängerung in der Linie E F liegt.

Es sei ferner, oben über dem Grundrisse, das Rechteck A B D C der Aufriß des gegebenen Prisma, so findet man die Schatten im Grund- und Aufrisse wie folgt. Die Linie D D' im Grundrisse giebt die Projection der Richtungslinie des Sonnenstandes an. Es fallen demnach mit ihr parallel alle Sonnenstrahlen auf den Körper.

Denkt man sich eine beliebige Menge solcher Parallelen mit D D' auf die Linien E C und C D gezogen, so werden diese beiden Seiten von diesen Sonnenstrahlen beleuchtet werden, weil sie diese Seiten treffen.

Mit der Seite D F des Grundrisses verhält es sich anders.

Der Lichtstrahl D D' und alle mit ihm parallelen streifen vorbei, ohne die Seite D F zu treffen; sie wird also nicht beleuchtet werden. Dasselbe gilt von der Rückseite E F, welche auch ohnehin an der senkrechten Wand angelehnt angenommen ist. Es wird also der Schatten der ganzen über D im Grundriß befindlichen senkrechten Kante des Prisma in der Richtung der Linie D D' geworfen werden, und diese Linie wird zugleich die äußerste Grenze des Schattens im Grundrisse bezeichnen; es wird demnach das Dreieck D F D die Schattenfläche des Prisma im Grundrisse sein, denn wenn man auch noch zum Ueberflusse in der Kante D F die Schattenpunkte a b nach a' und b' hin suchen wollte, so würden die gefundenen Schattenlinien a a' und b b' innerhalb der Schattenfläche D F D' selbst fallen.

Um den Schatten des Aufrisses zu finden, ist Folgendes zu bemerken.

Im Grundrisse war die Seite C D im Lichte; es ist also die ganze Fläche des Aufrisses A C D B ebenfalls im Lichte.

Die Seite E C im Grundrisse ist zwar ebenfalls im Lichte, ist aber im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie A C des Aufrisses fällt. Die Seite D F des Grundrisses ist im Schatten, sie ist im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie B D des Aufrisses fällt, diese ganze Seitenfläche ist aber gerade diejenige, welche ihren Schatten hinter sich an die Wand wirft.

Betrachten wir den Punkt D des Grundrisses, so liegt seine Projection im Aufrisse in der ganzen Linie D B, folglich auch in B, und der Punkt B ist zugleich die Projection der obersten Seitenkante des Prisma und auch zugleich die Projection der Linie D F des Grundrisses.

Zieht man nun im Aufrisse die Linie B D^2 unter 45 Grad beliebig lang, so ist diese die Richtungslinie des Schattens, welchen die ganze Seitenkante des Prisma auf die Wand werfen wird.

Zieht man nun von D' im Grundrisse eine Normale D' D^2, so bezeichnet die Linie D^2 D^3 die Grenze des Schattens, welchen die ganze Höhenkante B D des Aufrisses auf die hinten stehende Wand wirft. Will man die Linie B D^2 im Aufrisse noch genauer bestimmen, um sich zu überzeugen, daß sie richtig ist, so nehme man in der Linie D F des Grundrisses noch die Punkte a und b an und ziehe ihre Schattenlinien von a nach a' und von b nach b'. Der Schatten, welchen der Punkt F des Grundrisses im Aufrisse wirft, fällt in den Punkt B, da dieser die höchste Projection von F ist.

Der Punkt b des Grundrisses fällt in seiner senkrechten Projection ebenfalls nach B im Aufrisse. Die Linie B b^2 im Aufrisse zeigt die Richtung des Schattens, welchen der Punkt b im Grundrisse an der Wand werfen wird; und zieht man nun die Normale b' b^2, so ist b^2 die Projection von b' und die Linie B b^2 des Aufrisses ist die Länge der Schattenlinie von F bis b im Grundrisse.

Eben so liegt die Projection des Grundrißpunktes a im Aufrisse in B. Zieht man im Aufrisse B a^2, so ist diese Linie wieder die Schattenrichtung wie vorhin, zieht man im Grundrisse a a', so ist a' der Punkt, wohin a seinen Schatten wirft, zieht man die Normale a' a^2, so ist a^2 die Projection von a' und die Linie B a^2 im Aufrisse die Länge des Schattens, welchen die Linie des Grundrisses F a wirft. Da nun die Punkte des Aufrisses b^2 a^2 in die Linie B D^2 fallen, so ist B D^2 die Schattenlinie für die obere Kante des Grundrisses **F D** und die Figur **B D^2 D^3 D** im Aufrisse der Schatten, welchen das Prisma an die Wand wirft.

Da die Sonne hoch oben über dem Körper steht, so wird seine obere Fläche (wovon die Linie **A B** des Aufrisses die Projection ist) beleuchtet sein.

Der Körper warf außer dem im Aufrisse sichtbaren Schatten auch im Grundrisse einen sichtbaren Schatten **D F D′**, welcher aber in der Aufrißzeichnung nicht sichtbar wird, da seine Projection dort mit der Grundlinie der senkrechten Wandebene zusammenfällt.

Eben so ist der Schatten des Aufrisses im Grundrisse nicht sichtbar, denn er fällt hier mit der Linie **D D^3** zusammen.

Wir haben uns hier etwas weitläufig über die Aufsuchung des Schattens ausgelassen, weil wir uns künftig oft auf diesen §. beziehen werden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer viereckigen, aus einer senkrechten Mauer vorspringenden Platte gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 4.)

Auflösung. Oberhalb befindet sich der Aufriß und unterhalb der zugehörige Grundriß.

Betrachten wir zuerst den Grundriß.

Die Linie a a′ ist die Projectionslinie der Richtung der Sonnenstrahlen, welche mit ihr parallel sind. Es ist demnach die Seite **C E** und **C D** beleuchtet, da die Lichtstrahlen darauf auffallen. Die Seite **E F** ist unbeleuchtet, denn sie lehnt sich an die Mauer. Bei der Seite **D F** streifen die Lichtstrahlen vorbei, sie ist also nicht beleuchtet.

Betrachten wir nun den Aufriß.

Die Sonne steht unter einem Winkel von 45 Grad oberhalb und beleuchtet die vorspringende Platte **A C B D**. Die obere Fläche, deren Projection die Linie **A B** ist, wird beleuchtet.

Die vordere Fläche **A C B D** ist beleuchtet. Die Seitenfläche, deren Projection die Linie **A C** ist, ist beleuchtet. Die Seitenfläche, deren Projection die Linie **B D** ist, ist nicht beleuchtet, wird also einen Schatten hinter sich an die Wand werfen.

Die ganze untere Fläche der Platte, deren Projection die Linie **C D** ist, ist nicht beleuchtet, sie wird also einen Schatten unter sich an die Wand werfen. Die Projection der untern Fläche ist die Linie **C D**, es wird also diese die schattenwerfende sein. Nimmt man in dieser Linie die Punkte a^2 b^2 c^2 **D** an und zieht die Linien a^2 a^3, b^2 b^3, c^2 c^3, **D D^2**, so hat man die Richtungslinien des Schattens. Die Seite der Platte, deren Projection die Linie **B D** ist, wirft einen Schatten hinter sich und seine Richtungslinien werden die Linien **D D^2** und **B D^3** sein.

Um nun die Länge dieser Richtungslinien des Schattens im Aufrisse bestimmen zu können, müssen wir zum Grundrisse zurückkehren.

Der Punkt a wirft seinen Schatten bis an die Wand bei a′, es ist also die Linie a a′ die Projection der Länge des Lichtstrahles, welcher unter einem Winkel von 45 Grad von dem oben liegenden Punkte a nach dem unten an der Wand liegenden Punkte a′ fällt.

Eben so ist im Aufrisse die Linie a^2 a^3 die Projection desselben Lichtstrahles. Um nun die Länge desselben zu finden, braucht man nur von a′ im Grundrisse normal nach a^3 im Aufrisse hinauf zu ziehen, so schneidet sich in a^3 die Länge des Lichtstrahles a^2 a^3 ab; denn die Linie des Grundrisses a a′ ist die Projection davon. Eben so findet man die Längen für b^2 b^3, c^2 c^3, **D D^2**, und man hat nunmehr den Schatten der unteren Fläche der Platte gefunden.

Um den Schatten derjenigen Seitenfläche zu finden, wovon die Linie **B D** im Aufrisse die Projection ist, betrachte man wieder den Grundriß.

Daselbst ist die Linie **D F** die Projection der Seitenansicht der Platte. Die Linie **D F** ist zugleich die obere Kante dieser Fläche und wird einen Schatten hinter sich an die Wand werfen.

Der Punkt **D** wirft seinen Schatten nach **D′** im Grundrisse. Zieht man von **D′** eine Normale bis **D^2** im Aufrisse, so bestimmt sich die Länge der Linie **D D^2** im Aufrisse. Zieht man von **D′** im Grundrisse eben so eine Normale bis **D^3** im Aufrisse, so ist **B D^3** im Aufrisse seiner Länge nach bestimmt, und es ist **D D^2 D^3 B** die Gestalt des Schattens von der Seitenfläche, deren Projection die Linie des Aufrisses **D B** ist. Nun hat man den ganzen Schatten gefunden, welchen die Platte auf die Wand wirft, seine Gestalt wird durch die Punkte **B D^3 D^2** a^3 a^2 bestimmt. Im Grundrisse wird man von diesem Schatten nichts zu sehen bekommen, denn da er eine ebene Fläche bildet und in der senkrechten Ebene liegt, so wird seine Projection im Grundrisse in die verlängerte Linie **E F** fallen, welche die wagerechte Projection der oberhalb gedachten senkrechten Wandfläche ist, aus welcher die Platte hervorsteht. Man vergleiche nochmals die §§. 1 bis 4.

§. 6.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer dreieckigen Platte gefunden werden, welche aus einer senkrechten Wand hervorspringt. (Taf. 5 Fig. 5.)

Auflösung. Die Figur **A B C D E F** zeigt die dreieckige Platte im Aufrisse und die Figur **F E D** dieselbe im Grundrisse darunter.

Betrachten wir zuerst den Grundriß.

Die unter 45 Grad gezogene Linie a a′ bezeichnet die Richtungslinie der Lichtstrahlen. Denkt man sich deren mehrere parallel mit einander, so fallen sie auf die Seite **F E**, dieselbe wird also beleuchtet sein. Der Lichtstrahl **E E′** streift an der Seite **E D** vorbei, dieselbe wird also nicht beleuchtet sein und einen Schatten hinter sich werfen.

Da die Sonne oberhalb der Platte steht, so wird die obere Fläche derselben beleuchtet sein, die untere Fläche aber wird dunkel bleiben und einen Schatten unter sich werfen.

Betrachten wir nun den Aufriß, so ist die Fläche **A B E F** beleuchtet, die Fläche **B E C D** ist nicht beleuchtet, eben so ist die untere Fläche der Platte, deren Projection die Linie **F E D** ist, nicht beleuchtet, und diese Linie wird einen Schatten unter sich werfen.

Zieht man nun die schattenwerfenden Punkte des Grundrisses **F** a **E** b **D** normal in den Aufriß hinauf nach **F** a′ **E B** b^2 **D C**, so hat man im Aufrisse die schattenwerfenden Punkte bestimmt. Zieht man von diesen die Richtungslinien a^2 a^3, **E E^2**, **B B′**, b^2 b^3, und schneidet man aus den übereinstimmenden Punkten des Grundrisses normal hinauf in diese Richtungslinien (wie §. 5), so erhält man die Punkte **F** a^3 **E^2 B′** b^3 **C**. Verbindet man nun den Punkt **F** mit a^3, a^3 mit **E^2**, **E^2** mit **B′**, **B′** mit b^3 und b^3 mit **C**, so geben diese Endpunkte zugleich die Gestalt des

Schattens im Aufrisse an. Im Grundrisse wird kein Schatten sichtbar werden, weil seine Projection in die Linie F D des Grundrisses fallen wird.

Die Schattenlinien a a′ und b b′ des Grundrisses und ihre übereinstimmenden des Aufrisses a^2 a^3 und b^2 b^3 sind nur angenommen worden, um zu zeigen, daß der Schatten der Unterkante F A des Aufrisses in die gerade Linie F a^3 E^2 fallen wird. Eben so bildet die Kante B C des Aufrisses die Linie B b^3 C im Schatten, ferner wirft die senkrechte Kante des Aufrisses B E ihren Schatten nach B′ E^2.

§. 7.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer dreieckigen Platte, welche aus einer senkrechten Wand hervorragt, gefunden werden, wenn die Platte an der vordern Spitze einen rechten Winkel bildet.

Auflösung. (Taf. 5 Fig. 6.) Es sei die gegebene Platte im Aufriß A B C D E F, im Grundrisse F E D. Zieht man im Grundrisse die Richtungslinie a a′, so sieht man, daß die Linie F E erleuchtet wird (§. 6). An der Linie E D geht der Lichtstrahl in gleicher Richtung hin, ohne daß die Fläche, deren Projection die Linie E D ist, erleuchtet würde, da die Linie E D sich unter 45 Grad neigt, wie die Lichtstrahlen selbst.

Es wird der Punkt F keinen Schatten hinter sich werfen, da er an der Wand selbst liegt. Der Punkt a wird seinen Schatten nach a′ werfen, so wie der Punkt E nach D.

Gehen wir nun zum Aufrisse über, so ist die obere nicht sichtbare Fläche der Platte erleuchtet, weil die Sonne darauf scheint; die senkrechte Fläche A B E F ist ebenfalls erleuchtet. Die senkrechte Fläche B C D E ist nicht erleuchtet, da die Sonnenstrahlen, welche unter 45 Grad einfallen, nur eben daran parallel hinstreifen, ohne auf die Fläche aufzufallen. Die untere Fläche der Platte, deren Projection die Linie F E D ist, bleibt dunkel, und diese Fläche wird einen Schatten werfen.

Zieht man demnach die Richtungslinien a^2 a^3 und E E′ willkürlich lang, so ergiebt sich Folgendes.

Der Anfangspunkt des Schattens ist bei F und F des Grund- und Aufrisses. Der Punkt a wirft seinen Schatten nach a′, und wenn man von hier aus die Normale a′ a^3 zieht, so liegt der Schattenpunkt a′ in a^3. Der Punkt E im Grundrisse wirft seinen Schatten an die Wand nach D. Der Punkt E im Grundrisse aber ist der Projectionspunkt für E und B im Aufrisse, mithin wird die Projection seines Schattenpunktes D nach E′ und B^2 im Aufrisse fallen. Der Punkt B im Grundrisse ist der Projectionspunkt von B′ im Aufrisse, der Punkt B im Grundrisse wirft seinen Schatten ebenfalls nach D im Grundrisse. D im Grundrisse aber ist der Projectionspunkt für E′ B^2 und D im Aufrisse, und folglich fallen alle in der Linie des Grundrisses anzunehmende Schattenpunkte in den Punkt D des Grundrisses und im Aufrisse in die gerade und senkrechte Linie E′ B^2 D C, und der Schatten, welchen die Platte nach unten hin wirft, hat seine Begrenzungen in den Punkten des Aufrisses F a^3 E′ B^2 D.

Im Grundrisse wird man keinen Schatten zu sehen bekommen, denn da sich die obere Schattenfläche in einer senkrechten Ebene befindet, so fällt ihre Projection im Grundrisse in die verlängerte Linie F D.

§. 8.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer halbachteckigen Platte gefunden werden, welche aus einer senkrechten Wand hervorsteht. (Taf. 5 Fig. 7.)

Auflösung. Betrachten wir zuerst den Grundriß, so ist H G F E die Platte. Zieht man die Richtungslinie der Lichtstrahlen a a′ und mit ihr parallel G G′ und F E, so wirft der Punkt H keinen Schatten. Der Punkt a wirft seinen Schatten unterhalb an die Wand nach a′, der Punkt G nach G′, der Punkt F nach E.

Im Aufrisse ist die Fläche A B H G beleuchtet, eben so die Fläche B G C F, dagegen ist die Fläche C F E D nicht beleuchtet und wirft einen Schatten hinter sich.

Trägt man nun den Punkt a aus dem Grundrisse nach a^2 im Aufrisse und zieht im Aufrisse die Richtungslinien a^2 a^3, G G′, F F′, C C′ willkürlich lang, und dann aus dem Grundrisse aufwärts die Normalen a′ a^3, G′ G^2, E F′, E C, E E, so ist im Aufrisse H a^3 G^2 F′ C′ E die Gestalt des gesuchten Schattens.

Der Schatten der Kante C D fällt im Aufrisse mit dem Schatten der Kante C F deswegen in der geraden Linie D E C′ F′ zusammen, weil die Kante C D, wie der Grundriß (bei F E) zeigt, einen Winkel von 45 Grad macht und also alle Schattenpunkte, welche man in der Linie F E annehmen würde, nach E im Grundrisse fallen müßten. Da aber E der Projectionspunkt für F′ C′ E D im Aufrisse ist, so wird der Schatten eine senkrechte Linie, wie die Figur zeigt.

Im Grundrisse ist wieder kein Schatten sichtbar, da er, als in der senkrechten Fläche der Wand liegend, in seiner Projection im Grundrisse in die Linie H E und ihre Verlängerung fallen muß. Im vorliegenden Falle wird die Linie H E selbst diese Projection sein.

§. 9.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer aus der senkrechten Wand vorspringenden halbkreisförmigen Platte gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 8.)

Auflösung. Betrachten wir zuerst den Grundriß. Die Lichtstrahlen a a′, b b′, d d′, e C bis f f′ erleuchten die vordere Fläche der Platte. Bei dem Punkte f hört die Beleuchtung auf, und die obere Kante der Platte von f bis C wird einen Schatten hinter sich an die Wand werfen. Betrachten wir nun den Aufriß. Der Theil der vorderen Fläche A D f^2 f^3 wird beleuchtet sein, der Theil f^3 f^2 C B wird nicht beleuchtet sein und die obere Kante f^3 B desselben wird einen Schatten hinter sich werfen, so wie die senkrechte Linie f^3 f^2, weil auf diesem Punkte (wie bei der achteckigen Platte §. 8) die Lichtstrahlen vorbei streifen, wie im Grundrisse bei dem Punkte f zu sehen ist. Die untere Fläche der Platte ist nicht erleuchtet und wird demnach einen Schatten hinter sich werfen.

Kehren wir nun zum Grundrisse zurück.

Die Halbkreislinie ist die Projection, sowohl der unteren als oberen Kante der senkrechten Fläche der Platte. Nehmen wir nun in diesem Halbkreise die Punkte a b d e f g an und ziehen von ihnen aus die Richtungslinien der Lichtstrahlen, so wirft der Punkt a seinen Schatten nach a′, der Punkt b nach b′ u. s. w. an die Wand unterhalb. Trägt man nun die Punkte a b d ꝛc. normal hinauf in die Linie D C des Aufrisses, so erhält man die

Projectionspunkte $a^2\ b^2\ d^2\ e^2\ f^2\ f^3\ g^2$. Zieht man von diesen die Richtungslinien $a^2 a^3$, $b^2 b^3$ u. s. w. willkürlich lang, so werden sich in diesen die Längen der Schattenlinien irgendwo abschneiden lassen. Zieht man nun aus dem Grundrisse aufwärts die Normalen $a' a^2$, $b' b^2$, $d' d^2$, $C e^2$, so erhält man die Punkte a^3, b^3, d^3, e^2. Verbindet man D, a^3, b^3, d^3, e^2 durch eine Linie, so ist der Schatten von D bis e^2 bestimmt. Bei dem Punkte f des Grundrisses haben wir gesehen, daß das Licht wechselt, das heißt von D bis f im Grundrisse beleuchtete es die untere Kante und von f bis C beleuchtet es die obere Kante. Es wird also im Aufrisse jeder Punkt der Linie $f^2 f^3$ einen Schatten hinter sich werfen.

Zieht man demnach die Richtungslinien $f^2 f^4$ und $f^3 f^5$ im Aufrisse und verbindet man f^4 mit f^5, so hat man die Schattenlinie von der Linie $f^2 f^3$ gefunden, und wenn man noch die Punkte e^2 und f^4 im Aufrisse verbindet, so hat man den Schatten von D bis f^4 bestimmt, und es ist nur noch der Schatten für die obere Kante der Platte von f^3 bis B im Aufrisse zu suchen.

Die Projection des Stückes f^3 bis B des Aufrisses liegt im Grundrisse von f bis C. Der Punkt g des Grundrisses liegt im Aufrisse bei g^2. Zieht man die Richtungslinie $g^2 g^3$ und aus dem Grundrisse von g' die Normale $g' g^3$, so ist g^3 der Schattenpunkt von g^2; verbindet man nun im Aufrisse f^5 mit g^3 und g^3 mit B, so giebt die krumme Linie $B\, g^3\, f^5\, f^4\, e^2\, d^3\, b^3\, a^3\, D$ die gesuchte Gestalt des Schattens. In dieser Linie ist das Stück von f^4 bis f^5 gerade, weil f^2 und f^3 auch eine gerade Linie macht.

Im Grundrisse ist kein Schatten zu sehen, weil seine Projection in die verlängerte Linie $D C$ des Grundrisses fällt.

§. 10.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers gefunden werden, auf welchem eine eben solche Platte liegt. (Taf. 5 Fig. 9.)

Auflösung. Diese Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Es ist zuerst der Schatten zu suchen, welchen der prismatische Körper an die Wand wirft (§. 4); alsdann soll man den Schatten suchen, welchen die Platte an die Wand (§. 5) und auch auf das Prisma unter der Platte werfen wird.

Betrachten wir zuerst den Grundriß, so ist das Rechteck $K E F L$ die Projection des Prisma, $J B D M$ die Projection der Platte.

Zieht man die Richtungslinien der Lichtstrahlen $B E$, $a a'$, $b b'$, $d F F'$, $D D'$ und $G G'$, so ergiebt sich Folgendes.

Das große Prisma wird seinen Schatten von F nach F' werfen. F ist aber der Projectionspunkt für die ganze Höhenkante $H F$ des Aufrisses, also wird der Schatten des Körpers im Grundrisse das Dreieck $F L F$ sein und auf der wagerechten Ebene sichtbar werden.

Betrachtet man nun den Schatten, welchen die Platte an die Wand werfen würde, so ergiebt sich Folgendes. Der Punkt B des Grundrisses würde seinen Schatten in der zu verlängernden Linie $B E$ bis an die Wand werfen, da aber in dem Punkte E das große Prisma dazwischen tritt, so kann der Punkt B seinen Schatten nicht bis an die Wand, sondern nur bis E werfen. Dasselbe gilt von Richtungslinien $a a'$, $b b'$. Der Punkt d dagegen wirft seinen Schatten bei F vorbei bis F' an die Wand, eben so der Punkt D bis D' und der Punkt G bis G'.

Ein Schatten der Platte auf dem Fußboden wird nicht erscheinen, da der Schatten der Platte (wie vorläufig aus dem Aufrisse zu ersehen ist) die wagerechte Ebene nicht erreicht.

Trägt man nun aus dem Grundrisse die Punkte $B\, a\, b\, d\, D$ nach dem Aufrisse normal nach $B\, a^2\, b^2\, d^2\, D$ und zieht die Richtungslinien $B B'$, $a^2 a^3$, $b^2 b^3$, $d^2 d^3$ bis F^2, ferner $D D^2$ und $C C'$, schneidet dann von dem Punkte E des Grundrisses nach B', von a' nach a^3, von F des Grundrisses nach d^3, von F' des Grundrisses nach F^2 und H' im Aufrisse; eben so von D' nach D^2 und C', so erhält man rechts vom Prisma in der Figur $C\, C'\, D^2\, F^2\, H'\, H\, F\, D\, C$ den Schatten, welchen Prisma und Platte auf die Wand werfen. Auf der linken Seite des Prisma im Aufrisse zeigt das Dreieck $B\, a^2\, B'$ die Gestalt des Schattens, welcher von der Platte hinten an die Wand, neben das Prisma, geworfen wird, und endlich zeigt unterhalb der Platte auf dem Prisma das Rechteck $E\, B'\, d^3\, F$ die Gestalt desjenigen Schattens, welchen die Platte auf das Prisma werfen muß, da der Schatten der Platte auf dieser Stelle die hinten liegende Wand nicht erreichen kann, weil das Prisma dazwischen tritt.

Um sich zu überzeugen, daß der Schatten der Kante $D M$ des Grundrisses im Aufrisse in die Linie $C C'$ fallen wird, darf man nur noch im Grundrisse den Punkt G annehmen, welcher seinen Schatten nach G' wirft.

Der Punkt G des Grundrisses liegt in seiner Projection, sowohl in dem Punkte D, als auch C des Aufrisses, und der Punkt G' des Grundrisses würde in seiner Projection sowohl in die Linie des Aufrisses $D D^2$, als auch $C C'$ fallen.

Man sieht ferner, daß je länger der Weg ist, welchen ein Schattenstrahl durchläuft, um so breiter der Schatten ist, welchen er wirft.

Der Schattenpunkt d des Grundrisses z. B. wirft seinen Schatten nach F, im Aufrisse von d^2 nach d^3, aber auch nach F' im Grundrisse und im Aufrisse bis F^2, woselbst der Schatten an der Wand viel breiter (oder tiefer) abschneidet, als bei d^3 im Aufrisse, obgleich derselbe Schattenstrahl beide Punkte bestimmt hat.

§. 11.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers gefunden werden, auf welchem eine achteckige Deckplatte liegt. (Taf. 5 Fig. 10.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Es ist der Schatten zu suchen, welchen das Prisma an die Wand wirft (§. 4), und der Schatten, welchen die achteckige Platte sowohl an die Wand (§. 8), als auch auf den Körper wirft.

Betrachten wir den Grundriß, so ist $N L M O$ die Projection des Prisma und $P B D F H Q$ die halbe achteckige Platte.

Der Punkt B wirft seinen Schatten bis B' und die Projection davon ist in dem Aufrisse B^2. Der Punkt a des Grundrisses wirft seinen Schatten nach L, seine Projection ist im Aufrisse bei a^2. Der Punkt D des Grundrisses wirft seinen Schatten nach b, seine Projection im Aufrisse ist bei b'. Der Punkt d des Grundrisses wirft seinen Schatten nach d^2 und an die Wand unten bei M' und oben bei M^2. Der Punkt F des Grundrisses wirft seinen Schatten bis G' und oben nach F' und E'. Die Kante $F H$ im Grundrisse wirft ihren Schatten ebenfalls nach G', die Projection davon liegt oben in $E'\, H'$ und G^2, wodurch die ganze Gestalt des Schattens bestimmt ist. Im Grundrisse wird nur der Schatten des Körpers sichtbar sein in der Gestalt des Dreieckes M O Q, denn der Schatten der Platte reicht nicht bis an die wagerechte Ebene und seine Projection wird demnach in die Verlängerung der Linie P N O Q fallen.

§. 12.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines halbachteckigen Prisma gefunden werden, auf welchem eine ebenfalls halbachteckige Deckplatte liegt. (Tafel 5 Figur 11.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Zuerst sucht man den Schatten des Körpers an der Wand und dann den Schatten der Deckplatte, sowohl an der Wand, als auf dem Körper.

Betrachten wir zuvörderst den Grundriß, so wird der Schatten der Deckplatte ganz nach §. 8 und §. 11 an der Wand gefunden werden.

Um den Schatten der Deckplatte auch auf dem Prisma zu finden, hat man Folgendes zu berücksichtigen. Im Grundrisse wirft der Punkt B seinen Schatten nach B', die Projection davon ist B^2 im Aufrisse; dieser Schattenpunkt auf dem Körper wird jedoch nicht sichtbar, da die Projection der ganzen Fläche, auf welche er fällt, in der Linie J R des Aufrisses liegt. Der Punkt a des Grundrisses wirft seinen Schatten nach J und oben im Aufrisse nach a^2, der Punkt b des Grundrisses wirft seinen Schatten nach M und oben nach b', der Punkt D wirft seinen Schatten nach D' und oben nach D^2. Der Punkt d des Grundrisses wirft seinen Schatten bis L an den Körper und oben bis d^2. Im Aufrisse bestimmen also die Punkte a^2 b' D^2 und d^2, wenn man sie mit einander verbindet, den Schatten, welchen die Platte auf den Körper wirft.

Um den Schatten zu finden, welchen das Prisma selbst an die Wand wirft, braucht man nur im Grundrisse die Linie K Q zu ziehen, so ist im Aufrisse die Linie K' Q' der gesuchte Schatten der Kante F T, so weit er nicht von dem Schatten der Platte verdeckt wird.

Im Grundrisse wird nur der Schatten des Körpers in der Gestalt des Dreieckes P K Q gesucht werden können, da der Schatten der Platte nicht sichtbar ist.

§. 13.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines rechteckigen Prisma, auf dem eine halbrunde Platte liegt, gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 12.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile, zuerst sucht man den Schatten des Prisma, welches nach §. 4, §. 10, §. 11 keine Schwierigkeit mehr haben kann. Dieser Schatten wird im Grundrisse durch die Linie F f^2 bestimmt und fällt im Aufrisse von f^5 abwärts bis auf die Grundlinie.

Alsdann muß man nach §. 9 den Schatten der halbkreisförmigen Platte auf die Wand finden und endlich den Schatten, welchen die Platte auf das Prisma selbst wirft. Der Schatten wird gefunden, wenn man im Grundrisse die Punkte D a b d e f g f' C annimmt, dieselben im Aufrisse nach D a^2 b^2 d^2 e^2 f^3 g^2 g^3 und B trägt, von diesen Punkten die Richtungslinien unter 45 Grad willkürlich lang zieht und dann von den Punkten des Grundrisses a' E d' e' f' f^2 g g' durch normale Projectionslinien im Aufrisse die Punkte a^3 b^3 d^3 e^3 e^5 f^5 g^5 g^4 und B bestimmt. Verbindet man diese Punkte mit einander durch krumme Linien, so erhält man den gesuchten Schatten.

Der Punkt D des Aufrisses wirft seinen Schatten bis D' hinten an die Wand. Die Linie g^2 g^3 des Aufrisses wirft ihren Schatten nach g^5 g^4, weil im Grundrisse der Punkt g' derjenige ist, wo die Lichtstrahlen, welche unter einem Winkel von 45 Grad einfallen, nur vorbeistreifen und die Platte zu beleuchten aufhören, g im Grundrisse aber ist der Projectionspunkt der ganzen Linie g^2 g^3 im Aufrisse, und folglich g^5 g^4 der Schatten davon.

Der Punkt f' im Grundrisse wirft seinen Schatten nach f^2. f^2 im Grundrisse aber ist die Projection der Schattenpunkte f^5 und f^6 im Aufrisse.

Im Grundrisse wird nur der Schatten des Prisma in der Gestalt des Dreieckes F L f^2 sichtbar werden.

§. 14.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines halben Cylinders, worauf eine eben solche Platte liegt, gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 13.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Zuerst ist der Schatten des Cylinders an die Wand zu suchen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke den Punkt f' des Grundrisses, so ist es derjenige, an welchem die Lichtstrahlen vorbeistreifen (§. 9). Es wird aber dasselbe bei allen Punkten des Aufrisses geschehen, für welche der Punkt f' die Projection ist, also für die ganze Höhe des Aufrisses N O. Zieht man von dem Punkte f' des Grundrisses nach f^2, so ist dieser Punkt die Projection für die Linie des Aufrisses P e^4, welche allein als Schattenlinie des Körpers sichtbar werden wird, da der Schatten der Platte den andern Theil verdeckt.

Was den Schatten der Platte betrifft, so hat man wie §. 9 und §. 13 in der Plattenlinie des Grundrisses nur die beliebigen Punkte D a b d e f g h k anzunehmen und von da aus die Richtungslinien a a', b' b',... zu ziehen. Dann trägt man aus dem Grundrisse die Punkte a b d.... im Aufrisse nach a^2 b^2 d^2.... übereinstimmend; zieht von diesen aus die Richtungslinien a^2 a^3, b^2 b^3,.... und schneidet aus den Grundrißpunkten a' b' d'.... normal im Aufrisse die Punkte a^3 b^3 d^3.... an, verbindet alsdann alle gefundenen Schattenpunkte durch Linien, so ergiebt sich wie immer die Gestalt des ganzen Schattens.

Es ist wieder zu bemerken, daß der Punkt h des Grundrisses seine Projection im Aufrisse von h^3 bis h^2 hat, und daß, da der Grundrißpunkt h seinen Schatten bis h' wirft, dieser Punkt h der Projectionspunkt für die Punkte des Aufrisses h^4 und h^5 sein wird.

§. 15.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines dreieckigen Prisma gefunden werden, auf welchem eine eben solche Deckplatte liegt. (Taf. 5 Fig. 14.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Zuerst ist der Schatten des Prisma an die Wand zu suchen, dann der Schatten der Platte auf Prisma und Wand.

Betrachten wir den Grundriß, so sehen wir, daß das Prisma ein rechtwinkliges Dreieck zur Grundfläche und eine eben solche Deckplatte hat; es stehen daher die Linien G K, K L, D E und E F unter einem Winkel von 45 Grad gegen die Wand. Der Punkt K im Grundrisse wirft also seinen Schatten von K nach L, das heißt, die Schattenstrahlen fallen in die Linie K L selbst, sie werfen also keinen Schatten nebenbei an die Wand.

Der Punkt K im Grundrisse ist aber die Projection der Kante K E im Aufrisse, und es wird daher diese Kante ihren Schatten in die Ebene K E H L des Aufrisses werfen (also nicht an die Wand).

Der Schatten der Platte wird eben so gefunden, wie der von der dreieckigen Platte in §. 7.

Bei dem Punkte D wird der Schatten beginnen. Zieht man im Grundrisse a G, b K L, E F, trägt dann die Punkte a b E im Aufrisse nach a^2 b^2 E B und zieht die Richtungslinien a' a^2, b' b^2, E E', B B', schneidet die übereinstimmenden Punkte des Grundrisses normal nach a^2 b^2 E B F des Aufrisses und verbindet diese gefundenen Schattenpunkte mit einander, so erhält man den gesuchten Schatten. Neben dem Prisma links ist es das Dreieck D G a^2. Neben dem Prisma rechts ist es die Figur H F E M. Auf dem Prisma ist es die Figur G E b^2 a^2. Die Flächen E H K L des Prisma und B E F C der Platte liegen im Schatten, ohne einen Schlagschatten hinter sich zu werfen.

Im Grundrisse wird kein Schatten sichtbar werden.

§. 16.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines rechteckigen Prisma gefunden werden, welches eine dreieckige Deckplatte hat. (Taf. 5 Fig. 15.)

Auflösung. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Erstens sucht man den Schatten, welchen das Prisma an die Wand wirft. Zieht man J N im Grundrisse unter 45 Grad, so ist L N die Breite des Schattens (§. 4) im Grundrisse. Zieht man von N aus die Normale im Aufrisse O N', so ist diese die Schattenlinie für die Senkrechte G J des Aufrisses.

Um den Schatten der Platte auf die Wand zu finden, nehme man im Grundrisse die Punkte D F an und ziehe F F' (§. 6). Der Punkt F des Grundrisses ist der Projectionspunkt für F und B im Aufrisse, zieht man daselbst F F^2 und B B' und von F' im Grundrisse die Normale F^2 B' im Aufrisse, so ist F^2 B' die Schattenlinie von F B des Aufrisses. Die Kante B C des Aufrisses wird ihre Schattenlinie in der Linie B' C finden, eben so die Kante D F des Aufrisses in der Linie D F^2, welche hinter dem Prisma fortläuft.

Was den Schatten auf dem Prisma selbst betrifft, so wird der Punkt des Grundrisses a seinen Schatten nach J werfen. Trägt man a normal nach a' im Aufrisse, zieht a' a^2 und schneidet von J des Grundrisses normal hinauf, so ist a^2 im Aufrisse der Schattenpunkt für a', und zieht man endlich E a^2, so hat man den Schatten auf das Prisma gefunden.

Ein Schatten des Prisma auf die wagerechte Ebene wird hier entstehen und zeigt sich derselbe im Grundrisse in der Figur des Dreieckes J L N.

§. 17.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines halben Cylinders gefunden werden, auf welchem ein halbes Achteck als Deckplatte liegt. (Taf. 5 Fig. 16.)

Auflösung. Wegen des Schattens, welchen die achteckige Platte wirft, sehe man §. 8, §. 11, §. 12, und wegen des Schattens, welchen der halbe Cylinder wirft, sehe man §. 14.

Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Erstens suche man den Schatten, welchen der halbe Cylinder auf die Wand wirft. Dann suche man den Schatten, welchen die Platte an die Wand und auf den halben Cylinder wirft. Betrachten wir den Grundriß, so werden die Punkte E a F b d H ihre Schatten theils auf den Cylinder bis bei d' und theils an die Wand, wie bei d^4 und K', werfen. Nimmt man von diesen Punkten die Projectionen und trägt sie im Aufrisse nach E a^2 F b^2 d^2 H C D und zieht von diesen Punkten die Richtungslinien E E', a^2 a^3,.... und ferner im Grundrisse die Richtungslinien E G, a a', F F',.... und schneidet dann die Punkte des Grundrisses G a' F' b' d^4 K' oben in den Richtungslinien an, so erhält man die Punkte E' a^3 F^2 b^3 d^3 d^5 K^4 K^3 K^2 und S; durch die Verbindung dieser Punkte nach der Zeichnung aber ist die Gestalt des Schattens gegeben.

Im Grundrisse ist der Punkt d' derjenige, wo die Lichtstrahlen vorbeistreifen. Er ist die Projection von N und d^3 im Aufrisse, es bildet sich also hier der sogenannte Mittelschatten (§. 1 und §. 9). Die Punkte H und K des Grundrisses werfen ihre Schatten nach K' und die Projection davon im Aufrisse sind die Punkte K^4 K^3 K^2, welche alle in eine und dieselbe senkrechte Linie fallen.

Im Grundrisse würde nur der Schatten sichtbar sein, welchen der Cylinder in die wagerechte Ebene bei d' J d^4 wirft.

§. 18.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines halben Achtecks gefunden werden, worauf eine halbkreisförmige Platte liegt. (Taf. 5 Fig. 17.)

Auflösung. Den Schatten des Körpers an die Wand findet man wie in dem §. 12, den Schatten der Deckplatte wie in §. 9, §. 13, §. 14.

Nimmt man im Halbkreise des Grundrisses die Punkte D a b d e f h l h' c an, trägt diese im Aufrisse nach D a' b^2 d^2 F f' h^3 l^3 l^2 h^5 B, zieht im Aufrisse und im Grundrisse die Richtungslinien der Schattenstrahlen und schneidet dann die im Grundrisse gefundenen Längen bei den Punkten E b' F e' G H C h^2 l' oben hinauf nach a^2 b^2 d^3 e^2 f^2 f^3 h^4 l^4 l^5 h^6 und B, so zeigen diese Durchschnittspunkte, wenn man sie verbindet, die Gestalt des Schattens.

Es sind auch hierbei wieder besonders diejenigen Punkte zu berücksichtigen, wo die Lichtstrahlen an Platte und Prisma vorbeistreifen, wie im Grundrisse die Punkte G H und b und im Aufrisse die Punkte l^3 l^2 l^4 l^5.

§. 19.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Cylinders gefunden werden, worauf eine dreieckige Deckplatte liegt. (Taf. 5 Fig. 18.)

Auflösung. Den Schatten des Körpers an die Wand findet man nach §. 14, den Schatten der Deckplatte nach §. 7, weil im vorliegenden Falle die Deckplatte einen rechten Winkel bildet. Die übereinstimmend in Grund- und Aufriß eingetragenen Buchstaben lassen nach der Zeichnung sehr leicht die Gestalt des Schattens finden.

§. 20.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer rechteckigen Mauervertiefung gefunden werden, welche wagerecht überdeckt ist. (Taf. 5 Fig. 19.)

Auflösung. Die Linie **A B** des Grundrisses ist die Projection der Linie **A B** im Aufrisse, da die Sonne über der Mauervertiefung steht, so ist die Deckenfläche nicht beleuchtet, wird also einen Schatten hinter sich an die Wand werfen. Eben so ist die Fläche des Aufrisses, wovon die Linie **E A** des Grundrisses die Projection ist, nicht erleuchtet, und diese Seitenfläche wird ihren Schatten auf die Rückwand der Mauervertiefung werfen. Betrachtet man den Grundriß, so wirft der Punkt **A** seinen Schatten nach **a**. Der Punkt des Grundrisses **A** aber ist die Projection der Linie **C A** im Aufrisse, folglich, wenn man den Punkt **a** nach a' und a^2 trägt und von dem Punkte **A** des Aufrisses die Richtungslinie $A\,a^2$ zieht, so schneidet sich in a^2 die Schattenlinie ab. Zieht man nun noch im Grundrisse **b F**, trägt **b** nach b' im Aufrisse und zieht $b'\,b^2$, so ist b^2 der Punkt, wo die Breite des Deckenschattens an der hinteren Wand sich bestimmt.

Es bestimmt sich also aus den Grenzpunkten $a'\,a^2\,b^2$ die Gestalt des Schattens im Aufrisse. Der Schatten im Grundrisse wird gefunden, wenn man von **A** nach **a** die Richtungslinie zieht. Es ist alsdann im Grundrisse das Dreieck **A E a** der sichtbare Schatten, denn da im Aufrisse der Schatten der Decke nicht bis in die wagerechte Ebene herunter fällt, so kann er auch nicht in derselben sichtbar werden.

§. 21.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer Mauervertiefung von dreieckiger Grundrißform und wagerechter Decke gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 20.)

Auflösung. Da die Decke der Mauervertiefung nicht erleuchtet werden kann, so wird sie einen Schatten unter sich werfen, und zwar von ihrer vorderen Kante an, welches im Aufriß und Grundriß die Linie **A B** ist. Nimmt man im Grundrisse die Punkte **A b d B** an und zieht die Richtungslinien **A a**, $b\,b'$, $d\,d'$, so ergiebt sich Folgendes.

Der Punkt **A** im Grundrisse ist die Projection der Linie **A C** des Aufrisses, folglich ist der Schattenpunkt **a** im Grundrisse die Projection der Schattenlinie $a'\,a^2$ des Aufrisses. Eben so wirft der Punkt **b** seinen Schatten nach b' und b^2 nach b^3, ferner der Punkt **d** nach d' und im Aufrisse **E** nach d^2.

Der Punkt **B** im Grund- und Aufrisse ist der Endpunkt, wie weit der Schatten gehen kann, und wenn man die Punkte des Grundrisses $a\,b'\,d'\,B$ im Aufrisse bei $a'\,b^3\,d^3\,B$ anschneidet und diese Punkte mit einander verbindet, so ist durch $a^2\,a'\,b^3\,d^2\,B$ die Gestalt des Schattens gegeben.

Im Grundrisse wird das Dreieck **A E a** denjenigen Schatten begrenzen, welcher von der Seitenfläche **A E** in die wagerechte Ebene geworfen wird. Der Schatten, welchen die Decke wirft, ist im Grundrisse nicht sichtbar.

§. 22.

Aufgabe. Es soll der Schatten in einer halbkreisförmigen Mauervertiefung mit wagerechter Decke gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 21.)

Auflösung. Betrachtet man die Zeichnung, so ist der Punkt **a** des Grundrisses die Projection der senkrechten Kante $a'\,a^2$ im Aufrisse, ferner ist die Linie **a r** des Grundrisses die Projection der schattenwerfenden Linie $a'\,r'$ im Aufrisse.

Der Punkt **a** des Grundrisses wirft seinen Schatten nach **b**, folglich wenn man im Aufrisse die Linie $a'\,b'$ zieht und den Punkt **b** des Grundrisses nach dem Punkte b' des Aufrisses normal hinaufschneidet, so ist b' die Projection von **b**, und eine Linie von b' aus abwärts normal gezogen ist die Schattenlinie der Kante $a'\,a^2$ im Aufrisse.

Nimmt man nun im Grundrisse in der Linie **a r** die Punkte **c f h k m** an und zieht von ihnen aus die Linien **c d**, **f g**, **h i**, **k l**, **m n**, so ist **d** der Schattenpunkt von **c**, **g** von **f**, **i** von **h**, **l** von **k** und **n** von **m**. Trägt man nun die Punkte des Grundrisses **c f h k m** normal in den Aufriß nach $c'\,f'\,h'\,k'\,m'$ und zieht aus diesen Punkten die Schattenrichtungen $c'\,d'$, $f'\,g'$, $h'\,i'$, $k'\,l'$, $m'\,n'$ und schneidet aus den Punkten des Grundrisses **d g i l n** normal hinauf nach den Punkten $d'\,g'\,l'\,n'$, so sind diese die gesuchten Schattenpunkte und die Linie des Aufrisses $r'\,n'\,l'\,i'\,g'\,d'\,b'$ ist die Begrenzungslinie desjenigen Schattens, welchen im Aufrisse die Kante $a'\,r'$ auf die gekrümmte Mauervertiefung werfen wird.

Nimmt man ferner zur Uebung an, daß in der wagerechten Decke der Mauervertiefung ein Stück concentrisch ausgeschnitten sei, so wird der Schatten eine ganz andere Gestalt zeigen.

Es sei das in der Decke fehlende Stück durch den Halbkreis (im Grundrisse) **f o p q k h** bezeichnet. Die Projection davon liegt im Aufrisse bei den Punkten $f'\,o'\,h'\,q'\,k'$, zieht man von diesen Punkten die Linien $f'\,g'$, $o'\,d^2$, $h'\,i^2$, $q'\,q^2$, $k'\,l'$, so hat man die Richtungslinien der Schatten.

Sucht man ferner im Grundrisse die Schattenpunkte, so wirft der Punkt **f** seinen Schatten nach **g**, **o** nach **d**, **p** ebenfalls nach **g**, **h** nach **i**, **q** ebenfalls nach **i** und **k** nach **l**.

Trägt man nun die gefundenen Schattenpunkte normal in den Aufriß hinauf, so findet man für den Punkt des Grundrisses **f** im Aufrisse den Punkt g', für **o** des Grundrisses d^2 im Aufrisse, für **p** des Grundrisses i^2 des Aufrisses, für **q** des Grundrisses q^2 des Aufrisses, für **k** des Grundrisses l' im Aufrisse. Verbindet man nun im Aufrisse die Schattenpunkte $g'\,d^2\,i^2\,q^2\,l'$, so ergiebt die dadurch gefundene Linie die Begrenzung des Schattens für das halbkreisförmig ausgeschnittene Stück der wagerechten Decke und die Linie des Aufrisses $r'\,n'\,l'\,q^2\,i^2\,d^2\,g'\,d'\,b'\,b^2$ den ganzen Schatten.

Im Grundrisse würde sich nur so viel Schatten zeigen, als die Sehne **a b** von dem Halbkreise der ganzen Mauervertiefung abschneidet.

Anmerkung. Man kann sich bei gekrümmten Flächen die Betrachtung rücksichtlich der schattenwerfenden Punkte sehr erleichtern, wenn man das hier Folgende sich gut einprägt. Denkt man sich z. B. in der vorliegenden Figur 21 im Aufrisse eine senkrechte Ebene so durch die Mauervertiefung gelegt, daß ihre Grundlinie in die Linie **c d** des Grundrisses fällt.

Die Linie **c d** des Grundrisses ist alsdann zugleich die Projection der Schattenrichtungslinie $c'd'$ des Aufrisses, und der Punkt c im Grundrisse wird seinen Schatten bis d im Grundrisse werfen. Der Punkt c' im Aufrisse aber ist die Projection des Punktes c im Grundrisse. Zieht man von c' im Aufrisse unter 45 Grad die Linie $c'd'$, so ist diese die Projection derjenigen Linie, welche als Schattenlinie in der senkrecht durchliegenden Ebene nach der Richtung der Linie c d des Grundrisses gehen würde. Schneidet man nun aus dem Grundrisse den Schattenpunkt d in dem Aufriß normal nach d' ab, so ist der Punkt d' der gesuchte Schattenpunkt. Der Punkt o des Grundrisses liegt in derselben senkrechten Ebene, seine Projection im Aufrisse aber liegt in o', zieht man nun im Aufrisse $o^2 d^2$ und von dem Grundrißpunkte d eine Normale nach d^2, so ist d^2 der gesuchte Schattenpunkt für o', d^2 liegt aber in derselben senkrechten Ebene wie d', nur etwas höher hinauf, weil die Schattenrichtungslinie jetzt nicht wie vorhin von dem Punkte c' des Aufrisses, sondern von dem Punkte o' des Aufrisses ausgegangen ist.

Eben so kann man sich nach und nach durch alle Schattenlinien des Grundrisses senkrechte Ebenen gelegt denken, welche die Mauervertiefung auch im Aufrisse schneiden und alsdann die Schattenpunkte in diesen senkrechten Ebenen einzeln bestimmen.

§. 23.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer halbkreisförmigen Mauervertiefung, welche halbkugelförmig überwölbt ist, gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 22.)

Auflösung. Betrachtet man Grund- und Aufriß, so ergiebt sich Folgendes. Im Aufrisse sind die Kante $a'a^2$ und der Halbkreis $a^2 k' r'$ die schattenwerfenden Kanten. Denkt man sich an dem Halbkreise (rechts) die Linie o q unter 45 Grad gezogen, so ist diese eine Schattenrichtungslinie, welche aber an dem Halbkreise hinstreift und ihn in dem Punkte p berührt (als Tangente). Es wird also der Punkt p im Halbkreise der letzte sein, welcher einen Schatten hinter sich in die Halbkugel wirft. Es wird also aus demselben Grunde die Kante $p r'$ des Halbkreises erleuchtet sein und keinen Schatten mehr werfen.

Betrachtet man nun den Grundriß, so wirft der Punkt a seinen Schatten nach b. Der Punkt a im Grundrisse aber ist die Projection der ganzen Linie $a'a^2$ des Aufrisses. Zieht man von diesen Punkten die Richtungslinien $a^2 b^2$ und $a'b'$ und von dem Punkte des Grundrisses b normal hinauf die Linie $b\,b'\,b^2$, so ist die Linie $b'b^2$ die Grenze des Schattens von $a'a^2$.

Um nun die Schattenpunkte zu finden, welche der Halbkreis $a^2 k'$ bis p im Aufrisse in die Halbkugel hinein wirft, verfahre man folgendermaßen. Man nehme im Aufrisse die Punkte $a^2 c'$ $f' h' k'$ m an und ziehe von ihnen aus die wagerechten und parallelen Linien I, II, III, IV, so sind diese Linien die Projectionen wagerecht durch die Halbkugel gelegter Ebenen.

Um die Projectionen dieser wagerechten Ebenen auch im Grundrisse zu bestimmen, trage man aus dem Halbkreise des Aufrisses die Punkte $a^2 c' f' h'$ nach dem Grundrisse in die Linie a r normal herunter, so daß a^2 nach a, c' nach c, f' nach f und h' nach h fällt.

Beschreibt man nun im Grundrisse aus dem Mittelpunkte k einen Halbkreis mit dem Halbmesser k c, so erhält man die Projection der Linie II im Aufrisse. Beschreibt man eben so aus k im Grundrisse mit dem Radius k f einen Halbkreis, so erhält man die Projection der Linie III des Aufrisses. Beschreibt man zuletzt im Grundrisse aus k mit dem Halbmesser k h einen Halbkreis, so erhält man die Projection der Linie IV des Aufrisses und folglich die Projectionen im Grundrisse der wagerecht durch die Halbkugel im Aufrisse gelegten Ebenen II, III, IV. Die Projection der Linie I im Aufrisse ergiebt im Grundrisse den Halbkreis, welcher den Umriß der Mauervertiefung ausmacht und mit dem Radius k a beschrieben ist.

Im Grundrisse sind die Projectionen der wagerechten Ebenen gleichlautend wie im Aufrisse mit I, II, III, IV bezeichnet.

Zieht man nun aus den Punkten des Aufrisses $c' f' h' k' m'$ Schattenrichtungslinien $c'd'$, $f'g'$, $h'i'$, $k'l'$, $m'n'$, und im Grundrisse eben so c d, f g, h i, k l, m n, so ist man nunmehr im Stande, alle Schattenpunkte zu finden.

Es wirft im Grundrisse der Punkt c seinen Schatten nach d, zieht man von d aufwärts die Normale $d\,d'$, so ist d' der Schattenpunkt von c' im Aufrisse.

Es wirft im Grundrisse der Punkt f seinen Schatten nach g, zieht man von g aufwärts die Normale $g\,g'$, so ist g' der Schattenpunkt von f' im Aufrisse.

Es wirft im Grundrisse der Punkt h seinen Schatten nach i, zieht man von i aufwärts die Normale $i\,i'$, so ist i' der Schattenpunkt von h' im Aufrisse.

Mit der Linie I im Aufrisse treten die Schattenpunkte in die Halbkugel hinein und liegen nicht mehr wie die vorigen auf einer gekrümmten senkrechten Fläche, es wird demnach auch ein etwas verändertes Verfahren für ihre Auffindung eintreten.

Es wirft der Punkt des Grundrisses k seinen Schatten nach l. Zieht man von l die Normale $l\,l^2$, so ist l^2 die Projection von l in der Linie des Aufrisses I. Sucht man nun eben so zu den Punkten des Grundrisses $l^3\,l^4\,l^5$ die Projectionen in den Linien des Aufrisses II, III, IV, so erhält man im Aufrisse die krumme Linie $l^2\,l'\,k'$, welche die Projection von der geraden Linie des Grundrisses $k\,l^5\,l^4\,l^3\,l$ ist. (I. Abtheil. Projectionslehre. §. 32.)

Denkt man sich nun im Grundrisse die Linie k l als die Grundlinie einer senkrechten Ebene, welche in der Nische auch im Aufrisse errichtet ist, so muß der Punkt k des Grundrisses seinen Schattenpunkt l dahin werfen, wo die Wölbung der Nische den Schattenstrahl des Aufrisses $k'l'$ trifft. (§. 22, siehe Anmerk.) Dies geschieht aber im Aufrisse bei l' und es ist mithin l' die Projection von dem Schattenpunkte des Grundrisses bei l.

Eben so wirft der Punkt m des Grundrisses seinen Schatten nach n. Sucht man wie vorhin die Projectionen der Punkte des Grundrisses $n\,n^2\,n^3$ m im Aufrisse in den Linien I, II, III, IV, so erhält man wieder eine krumme Linie, welche die Projection der geraden Linie des Grundrisses $m\,n^3\,n^2\,n$ ist.

Die Schattenrichtungslinie des Aufrisses $m'n'$ wird von der krummen Linie in n' getroffen. Es ist also n' der Schattenpunkt von n im Grundrisse.

Betrachten wir nun den Punkt des Grundrisses l, so ist er derjenige, wo eine Linie unter 45 Grad daran gezogen, an dem Halbkreise vorbei streifen wird (als Tangente). Es ist aber der Punkt des Grundrisses l zugleich der Projectionspunkt des Punktes p im Aufrisse. Es wird also im Grundrisse bei l und im Aufrisse bei p der Schattenstrahl vorbei streifen und der Punkt des Aufrisses p wird derjenige sein, wo der Schatten aufhört.

Die nach und nach gefundenen Punkte des Aufrisses p n' l' i' g' d' b² b' werden also die Grenze des Schattens angeben, welcher gesucht werden sollte.

Um sich zu überzeugen, daß die Punkte s u des Grundrisses keine Schatten mehr werfen werden, darf man nur die Linien s t und u v ziehen und ihre Projectionen im Aufrisse in den Linien I, II, III, IV suchen, so wird man finden, daß ihre Richtungslinien im Aufrisse schon außerhalb des Kreises fallen (da schon die Richtungslinie o p q des Aufrisses außerhalb fällt), daß sie also auch keinen Schatten in die Wölbung werfen können.

§. 24.

Aufgabe. Es sollen die Schatten an einem Säulenkapital gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 23.)

Auflösung. Nimmt man in der Linie des Grundrisses a n die Punkte a c f h k an, so liegen diese Punkte in derjenigen unteren Kante der viereckigen Platte, welche ihren Schatten unter sich wirft. Der Punkt a wirft seinen Schatten auf den Viertelstab nach b und auf den Säulenstamm nach b'. Im Aufrisse stimmen die Punkte b² b³ mit den vorigen in ihrer Projection überein, sie werden also die Schattenpunkte von b und b' des Grundrisses sein. Eben so findet man für c d d' im Grundrisse c' d² d³ im Aufrisse. Für f g f' im Grundrisse findet man f² g' f³ im Aufrisse, für h i des Grundrisses h' i' im Aufrisse, für k k' des Grundrisses k² k³ im Aufrisse.

Die viereckige Platte wird ferner ihren Schatten hinter sich an die Wand nach n³ n⁴ werfen, wo sich der Schatten des Viertelstabes anschließt. Nun suche man den Schatten des Viertelstabes auf die darunter befindliche viereckige Platte. Denkt man sich im Aufrisse eine Linie unter 45 Grad gegen den Viertelstab gezogen, so wird sie bei dem Punkte v den Viertelstab tangiren; von diesem Punkte wird der Schatten anfangen.

Eben so sucht man die Schatten, welche die beiden Plättchen und der untere Rundstab auf den Säulenschaft werfen.

Man muß hierbei nur Folgendes vor Augen behalten. Will man z. B. die Länge der Schattenlinie c' d² im Aufrisse finden, so sieht man im Viertelstabe die Projection desjenigen Querschnittes, welchen die Linie d d' im Grundrisse angiebt. Es wird im Aufrisse eine gekrümmte Linie entstehen, welche immer länger gezogen ist, je mehr die Schattenpunkte rechts hinrücken. An diese jedesmal gefundene Linie ziehe man eine gerade Linie unter 45 Grad, so daß sie die krumme Linie tangirt, dann ist der Tangirungspunkt derjenige, welcher einen Schatten hinter sich wirft. Die Länge dieses Schattens findet man aus dem Grundrisse, wenn man die an den Säulenschaft oder an die anderen Gliederungen anfallenden übereinstimmenden Schattenpunkte hinaufschneidet. Bei dem Punkte l des Grundrisses streifen die Lichtstrahlen vorbei, es wird also hier der sogenannte Mittelschatten beginnen, auch würde von diesem Punkte aus der Schlagschatten des Säulenschaftes auf die hinten befindliche senkrechte Wand gefunden werden, wenn er sichtbar wäre.

Man zeichne zur Uebung das Kapital recht groß, so wird man bei Annahme vieler Punkte die Schatten der verschiedenen Gliederungen sehr genau finden können. Bei der Kleinheit der Zeichnung konnte hier nur der Gang angegeben werden. Auch vergleiche man den hier folgenden Paragraph.

§. 25.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Wulstes an einem Säulenfuße gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 24.)

Auflösung. Zieht man im Grundrisse die Schattenrichtungslinien a b, c d, e f, g h, i k, l m und betrachtet diese Linien zugleich als Projectionen durch den Wulst gelegter Ebenen, so ergiebt sich Folgendes: Wenn man im Aufrisse die wagerechten Linien I, II, III, IV zieht, so liegt die Projection dieser Linien im Grundrisse, in den Kreisen, welche man durch die Punkte I, II, III, IV beschrieben hat, und man ist nunmehr im Stande, die Projectionen der vorhin erwähnten durchgelegten Ebenen (§. 22, Anmerk.) im Aufrisse zu finden. Betrachten wir zuerst die Linie des Grundrisses a b, trägt man die Punkte dieser Linie, wo sie die Kreise I, II, III, IV schneidet, nach und nach im Aufrisse in die gleichbedeutenden Linien des Aufrisses I, II, III, IV, so erhält man im Aufrisse die Projection der nach der Richtung a b des Grundrisses durchgelegten Ebene, welche im Aufrisse durch den Punkt b' geht.

Trägt man eben so aus dem Grundrisse die Ebene c d hinauf, so erhält man im Aufrisse die Projection dieser Ebene, welche im Aufrisse durch den Punkt c' geht.

Trägt man eben so aus dem Grundrisse die Linie e f hinauf, so erhält man im Aufrisse die Projection dieser Ebene, welche im Aufrisse durch den Punkt d' geht.

Trägt man eben so aus dem Grundrisse die Linie g h hinauf, so erhält man im Aufrisse die Projection dieser Ebene, welche im Aufrisse durch den Punkt e' geht.

Trägt man eben so aus dem Grundrisse die Linie i k hinauf, so erhält man die Projection dieser Ebene im Aufrisse, welche durch die Punkte des Aufrisses f und h' geht.

Nachdem man nun im Aufrisse die Projectionen aller dieser Ebenen aus dem Grundrisse gefunden hat, ziehe man im Aufrisse unter einem Winkel von 45 Grad die Schattenrichtungslinien bei A A' A² A³ A⁴ A⁵ A⁶ A⁷, und zwar so, daß sie an den Umrissen der gefundenen Ebenen vorbeistreifen (oder, was dasselbe ist, sie tangiren). Bemerkt man diejenigen Punkte, wo die Linien A A'.... die krummen Linien berühren, so ergeben sich die Punkte des Aufrisses a' b' c' d' e' f' h' k'. Verbindet man nun diese Punkte durch eine Linie, so zeigt diese Linie den Umriß desjenigen Schattens (Mittelschattens), welcher auf dem Wulst entsteht. Unterhalb der Punkte a' b' c'.... nämlich hören die Lichtstrahlen auf zu beleuchten, weil sie nur vorbeistreifen.

Dasselbe wird bei dem Punkte g' des Aufrisses der Fall sein und deshalb wird die gesuchte Linie auch durch diesen Punkt gehen.

Aus diesem Beispiele ergeben sich zugleich die Auffindung der Schatten für alle nach außen (convex) oder auch nach innen (concav) gebogene und zugleich im Grundrisse kreisrunde Gliederungen, deren man zur Uebung mehrere beliebige zeichnen kann.

§. 26.

Aufgabe. Es sollen die Schatten für den Aufriß eines Gesimses gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 25.)

Auflösung. Zieht man an dem oberen Viertelstabe die Linie a b unter 45 Grad, so daß sie den Viertelstab tangirt, so wird der Punkt a seinen Schatten nach b werfen. Denkt man sich durch den Punkt a eine wagerechte Linie gezogen, so werden alle Punkte dieser Linie einen Schatten unter sich, so gut wie der Punkt a, und auch eben so weit werfen. Zieht man also durch den Punkt b eine wagerechte (punktirte) Linie, so ist diese die Schattenlinie.

Eben so wird der Punkt c seinen Schatten bis d werfen. Die wagerechte Linie aber, welche durch c geht, ist die untere schattenwerfende Kante der Hängeplatte, und jeder Punkt derselben wird einen Schatten unter sich werfen, eben so tief, wie die Linie c d lang war; es wird also die wagerechte (punktirte) Linie, welche durch d gezogen ist, den Schatten der Unterkante der Hängeplatte bezeichnen.

Die Kehlleiste, welche sich unter der Hängeplatte befindet, wird also ganz im Schatten zu liegen kommen; eben so oberhalb das Plättchen und die Hohlkehle, welche sich unter dem Viertelstabe befinden.

Man ersieht ferner, daß das Aufsuchen der Schatten wagerecht fortlaufender und übereinander liegender Gliederungen keine Schwierigkeiten darbietet.

§. 27.

Aufgabe. Es sollen die Schatten eines im Grundrisse gezeichneten Gesimses gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 25.)

Auflösung. Zu diesem Zwecke muß man sich den Aufriß des Gesimses umgestürzt denken, so daß die oberste Kante desselben, F G, in der wagerechten Ebene liegend gedacht wird. Es wird also die Linie des Aufrisses F G unten und der Punkt d des Aufrisses oben zu denken sein. Denkt man sich ferner das ganze Gesims bei d abgeschnitten, so wird jetzt die Kante d f des Aufrisses die äußerste Höhenkante des Gesimses bedeuten.

Der Punkt des Aufrisses d aber wird unter 45 Grad seinen Schatten bis zu dem Punkte A des Aufrisses in die wagerechte Grundebene werfen (wovon jetzt die Linie F G des Aufrisses die Projection bedeutet). Eben so wird die ganze Kante d f des Aufrisses ihren Schatten eben so weit in die Grundebene werfen. Im Grundrisse ist der Punkt B die Projection des Punktes d im Aufrisse. Zieht man nun im Grundrisse unter 45 Grad die Richtungslinie B N und trägt die Breite des Schattens aus dem Aufrisse herunter, so wird man finden, daß die Linie B N des Grundrisses bis zur Schattenlinie A K des Grundrisses herunterreichen würde, wenn man B N hinlänglich verlängert hätte. Ferner wirft der Punkt B des Grundrisses seinen Schatten bis bei E in die Tropfrinne hinein.

Der Projectionspunkt von B im Aufrisse ist der Punkt O im Grundrisse, und die Richtungslinie O M des Grundrisses wird bei M durch die Schattenlinie D M geschnitten. Betrachtet man nämlich im Aufrisse den Punkt D, so deutet er denjenigen Punkt der Kehlleiste an, wo die Lichtstrahlen vorbeistreifen; es wird dies aber bei jedem Punkte der Kehlleiste geschehen, welcher mit D in einer wagerechten Linie liegt. Nun ist im Grundrisse der Punkt D' die Projection von D im Aufrisse und die Linie des Grundrisses D M wird die schattenwerfende Kante der Kehlleiste sein. Der Punkt des Aufrisses D wirft seinen Schatten bis E. Im Grundrisse ist G die Projection von H im Aufrisse; es wird also im Grundrisse die Linie E L die Schattenbreite angeben, welchen Schatten der Punkt D des Aufrisses bis E wirft, und welcher sich in der Linie E L des Grundrisses darstellt. Im Aufrisse wirft

der Punkt H seinen Schatten nach J. Im Grundrisse ist die Projection dieses Schattens durch die Linien $E' E^2$ und $E^2 E^3$ ausgedrückt. Im Aufrisse wirft der Punkt a seinen Schatten nach F. Im Grundrisse ist der Schatten davon die Linie a P, denn der Punkt a des Aufrisses stellt die ganze schattenwerfende Kante des Viertelstabes vor. Endlich wirft diese Kante im Grundrisse nach der Linie H F F' einen Schatten und bei F' schließt er sich dem Schatten der Hängeplatte an.

§. 28.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines **vor** einer senkrechten Ebene stehenden Kreuzes auf diese senkrechte Ebene gefunden werden. (Taf. 6 Fig. 26.)

Auflösung. Man wird sich das Schattensuchen für diesen Fall, so wie für viele ähnliche sehr erleichtern, wenn man zuerst die vordere Fläche des gegebenen Körpers als schattenwerfend betrachtet und für dieselbe den Schatten an der Wand so sucht, als stände diese vordere Fläche allein (ohne Dicke) vor der senkrechten Wand. Ist dies geschehen, so sucht man in gleicher Weise den Schatten für die hintere Fläche allein, und verbindet alsdann diese beiden gefundenen Schatten in ihren zusammenstimmenden Endpunkten, um den Schatten des ganzen Körpers zu finden. Das gegebene Beispiel wird dies deutlicher machen.

Betrachtet man den Grundriß, so ist die Linie a f k m die Projection der ganzen vorderen Fläche des Kreuzes.

Eben so ist im Grundrisse die Linie c h q o die Projection der ganzen hinteren Fläche des Kreuzes.

Nun bestimme man die vordere Fläche als Schattenfläche.

Der Punkt a des Grundrisses wirft seinen Schatten nach b. Es ist a der Projectionspunkt von a' und a^2 im Aufrisse. Zieht man von diesen die Richtungslinien $a^2 b^2$ und $a' b'$ und schneidet von b nach b' und b^2 hinauf, so ist $b' b^2$ die erste gefundene Schattenlinie.

Eben so wirft der Punkt f des Grundrisses seinen Schatten nach g. Der Punkt f aber ist die Projection der Punkte $f' f^2 f^3$ im Aufrisse, zieht man von diesen aus die Richtungslinien und schneidet von g aus die Punkte $g' g^2 g^3$ an, so hat man wieder eine schattenwerfende Kante gefunden.

Eben so wirft der Punkt k seinen Schatten nach l. Der Punkt k aber ist die Projection der Punkte $k' k^2 k^3$. Zieht man von diesen Punkten die Richtungslinien und schneidet den Punkt l nach $l' l^2 l^3$ hinauf, so erhält man wieder eine Schattenkante.

Eben so wirft der Punkt des Grundrisses m seinen Schatten nach n. Der Punkt m aber ist die Projection der Punkte $m' m^2$ im Aufrisse und diese werfen ihren Schatten nach $n' n^2$.

Ferner wirft aus ganz gleichen Gründen die Linie des Grundrisses a f ihren Schatten nach $b^2 g^2$ des Aufrisses, weil a f die Projection der ganzen Fläche $a^2 f^2 f^3 a'$.

Eben so wirft die Linie k m des Grundrisses ihren Schatten nach $l^2 n'$ und $l^3 n^2$.

Ganz in gleicher Weise findet man den Schatten der hinteren Kreuzfläche, wenn man für die Punkte c h q o des Grundrisses die Schattenpunkte d e g p bestimmt und die dazu gehörigen Schattenpunkte im Aufrisse sucht.

Zieht man alsdann noch im Aufrisse die Linien $d^2 b'$, $g' l'$ und $p' n'$, so sind diese Linien die Schattenkanten von den Grundrißprojectionen a c, k g, m o, und der Schatten des Kreuzes ist gefunden.

§. 29.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines von einer senkrechten Wand abstehenden prismatischen Körpers gefunden werden, welcher eine prismatische Oeffnung hat. (Taf. 6 Fig. 27.)

Auflösung. Man verfahre ganz ähnlich, wie im vorigen §. 28; man suche nämlich zuerst den Schatten der vorderen Fläche und dann den Schatten der hinteren Fläche.

Die Punkte des Grundrisses f k n werfen ihre Schatten nach g l o und im Aufrisse übereinstimmend nach $g' l^2 o'$. Die Punkte des Grundrisses a c h m werfen ihre Schatten nach b d g i l und im Aufrisse nach $b' l' g' l^2$. Zieht man nun noch $l' o'$, so ist diese Linie die Schattenkante von n m des Grundrisses, und das Rechteck im Aufrisse g' w z v wird nicht vom Schatten bedeckt werden.

§. 30.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer achteckigen Pyramide gefunden werden, welche vor einer senkrechten Ebene steht. (Taf. 6. Fig. 28.)

Auflösung. Es stelle im Grundrisse die Linie **A B** die Projection der senkrechten Ebene vor, an welcher die Pyramide steht. Denkt man sich im Scheitelpunkte g des Grundrisses die Richtungslinie des Schattens $g g^3$ gezogen, eben so im Aufrisse von dem Scheitel g' die Linie $g' g^2$, und schneidet man aus dem Grundrisse g^3 nach g^2 hinauf, so hat man den Schatten des Scheitelpunktes gefunden. Denkt man sich ferner im Grundrisse die Linien a b c und d e f gezogen, und zieht man von a und b durch f die Richtungslinie bis b^3 und von d durch e die Richtungslinie $c e^3$, so wirft der Punkt des Grundrisses a seinen Schatten nach b^3 und im Aufrisse nach a^2. Eben so wirft der Punkt b seinen Schatten im Grundrisse nach b^3 und im Aufrisse nach b^2. Es ist also die Linie $a^2 b^2$ im Aufrisse die Schattenlinie von a b im Grundrisse, und b^2 der Schattenpunkt von b^3.

Eben so findet man für die Linie des Grundrisses d e den Schattenpunkt e^3 und im Aufrisse die Linie $d' e'$. Es sind also im Aufrisse die Punkte $b^2 e^2$ die Schattenpunkte der Kante g b e des Grundrisses, und wenn man im Aufrisse die Linie $g^2 b^2 e^2$ zieht, so hat man die Schattenlinie der einen Seite. Zieht man auf der andern Seite der Achse die Linie g^2 h unter gleichem Winkel gegen die Achse, wie $g^2 b^2 e^2$, so erhält man die andere Schattenkante.

Man kann sich im Grundrisse a b, b c und d e, e f als die Seiten durch das Prisma gelegter Ebenen denken und für jede dieser freischwebenden Ebenen den Schatten an der senkrechten Wand suchen, wodurch man sich die Vorstellung noch erleichtern und dasselbe Ergebniß wie vorhin finden wird.

§. 31.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Cylinders gefunden werden, welcher in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung hat (wie ein Mühlstein gestaltet ist). (Taf. 6 Fig. 29.)

Auflösung. Betrachtet man den Grundriß, so übersieht man leicht, daß man, um den Schatten des ganzen Körpers zu finden, nur nöthig hat, erst den Schatten der vorderen Fläche, dann den Schatten der hinteren Fläche zu suchen und diese beiden Schatten mit einander zu verbinden. Es sind hier nur diejenigen Punkte aufgesucht worden, welche sichtbar werden, da der Schatten der ganzen hinteren Fläche zum Theil von dem Körper, zum Theil von dem Schatten der vorderen Fläche verdeckt wird. Zieht man im Grundrisse die Richtungslinien g h, i k, e f, a b und c d, so ist f' im Aufrisse der Schattenpunkt für den Mittelpunkt der Kreise, und folglich f' auch Mittelpunkt für die beiden Schattenkreise, und man hat nur nöthig, mit den Halbmessern der beiden gegebenen Kreise die Kreisstücken $f^2 k' h'$ und $b' d'$ m aus dem Punkte f' zu ziehen, um den Schatten der vorderen Kreisfläche zu finden.

Bei dem Punkte a' des Aufrisses streifen die Lichtstrahlen vorbei. Die Projection von a' ist a im Grundrisse, welches seinen Schatten nach b wirft, es wird demnach $a' b'$ die Verbindungslinie der vorderen und hinteren Kreisschattenfläche werden, wovon man sich sogleich überzeugen kann, wenn man den Schatten für die hinteren Kreisflächen wirklich sucht, ihr Mittelpunkt liegt im Aufrisse bei n'.

Man wird die Schattenkreise ebenfalls ganz übereinstimmend finden, wenn man in den Kreisen einzelne Punkte im Aufrisse annimmt, wie $g' i' e' a'$, davon die Projectionen in den Grundriß trägt, im Aufrisse und Grundrisse die nöthigen Richtungslinien der Schattenstrahlen zieht und die Schattenpunkte, wie bisher immer, aus dem Grundrisse hinauf schneidet, wo man alsdann die Punkte $h' k' f^2 a' b' c d'$ m finden wird, welche in den Schattenkreisen liegen. Je mehr Hülfspunkte man annimmt, desto genauer würde man die Kreislinien der Schatten finden, wenn man ihre Mittelpunkte nicht suchen wollte.

Anmerkung 1. Es stehe derselbe Cylinder mit seiner wagerechten Achse normal gegen die senkrechte Wand, man soll seinen Schatten auf der Wand finden. (Taf. 6 Fig. 30.)

Um diese Aufgabe zu lösen, bemerke man Folgendes. Im Aufrisse bezeichnen die Punkte $a^2 a^3$ die Mittelpunkte der vorderen und hinteren Kreisebene und zugleich die Linie $a^2 a^3$ die den Mittelpunkten wagerecht gegenüber liegenden Verbindungslinien der inneren Höhlung, und der äußeren Verbindungslinien des wagerechten Durchmessers.

Die Linien $b^2 b^3$ und $g' g^2$ bezeichnen die Verbindungslinien der kleineren Kreise, wenn man dieselben in acht gleiche Theile theilt; die Linien $c^2 c^3$ und $e^2 e^3$ die oberen und unteren Verbindungslinien der kleinen Kreise, $d^2 d^3$ und $h^2 h^3$ die Verbindungslinien der beiden großen Kreise, wenn man dieselben in acht gleiche Theile theilt; $f^2 f^3$ und $k^2 k^3$ endlich die oberen und unteren Verbindungslinien der großen Kreise.

Dieselben übereinstimmenden Bezeichnungen sind für den Grundriß gewählt, so daß z. B. $a^2 a^3$ des Aufrisses mit a a' des Grundrisses übereinstimmt u. s. w.

Um nun den Schatten des Körpers an der senkrechten Wand zu finden, suche man zuerst den Schatten des vorderen Kreises, dessen schattenwerfende Punkte im Grundrisse a b c d f g e h k sind, von diesen ziehe man die Richtungslinien bis an die senkrechte Wand im Grundrisse. Alsdann ziehe man im Aufrisse von den Punkten $a^2 b^2 c^2 d^2 f^2 g^2 e^2 h^2 k^2$ die Schattenrichtungslinien und schneide aus dem Grundrisse die übereinstimmenden Schattenpunkte an der Wand hinauf, so findet man den Schatten der vorderen Fläche, deren Mittelpunkt **M** sein wird.

Eben so suche man den Schatten für die hintere Fläche des Körpers. Verbindet man die gefundenen Kreise, so hat man den Schatten des ganzen Körpers.

Es ist hier der ganze Schatten gezeichnet worden, obgleich die Hälfte davon unter die Grundlinie fällt und nicht sichtbar sein würde; denkt man sich aber den Körper gleichsam an der senkrechten Wand schwebend und die senkrechte Ebene dahinter tief genug herunterreichend, so wird der Schatten auf derselben sich so zeigen, wie er Fig. 30 vorgestellt ist.

§. 32.

Schlußbemerkungen zu den Schatten-Constructionen.

Nachdem in dem Vorangegangenen die Auffindung der zugehörigen Schatten an mannigfaltigen Beispielen gezeigt worden ist, können wir folgende Schlüsse daraus ziehen, um das Verfahren bei dem Aufsuchen der Schatten in der Anwendung zu erleichtern.

1) Man thut sehr gut, immer nur den Schatten zu suchen, welchen ein einzelner Punkt auf eine bestimmte Ebene wirft, da auch die schwierigste Linie immer aus vielen Punkten zusammengesetzt betrachtet werden kann. Sucht man nun nach und nach den Schatten, welchen die einzelnen Punkte einer Linie werfen, so findet man auch nach und nach den Schatten jeder beliebig gestalteten ganzen Linie.

Da ferner jede Ebene durch Linien begrenzt wird, so findet man auf demselben Wege (durch das Aufsuchen einzelner Schattenpunkte) auch den Schatten ganzer Flächen, wenn man die Schatten der begrenzenden Linien aufsucht. Da ferner die Körper wieder durch Flächen begrenzt werden, so findet man die Schatten der Körper, wenn man die Schatten der sie begrenzenden Flächen aufsucht, welches aber alles durch das Aufsuchen einzelner schattenwerfender Punkte nach einander geschehen kann.

Es folgt hieraus, daß wenn man im Stande ist, den Schatten eines einzelnen Punktes überhaupt zu finden, so ist man auch im Stande, den Schatten jeder Linie, jeder Fläche und jedes Körpers zu finden, wenn man recht viele schattenwerfende Punkte annimmt und ihre Schatten einzeln nach einander bestimmt.

2) Bestehen die Körper aus Zusammensetzung mehrerer einzelner Stücke, so erleichtert es das Verfahren sehr, wenn man die Schatten der einzelnen Stücken nach einander sucht, z. B. wenn der Körper eine Deckplatte hat, so sucht man erst den Schatten des Körpers allein und dann den Schatten der Deckplatte auch allein, und umgekehrt. Stände derselbe Körper an einer senkrechten Wand, so suchte man hiernach erst den Schatten des Körpers auf die Wand, dann den Schatten der Deckplatte auf die Wand und endlich den Schatten der Deckplatte auf den Körper.

3) Das Aufsuchen des Schattens eines Körpers erleichtert man sich ferner, wenn man zuerst den Schatten für sich allein sucht, welchen die vordere Ebene wirft; dann den Schatten wieder für sich allein findet, welchen die hintere Ebene wirft, und zuletzt die Verbindungslinien der beiden Schattenebenen bestimmt.

Im Ganzen aber übersieht man hiernach, daß man immer auf die nach und nach erfolgende Bestimmung einzelner Schattenpunkte zurück geführt wird.

4) Bei einwärts (concav) oder auswärts (convex) gekrümmten Flächen, auf welche Schatten fallen, thut man am besten, sich durchgelegte senkrechte Ebenen zu denken, in welchen man die einzelnen Längen der Schattenstrahlen bestimmt, wie wir z. B. bei der Nische Taf. 6 Fig. 22 gezeigt haben.

5) Nochmals muß erinnert werden, daß das Aufsuchen der Schatten in weiter nichts besteht, als in dem Aufsuchen der Projectionen der Länge der Schattenstrahlen. Wenn man also im Stande ist, mit Leichtigkeit die Projectionen gegebener Punkte auf ebenfalls gegebenen Ebenen aufzusuchen, so wird auch das Auffinden der Schatten keine Schwierigkeit darbieten; wäre man aber dagegen mit dem Auffinden von Projectionen nicht hinlänglich vertraut, so wird man auch niemals im Stande sein, die zu suchenden Schatten bestimmen zu können.

6) Der Umstand, dessen wir bei dem Zeichnen der Projectionen erwähnten, daß man nämlich nur durch das Aufsuchen selbst und nicht durch das bloße Betrachten und Verstehen der in dem Buche befindlichen Figuren und Beispiele, Fertigkeit im Schatten- (und Projections-) Zeichnen erhalten wird, gilt auch hier; nur wenn man alle im Buche gegebenen Beispiele auf einem besonderen Reißbrette Schritt für Schritt verfolgt, wird man nach und nach das Auffinden gegebener Schatten bald erlernen, sonst niemals.

B. Tuschen der Körper und Schatten.

§. 33.

Erklärung. Unter Tuschen versteht man die Abtönung gezeichneter Flächen oder Körper mit einer beliebigen Färbung, um die verschiedenen Lagen der Ebenen gegen einander dem Auge bemerkbar zu machen, auch die verschiedenen Vor- oder Rücksprünge darzustellen und überhaupt die Form der Körper in ihrer Eigenthümlichkeit dem Beschauer deutlich zu machen.

2) Der Farbenton, mit welchem man tuscht, ist gleichgültig, er kann schwarz, braun, röthlich ꝛc. sein, nur geschieht es gewöhnlich mit einerlei Farbenton, schwarz oder braun.

3) Das Tuschen findet, in oben erwähntem Sinne, meistentheils bei sogenannten geometrisch gezeichneten Körpern statt.

4) Man bedient sich dazu gewöhnlich der schwarzen chinesischen Tusche, eines Pinsels und eines Tuschnäpfchens von Glas oder Porzellan. Es wird nicht überflüssig sein, über diese Werkzeuge Einiges zu sagen.

Eine gute chinesische Tusche erkennt man an einem glänzenden Bruche, und wenn man sie mit etwas weichem Wasser in einen Tuschnapf einreibt, muß sie trocken geworden glänzend braun-schwarz erscheinen. Auch muß sie rasch trocknen und, nachdem sie getrocknet ist, muß sie sich mit dem Finger nicht abreiben lassen, sondern an dem Papiere fest haften.

Wenn man die Tusche in das Tuschnäpfchen einreibt, muß man immer nur sehr wenig Wasser dazu nehmen und das Näpfchen erst dann mit mehr Wasser füllen, wenn man die Tusche eingerieben hat.

Nimmt man nämlich zu viel Wasser auf einmal, so wird die Tusche zu weit nach oben hin naß, und alsdann springt sie bei dem Trocknen ab. Auch muß man, um dieses Abspringen der Tusche zu vermeiden, dieselbe jedesmal nach dem Einreiben mit etwas Papier abwischen.

Was den Pinsel anbelangt, so muß er, wenn man ihn im Munde anfeuchtet und über ein Papier hinfährt, immer Spitze halten und darf er sich ganz besonders nicht spalten.

Bei dem Tuschen selbst muß man mit dem Pinsel immer nach einer Richtung hin fahren, nicht hin und her, weil es sonst Flecken giebt. Gewöhnlich streicht man von der Linken zur Rechten und von oben nach unten, weil es so am bequemsten ist.

Hauptsächlich muß man sich üben, auch größere Flächen ganz gleichmäßig ohne Flecken anzulegen. Die sogenannten französischen geschliffenen Tuschpinsel sind die besten.

Wenn man sich gewöhnt, mit größeren Pinseln zu arbeiten, so ist es besser, als wenn man kleine nimmt, da bei kleinen Pinseln die Flächen leicht fleckig werden.

Bei Anlegung größerer Flächen muß man genau darauf achten, daß keine Tuschränder stehen bleiben, man muß immer mit dem Pinsel da wieder ansetzen, wo die Tusche noch naß ist, weil sonst ebenfalls Flecken entstehen.

Ueber die Tuschnäpfchen läßt sich nur sagen, daß sie inwendig ganz glatt sein müssen, auch sind die tieferen besser als die flacheren, und die kugelförmige Höhlung derselben ist besser als die cylinderförmige, weil in dem scharfen Rande der letzteren die Tusche leicht eintrocknet, was zu Flecken Veranlassung giebt.

Alte eingeriebene Tusche, welche im Tuschnäpfchen angetrocknet ist, darf man niemals wieder brauchen, weil sie Flecken macht und auch keine Bindekraft mehr hat; man muß sie also immer sorgfältig auswaschen, ehe man neue Tusche einreibt.

Das Papier, worauf man tuscht, muß niemals fettig sein, man thut daher gut, wenn man bei dem Aufspannen des Papieres dasselbe auf beiden Seiten naß macht, sowohl auf der Seite, welche dem Zeichenbrette zugekehrt ist, als auf der Seite, welche nach oben hin liegt.

§. 34.

Von den Farbentönen.

Streicht man irgend eine Fläche mit Tusche einmal an, so sagt man, die Fläche hat einen Ton bekommen. Unter dem Ausdrucke Ton versteht man also den einmaligen Anstrich einer Fläche mit Tusche.

Je nachdem die Tusche, womit man angestrichen hat, dunkler oder heller ist, wird auch der Ton (Farbenton) dunkel oder hell genannt.

Streicht man eine Fläche mit Tusche zweimal an, so sagt man, die Fläche hat zwei Töne bekommen, bei dreimaligem Anstrich drei Töne u. s. w.

Je öfter man eine Fläche mit Tusche überzieht, um so dunkler wird ihr Farbenton werden.

Will man (namentlich große) Flächen abtönen, so ist es besser, sie mit einem hellen Tuschtone mehrere Male zu überstreichen, als gleich anfangs einen sehr dunklen Ton zu nehmen, da bei einem dunklen Tone der Anstrich leicht fleckig wird. Bei der Abtönung verschiedener Flächen gelten folgende Regeln.

1) Man giebt den verschiedenen Flächen deshalb verschiedene Farbentöne, um ihre verschiedene Lage und Gestalt dem Auge des Beschauers deutlich zu machen.

2) Je näher eine Fläche dem Auge des Beschauers ist, in je hellerem Lichte wird sie ihm erscheinen, und umgekehrt, je weiter eine Fläche vom Auge des Beschauers entfernt ist, um so geringer (matter) wird das Licht auf der Fläche erscheinen.

Man kann sich hiervon bei Sonnenschein jeden Augenblick in der Natur überzeugen. Die beleuchteten nahen Gegenstände haben ein viel helleres Licht, als die entfernteren, das heißt, die entfernteren Gegenstände haben einen dunkleren Farbenton als die nahen.

Um nun diese Farbenabtönung auf dem Papiere mit Tusche hervorzubringen, hat man kein anderes Mittel, als die Flächen mehrere Male mit einerlei Farbenton zu überlegen, je nachdem sie dem Auge näher oder entfernter stehen. Stände z. B. eine Ebene dem Auge nahe, so würde man sie einmal mit Tusche überziehen. Stände hinter dieser Ebene eine zweite, so würde man diese zweite Ebene zweimal anlegen, um ihren Abstand gegen die erste zu bezeichnen.

Durch das zweimalige Ueberlegen der hinteren Ebene aber wird diese um einen Ton (Farbenton) dunkler werden, als die vordere Ebene; weil das Licht auf der hinteren (entfernteren) Ebene matter erscheint, als das Licht auf der vorderen Ebene. Hieraus folgt ferner, daß man zurückstehende Ebenen um so viel mehrmal abtönt, je weiter sie vom Auge des Beschauers entfernt sind. Ständen demnach z. B. vier Ebenen hintereinander, so würde man die erste einmal, die zweite zweimal, die dritte dreimal, die vierte viermal mit ein und demselben Farbentone überlegen.

Es ist leichter, bequemer und sicherer, immer mit einerlei Ton zu arbeiten und ihn mehrere Male auf einander aufzutragen (wenn der vorhergehende Auftrag trocken ist), als daß man die Farbentöne der entfernteren Gegenstände gleich dunkler mischt, als die der näheren. Durch mehrfaches Ueberlegen derselben Fläche hat man die Abstufung und Fleckenlosigkeit der Zeichnung viel mehr in seiner Gewalt.

3) Wo das Licht rechtwinklig auffällt wirkt es am stärksten; das heißt, diejenigen Flächen oder diejenigen Stellen der Körper, welche rechtwinklig gegen die einfallenden Sonnenstrahlen stehen, werden am hellsten sein, sie werden also am wenigsten oft mit Farbentönen angelegt werden müssen.

Das höchste Licht, welches man auf dem weißen Papiere hervorbringen kann, ist, daß man das Papier rein stehen läßt und es nicht mit Tusche anlegt. Es bleiben also in der Zeichnung diejenigen Stellen, durch welche man das höchste Licht ausdrücken will, rein weiß stehen, ein gemäßigteres Licht aber würde nach Umständen ein, zwei, auch mehrere Male mit heller Tusche anzulegen sein.

Bei dem Schattensuchen haben wir angenommen, daß die Lichtstrahlen sowohl im Grundrisse, als auch im Aufrisse unter einem Winkel von 45 Grad einfallen; wäre nun eine Fläche so geneigt, daß sie normal gegen diese Richtung der Sonnenstrahlen stände, so würde sie im höchsten Lichte sein.

4) Für die Schatten gilt gerade das Gegentheil hinsichtlich des Grades ihrer Helligkeit oder Dunkelheit, was bei dem Lichte gegolten hat.

Je näher ein Schatten dem Auge des Beschauers ist, um so kräftiger (um so dunkler) erscheint er.

Je weiter ein Schatten von dem Auge des Beschauers ist, um so matter (um so heller) erscheint er.

Jeder Schatten, er sei Halbschatten oder Schlagschatten, erscheint immer noch dunkler, als die dunkelste Lichtfläche. Wo der Schatten unter einem rechten Winkel auf eine Fläche oder einen Körpertheil fällt, ist der Schatten am stärksten (folglich am dunkelsten).

So wie man bei den Flächen, welche im Lichte sich befinden, die verschiedenen Grade der Helligkeit oder Dunkelheit dadurch hervorbrachte, daß man sie mit einerlei Farbentone ein oder mehrere Male anlegte, eben so geschieht dies bei den Schatten; auch hier bringt man die größeren Grade der Dunkelheit dadurch hervor, daß man sie mit einerlei Farbenton mehrere Male überlegt.

Der Farbenton, welchen man zum Anlegen der Schatten verwendet, muß an und für sich dunkler sein, als der dunkelste Lichtton, welcher bei dem zu tuschenden Körper vorkommt.

5) Bei dem Tuschen der Körper verfährt man am besten und bequemsten auf folgende Weise.

Zuerst tuscht man die beleuchteten Flächen, ohne Rücksicht auf die darauf fallenden Schatten, und legt dabei die Schatten immer mit über, so daß, wenn diese Arbeit vollendet ist, alle Schatten so dunkel erscheinen, wie der dunkelste, im Bilde vorkommende Lichtton.

Dann macht man sich einen Schattenton zurecht, welcher dunkler ist, als der im Bilde vorkommende dunkelste Lichtton. Mit diesem Schattentone nun legt man zuerst alle Schatten einmal über und, nachdem diese Ueberlage getrocknet, überlegt man den schwächsten Schatten nicht mehr, wohl aber überlegt man mit demselben Schattentone die stärkeren und stärksten Schatten nach und nach so oft, bis das Bild die gehörige Wirkung thut.

Die folgenden Beispiele werden dies deutlicher machen.

6) Das sogenannte Verwaschen der Farbentöne findet statt, wenn ein dunkler Licht- oder Schattenton in einen helleren unmerklich übergehen soll, ohne daß eine Schatten- oder Lichtkante statt findet. Bei runden Körpern z. B. liegt ein Theil dem Auge am nächsten, die andern entfernen sich mehr und mehr von demselben, ohne Kanten oder Ecken zu bilden. Soll nun diese Entfernung durch das Tuschen ausgedrückt werden, so muß man die Farbentöne so in einander verschmelzen, daß kein Absatz oder keine scharfe Kante sichtbar wird. Diese Verschmelzung nun geschieht durch das Verwaschen der Farbentöne, und dies wird auf folgende Weise erreicht.

Gesetzt, man hätte einen senkrechten Streifen getuscht und wollte ihn mit dem weißen Papiere verwaschen, so steckt man sich auf den Pinselstiel zwei Pinsel (einen oben, einen unten daran), den einen Pinsel füllt man mit dem Tuschtone, den andern mit reinem Wasser, jedoch nur so, daß er halb trocken ist. Alsdann legt man den Tuschstreifen mit dem Tuschpinsel an, dreht den Pinselstiel um und fährt mit dem halbtrockenen Wasserpinsel an dem Ende des Tuschstreifens herunter, so daß die Tusche sich in das Weiße des Papieres hinein zieht und der Farbenton dadurch sich gleichsam mit dem weißen Papiertone verschmilzt. Eben so kann man auch andere dunklere oder hellere Töne beliebig in einander verwaschen.

Die folgenden Beispiele werden dies deutlicher machen.

7) Zum Gelingen der Tuschzeichnungen ist noch Folgendes zu bemerken.

Man muß den ersten Ton, womit man die Lichtflächen anlegt, so hell wie möglich nehmen, aber doch auch so dunkel, daß er sich hinlänglich gegen das weiße Papier unterscheidet.

Man muß den ersten Ton, womit man die Schattenflächen anlegt, so dunkel nehmen, als der dunkelste Lichtton im Bilde ist.

Man muß nie zu naß verwaschen, weil sonst Flecken entstehen.

Größere Flächen muß man rasch und naß anlegen, wenn man sie fleckenlos darstellen will. Besonders muß man sich hüten, Tuschkanten bei Ueberlegung von Flächen stehen zu lassen, weil diese nie wieder wegzubringen sind und immer dunkle Flecken machen.

Man merke wohl, was in diesem §. 34 alles gesagt worden ist, da es in allen folgenden Paragraphen fortwährend Anwendung findet.

§. 35.

Aufgabe. Einen prismatischen Körper zu tuschen.

Auflösung. Es sei (Taf. 7 Fig. 31) der Aufriß eines Prisma gegeben, welches um die Hälfte seiner Breite vor einer senkrechten Mauer vorspringt, und sein Schlagschatten falle rechter Hand auf die Mauer, wie in der Zeichnung angegeben ist, so hat man in der vorderen Ansicht des Prisma nichts weiter, als eine ebene Fläche. Diese Fläche wird mit einem Tone angelegt. Es sieht immer sauber aus, wenn man wie in der Zeichnung an den Lichtseiten der Fläche, also hier an der linken und oberen Kante, schmale Lichtlinien stehen läßt. Auch in der Natur kann man diese Lichtkanten zuweilen bemerken, besonders wenn die Kanten des Körpers nicht mehr ganz genau scharf, sondern schon etwas abgenutzt sind.

Der neben dem Körper liegende Schlagschatten wird mit dem ersten Tuschtone ebenfalls überlegt, alsdann mischt man sich einen dunkleren Ton für den Schlagschatten und überlegt diesen einmal, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Die Mauer selbst hat hier keinen Farbenton erhalten, sondern es ist nur der darauf fallende Schlagschatten abgetönt, was auch für alle folgenden Figuren dieser Tafel gilt.

Hätte man die Fläche hinter dem Prisma auch abtönen wollen, so würde sie zweimal angetuscht worden sein, da sie weiter zurücksteht, als die vordere Fläche des Prisma, welche einmal angelegt worden war.

§. 36.

Aufgabe. Einen prismatischen Körper mit prismatischer Deckplatte zu tuschen.

Auflösung. Es sei Taf. 7 Fig. 32 der gegebene Körper. Er entspricht ganz der Zeichnung desselben Körpers auf Taf. 5 Fig. 9, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Zuvörderst reibe man sich einen hellen Farbenton in dem Tuschnapfe ein, überlege damit die obere Deckplatte einmal und lasse daran die Lichtkanten stehen; eben so überlege man die senkrechte Fläche des Prisma erst einmal, und wenn die Tusche getrocknet ist, zum zweitenmale, da diese Fläche weiter von dem Auge des Beschauers absteht, als die Fläche der Deckplatte.

Die Schlagschatten werden beide Male mit dem hellen Tone überlegt.

Nun reibe man einen dunkleren Schattenton in dem Tuschnapfe ein und überlege damit den Schlagschatten, sowohl auf der Mauer, als auf dem Körper. Da aber der Schlagschatten auf dem Körper dem Auge näher ist, als der Schatten an der Wand, so ist der Schlagschatten auf dem Körper dunkler (kräftiger), als der auf der Wand.

Der Schlagschatten auf dem Körper muß daher mit derselben dunklen Tusche zweimal angelegt werden, wogegen der Schlagschatten an der Wand nur einmal angelegt wurde. (Vergl. §. 34. 4.)

§. 37.

Aufgabe. Einen prismatischen Körper mit achteckiger Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 33.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 10, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Zuvörderst gebe man dem mittleren Theile der Deckplatte einen Farbenton und überstreiche den rechten Theil derselben gleich mit.

Was den linken Theil der Deckplatte betrifft, so ergiebt sich Folgendes: Diese senkrechte Ebene macht mit der Augenlinie einen Winkel von 45 Grad. Es wird also das Licht auf diese Ebene rechtwinklig wirken, und diese Ebene würde also im hellsten Lichte sein, folglich weißes Papier. (§. 34. 3.) Es sind aber nicht alle Punkte dieser Ebene dem Auge gleich nahe, sie entfernen sich im Gegentheile nach hinten zu immer mehr von demselben, und aus diesem Grunde kann die Ebene auch keinen gleichmäßigen Lichtton erhalten, sondern ihr Licht wird nach hinten zu schwächer werden (der Farbenton wird etwas dunkler sein). Man legt also diese Ebene von hinten nach vorn zu an und verwäscht den Farbenton, wie in der Zeichnung zu sehen, so daß rechts ein helles Licht, links aber eine Abtönung des Lichtes entsteht.

Nun legt man den unter der Deckplatte befindlichen Körper zweimal mit einem Tone an, weil der Körper gegen die Platte zurücksteht. Die Schlagschatten legt man vorläufig ebenfalls zweimal mit dem hellen Tone an. Ist dies geschehen, so reibt man sich einen dunkleren Schattenton ein und verfährt folgendermaßen.

Die rechte Seite der Deckplatte ist ohne Licht, da die Lichtstrahlen daran vorbei streifen. Sie würde also einen gleichmäßigen dunkeln Ton haben, wenn sie nicht schräg gegen das Auge des Beschauers stände. Da sie aber schräg steht, so sind die hinteren Theile derselben von dem Auge weiter entfernt, als die vorderen. Der Schattenton der hinteren Theile derselben wird also matter (heller) sein, als der Schattenton der vorderen Theile, welcher dem Auge näher kommt, und an der Kante links wird der Schattenton am dunkelsten sein.

Um dies zu erreichen, legt man diese Fläche mit dem Schattentone von links nach rechts, etwa bis zur Mitte der Fläche an, und verwäscht alsdann den Ton.

Betrachtet man nun den linken und rechten Theil der Deckplatte genauer, so ergiebt sich, was bereits (§. 34 in 3. u. 4.) erwähnt wurde, daß die Erscheinung der Schattenpartie der Erscheinung der Lichtpartie gerade entgegengesetzt ist, das heißt, wo im Lichte die hellsten Töne stehen, würden, wenn dieselbe Fläche im Schatten wäre, die dunkelsten Töne stehen müssen.

Um nun die Schlagschatten zu tuschen, lege man das erste Mal mit der dunklen Tusche alle Schatten an, und wenn die Tusche getrocknet ist, lege man den Schlagschatten auf dem Körper selbst noch einmal mit derselben dunklen Tusche an, da dieser Schatten dem Auge näher, folglich kräftiger ist, als der Schatten, welchen der Körper auf die dahinter befindliche Mauer wirft.

§. 38.

Aufgabe. Einen achteckigen Körper mit achteckiger Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 34.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 11, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Man sieht hier auf den ersten Blick, daß die Aufgabe mit der vorigen in §. 37 zusammenfällt, was die Deckplatte anbelangt; denn beide sind von gleicher Gestalt und werden, da die Bedingungen gleich sind, auch auf gleiche Weise getuscht werden.

Der Körper unter der Deckplatte ist aber auch achteckig, also ganz eben so zu behandeln, als die Deckplatte selbst, nur mit folgendem Unterschiede: Da der Körper gegen die Deckplatte zurücksteht, also vom Auge weiter entfernt ist, so werden die Flächen des Körpers im Lichte etwas dunkler, im Schatten etwas heller zu halten sein, als die der Deckplatte.

Was die Schlagschatten betrifft, so verfahre man im Ganzen wie in §. 37. Nur ist die rechte Seite des unteren Körpers besonders zu berücksichtigen. Sie ist im vollen Lichte, es wird also der auf sie fallende Schatten auf dem Punkte am stärksten (dunkelsten) sein, wo das hellste Licht stattfinden würde, wenn der Theil der Fläche, wo jetzt der Schatten zu liegen kommt, beleuchtet wäre.

Dasselbe gilt von der dem Lichte abgewendeten Schattenseite des Körpers, welche ganz ähnlich wie bei der Deckplatte behandelt wird.

Die Zeichnung macht das Uebrige hinlänglich deutlich.

§. 39.

Aufgabe. Einen viereckigen Körper mit runder Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 35.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 12, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Betrachtet man die Zeichnung, so ergiebt sich, daß hierbei alles so zu beobachten sein wird, wie bei Fig. 33 auf Taf. 7, nur mit dem Unterschiede, daß die Deckplatte anstatt achteckig hier rund ist.

Bei dem Tuschen dieser runden Platte gilt das Folgende. Wo das Licht rechtwinklig auffällt ist es am stärksten (am hellsten); das wird hier wieder der Fall sein, wo der Lichtstrahl mit der am Kreisbogen gezogenen Tangente einen rechten Winkel macht.

Von dieser hellen Stelle aus nimmt das Licht nach beiden Seiten hin gleichmäßig ab, ohne eine scharfe Kante (wie bei dem

Achteck) zu bilden. Die Töne an der runden Platte müssen also sämmtlich in einander verwaschen werden.

Auf der rechten Seite der Platte wird es einen Punkt geben, wo die Lichtstrahlen die Rundung tangiren (vorbeistreifen); auf diesem Punkte wird durch die ganze Höhe der Platte ein sogenannter Mittelschatten stattfinden (zweite Abtheil. §. 1 u. §. 9). Dieser Mittelschatten wird die dunkelste Stelle (einen dunklen senkrechten Streifen) an der Platte bilden und muß nach beiden Seiten hin verwaschen werden, wodurch zugleich der Reflex (am Rande rechts) entstehen wird. Was nun noch das Tuschen des prismatischen Körpers und der zugehörigen Schlagschatten betrifft, so gilt dasselbe wie in Fig. 33.

§. 40.

Aufgabe. Einen runden Körper mit runder Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 36.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 13, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Um die Deckplatte und den Körper zu tuschen darf man sich nur erinnern, was im vorigen §. 39 von der runden Deckplatte gesagt wurde.

Da der Körper hier gegen die Platte zurücksteht, so wird der höchste Lichtstreif auf dem Körper schmaler werden, als er auf der Platte darüber erscheint, weil das Licht auf dem entfernteren Körper schon geringer wirken wird.

In Bezug auf den Schlagschatten auf die hinter dem Körper befindliche Mauer gilt dasselbe, was bisher bei allen vorher beschriebenen Figuren (31—35) erwähnt wurde, wir haben es also nur noch mit dem Schlagschatten der runden Platte auf den ebenfalls runden Körper zu thun.

Wo das Licht am stärksten wirken würde, wenn die Fläche beleuchtet wäre, ist der Schatten am stärksten, wenn dieselbe Fläche im Schatten liegt. Betrachtet man die vorliegende Figur, so findet man, daß über dem hellsten Lichtstreifen des Körpers der dunkelste Schatten liegt und dieser nach rechts und links schwächer wird, je nachdem das Licht selbst abnimmt.

Auf der rechten Seite des Körpers wird überdies noch der nach beiden Seiten hin verwaschene Mittelschatten, so wie der daraus entspringende Reflex sowohl am Körper, wie an der Deckplatte (am Rande rechts) sichtbar.

§. 41.

Aufgabe. Einen dreieckigen Körper mit dreieckiger Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 37.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 14, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Was das Tuschen der im Lichte befindlichen Flächen betrifft, so stehen sie unter einem Winkel von 45 Grad gegen den Beschauer geneigt, sie werden also beide im vollsten Lichte sein, da aber ihre vordere Kante dem Auge näher ist, als die hintere, so werden die Flächen nach hinten zu abgetönt und nach vorne zu verwaschen werden müssen.

Die beiden vom Lichte abgewendeten anderen Seitenflächen werden gerade entgegengesetzt getuscht, so daß sie an der vorderen

Kante dunkler werden und außerdem überhaupt einen viel dunkleren Ton erhalten (als die Lichtflächen), da das Licht an ihnen nur vorbei streift, ohne sie zu treffen.

Der Schlagschatten auf der Mauer wird wie bei allen vorhergehenden Körpern getuscht.

Der Schlagschatten der Platte auf den Körper wird auf derjenigen Stelle am dunkelsten werden, wo das Licht am stärksten sein würde, wenn diese Stelle beleuchtet wäre, das heißt, dieser Schlagschatten wird an der Lichtkante rechts am dunkelsten sein und nach der Lichtkante links hin immer schwächer werden, wie die Zeichnung zeigt.

§. 42.

Aufgabe. Einen runden Körper mit achteckiger Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 38.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 16, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Betrachtet man die Zeichnung, so gilt für die Platte, was §. 37 und §. 38 gesagt wurde, und für den Körper dasselbe, wie §. 40 erwähnt wurde. Denn wenn auch im vorliegenden Beispiele die Platte achteckig ist, so hat dies doch hinsichtlich des Tuschens bei dem runden Körper weiter keinen Einfluß.

§. 43.

Aufgabe. Einen achteckigen Körper mit einer runden Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 39.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 17, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Betrachtet man die Zeichnung, so gilt für die Platte, was §. 39 und §. 40 erwähnt worden ist, und für den Körper, was §. 38 gesagt wurde.

§. 44.

Aufgabe. Einen runden Körper mit dreieckiger Deckplatte zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 40.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 18, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Betrachtet man die Zeichnung, so gilt für die Platte, was §. 41 gesagt wurde, und für den Körper, was wir in §. 40 und §. 42 erwähnten.

§. 45.

Aufgabe. Eine rechtwinklige Mauerblende mit ihrem Schlagschatten zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 41.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 19, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist. Es ist hierbei weiter nichts zu beobachten, als daß man die vordere Mauer einmal und die Vertiefung zweimal mit einem hellen Tone anlegt.

Für den Schlagschatten mischt man sich alsdann einen dunkleren Ton und überlegt den Schlagschatten in der Mauervertiefung einmal damit.

§. 46.

Aufgabe. Eine dreieckige Mauerblende mit ihrem Schlagschatten zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 42.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 5 Fig. 20, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Die vordere Fläche wird einmal angelegt, die Lichtseite nach hinten zu abgetönt und nach vorne zu verwaschen, so daß an der vorderen Kante ein heller Streif stehen bleibt.

Die entgegengesetzte schräge Seite wird bei allen Abtönungen mit überstrichen. Dann macht man einen dunklen Ton an und tuscht den Schatten auf der Lichtseite so, daß er da am dunkelsten wird, wo das höchste Licht sein würde. Die im Reflex liegende andere schräge Seite der Vertiefung tuscht man so, daß sie an dem Rande nach vorne hin dunkler erscheint.

Man sehe die Zeichnung, welche das eben Gesagte noch mehr verdeutlicht.

§. 47.

Aufgabe. Eine halbkreisförmige Nische mit gerader Decke zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 43.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 21, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Die Nische ist halbkreisförmig eingebogen, auf der Lichtseite wird also das hellste Licht da liegen, wo die Lichtstrahlen rechtwinklig auf eine außerhalb am Halbkreise unter 45 Graden gezogene Tangente auffallen. Von diesem senkrechten hellen Streifen wird das Licht rechts und links schwächer werden, wie in der Zeichnung zu sehen.

Was den Schatten betrifft, so wird er auf der Seite zunächst am höchsten Lichte am dunkelsten sein und nach links hin heller werden, mit Ausnahme derjenigen Stelle, wo das höchste Licht erscheinen würde, wenn diese Seite beleuchtet wäre. Auf dieser Stelle wird ein etwas dunklerer Streif wie ein Mittelschatten statt finden. Die Zeichnung macht das Uebrige deutlich.

§. 48.

Aufgabe. Eine halbkreisförmige Nische mit halbkugelförmiger Decke zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 44.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 22, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

In Bezug auf das Tuschen gilt hier ganz dasselbe, was im vorigen §. 47 darüber gesagt worden ist, und macht die Zeichnung selbst alles deutlich. Das Licht ist da am stärksten, wo die Strahlen normal auffallen, und der Schatten da am dunkelsten, wo das Licht am höchsten sein würde, wenn die im Schatten liegenden Flächen beleuchtet wären.

§. 49.

Aufgabe. Ein Säulenkapital zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 45.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 23, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Die oberste viereckige Deckplatte wird einmal mit hellem Tone angelegt, da sie eine ebene Fläche bildet und mit der Augenlinie parallel steht.

Der ganze übrige Theil kann als Cylinder betrachtet werden, und wird derselbe also eben so behandelt, wie auf derselben Tafel 7 die Fig. 35, 36, 38, 40. Der Viertelstab unter der viereckigen Platte wird so getuscht, daß er da am hellsten bleibt, wo eine Linie unter 45 Grad am äußern Umrisse gezogen diesen tangirt, also etwa in der Mitte der Höhe. Nach oben nimmt das Licht etwas ab und nach unten noch mehr, da der Viertelstab sich da vom Lichte fortbiegt.

Die beiden Plättchen werden wie Cylinder behandelt. Das Rundstäbchen wird da am hellsten, wo wieder eine Linie unter 45 Grad von oben nach unten gezogen denselben tangirt, also unterhalb der Mitte des Rundstäbchens, nach oben und unten nimmt das Licht ab.

Was die Schatten betrifft, so werden sie wie immer da am dunkelsten, wo das Licht am höchsten sein würde, wenn diese Flächen beleuchtet wären, also an allen denjenigen Punkten, wo ihnen helles Licht entgegen steht.

Am Cylinder (rechts) herunter bildet sich auch ein Mittelschatten auf allen denjenigen Punkten, wo die Lichtstrahlen unter einem Winkel von 45 Grad vorbei streifen, wie aus der Zeichnung ersichtlich. Ein ähnlicher Mittelschatten bildet sich auch von vorne nach hinten ansteigend an dem Viertelstabe und dem Rundstäbchen.

§. 50.

Aufgabe. Den Aufriß eines Gesimses zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 46.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 25, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Der obere bekrönende Viertelstab wird so getuscht, daß das stärkste Licht dahin fällt, wo eine unter 45 Grad von oben nach unten gezogene Tangente den äußeren Umriß berührt. Die obere Kante ist dunkler, wird also einmal angelegt und dann nach unten verwaschen. Der untere Theil des Viertelstabes ist noch dunkler, weil er sich vom Lichte abwärts krümmt, er muß also etwa mit drei Farbentönen angelegt und nach oben hin verwaschen werden.

Die folgende kleine Platte ist zweimal zu überlegen, weil sie mehr zurückliegt. Die darunter folgende Hängeplatte ist dreimal anzulegen, weil sie noch weiter zurückliegt. Die darunter folgende Kehlleiste mit dem Friese ist etwa fünfmal abzutönen, weil diese Theile stark zurückspringen.

Es ist einleuchtend, daß man bei dem oftmaligen Abtönen einen hellen Ton verwenden muß, damit das Ganze im Lichte nicht zu dunkel werde.

Für das Tuschen der Schatten gilt Folgendes. Wir wollen hier von unten nach oben gehen, da die Stärke der Schattentöne, folglich das öftere Ueberlegen derselben von unten nach oben zunimmt.

Hat man den Schattenton so dunkel gemischt, als der dunkelste Lichtton war, so überlegt man den Schatten auf dem Friese einmal und mit demselben Tone die darüber liegende Kehlleiste, weil diese Theile wenig vor einander vorspringen. Nun ist aber die Kehlleiste gebogen, es wird also auf ihr der dunkelste Schatten dort sitzen, wo das größte Licht gestanden hätte, wenn die Kehlleiste beleuchtet gewesen wäre. Deshalb sitzt der stärkste Schatten unten an der Hohlkehle und etwa in der Mitte des Viertelstabes, als aus welchen Figuren die Kehlleiste zusammengesetzt ist.

Der Schatten auf der Hängeplatte wird dreimal abgetönt und der auf dem darüber liegenden Plättchen viermal, weil dies Glied am weitesten vorspringt, folglich dem Auge am nächsten liegt. Es fehlt nun blos noch der Mittelschatten an dem obersten Viertelstabe, welcher mit einem Schattentone angelegt nach oben und unten verwaschen wird, wodurch sich zugleich unterhalb der Reflex bildet.

Man sieht, daß man bei dem Tuschen sehr zusammengesetzter Körper nur immer darauf Rücksicht zu nehmen hat, wie jeder einzelne Theil für sich gestaltet ist, wobei man alsdann die in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Regeln zu befolgen hat. Alsdann muß man berücksichtigen, wie die Theile gegen einander vorspringen oder zurückliegen, um sie gehörig im Lichte gegen einander abzutönen, und endlich ist die Hauptregel immer im Auge zu behalten, daß die Glieder im Schatten immer gerade umgekehrt abgetönt werden müssen, als wenn sie im Lichte wären; das heißt, der Schatten ist da am dunkelsten, wo das Licht am größten sein würde, wenn dieselbe Fläche, welche nunmehr im Schatten liegt, beleuchtet wäre.

§. 51.

Aufgabe. Den Grundriß eines Gesimses zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 47.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 25, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Das Gesims ist hier umgestürzt gedacht, so daß also diejenigen Theile desselben, welche in Fig. 46 dem Auge des Beschauers am nächsten waren, folglich das hellste Licht und den dunkelsten Schatten zeigten, nunmehr gerade entgegengesetzt in dieser Hinsicht zu tuschen sind.

Der Vorsprung der Kehlleiste würde demnach einmal anzulegen sein.

Die Kehlleiste würde so getuscht erscheinen, wie sie in der Zeichnung angegeben ist. Der Vorsprung an der Tropfrinne würde zwei Abtönungen erhalten, die Tropfrinne selbst drei gleichmäßige Töne und am Rande ein helles Licht auf der beleuchteten Seite. Der andere Vorsprung der Tropfrinne würde eben so, wie der gegenüberliegende zu behandeln sein.

Die darunter folgende Hohlkehle wird unten dunkler und an der oberen Kante ein helles Licht haben. Eben so wird der Viertelstab, welcher nun zu unterst liegt, sein höchstes Licht wie immer da erhalten, wo die Lichtstrahlen normal auffallen.

Bei dem Tuschen der Schatten wird wieder das Gegentheil von dem erfolgen, was im Lichte stattgefunden hatte; das heißt, sie werden da am dunkelsten angelegt werden müssen, wo das Licht am höchsten gewesen wäre, wenn dieselben Flächen, die nunmehr beleuchtet sind, im Schatten gewesen wären.

§. 52.

Aufgabe. Einen Säulenfuß zu tuschen. (Taf. 7 Fig. 48.)

Auflösung. Die vorliegende Zeichnung entspricht derjenigen auf Taf. 6 Fig. 24, wo die Schattenconstruction dazu nachzusehen ist.

Die unterste Sockelplatte ist viereckig, sie wird daher nur mit einem Tone gleichmäßig angelegt. Der ganze obere Theil kann als Cylinder betrachtet werden. Das hellste Licht bleibt demnach da, wo die Lichtstrahlen normal auf die Tangente des Kreises im Grundrisse auffallen würden, nach links und rechts nimmt das Licht gleichmäßig ab, es wird also die rechte Seite die meisten Abtönungen erhalten. Um die Schatten zu tuschen, hat man zu berücksichtigen, daß am großen Wulst von unten nach oben ein Mittelschatten steigen wird, wie ihn die Zeichnung zeigt.

Ferner wird ein Mittelschatten am Stamme der Säule senkrecht herunter über die Platte fortgehen und sich mit dem des Wulstes vereinigen. Ein scharf gezeichneter Schlagschatten wird nicht entstehen, sondern nur auf dem Punkte des Cylinders, wo die Lichtstrahlen unter 45 Grad vorbeistreifen, werden Schlagschatten anfangen, sich aber nach hinten zu sanft verlieren. Ein solcher Schlagschatten wird oberhalb auf dem Wulste und über dem Plättchen in der Hohlkehle stattfinden, wie die Zeichnung zeigt.

§. 53.

Endbetrachtung über das Tuschen.

Gehen wir nun noch einmal in Gedanken durch, was über das Tuschen gesagt wurde, so ergiebt sich, daß man mit einem angemessenen Licht- und Schattentone im Stande ist, alle Abstufungen der Entfernung und der Form so darzustellen, daß auch bei Zeichnungen, welche nur aus gewöhnlichen geometrischen Projectionen bestehen, dem Auge nichts desto weniger die Eigenthümlichkeit der Form des ganzen Körpers anschaulich wird.

Wir haben hier immer angenommen, daß der Localton der Körper (das heißt, die ursprüngliche Farbe, welche ein Körper von Natur hat) die weiße Farbe des Papieres ist.

Es kann aber jeder Körper auch einen andern Localton haben, so ist das Holz z. B. hell- oder dunkelbraun, Eisen ist schwarz, Blätter sind grün.

Auf solchen Körpern, welche einen hellen Localton haben, werden sich Licht und Schatten auch am schärfsten gegen einander abschneiden, und je dunkler der Localton eines Körpers ist, um so weniger wird dies der Fall sein. Auf einem an sich hellen Körper wird daher das Licht heller und der Schatten deutlicher abgegrenzt erscheinen, als auf einem andern von derselben Gestalt, welcher aber einen an sich dunkleren Localton hätte.

Uebrigens muß hierbei wie früher bemerkt werden, daß man durch das bloße Beschauen der Zeichnungen niemals auch tuschen lernen wird. Man muß im Gegentheil die Körper selbst aufzeichnen, am besten in einem noch größeren Maßstabe, als sie hier angenommen sind, und man muß alsdann die gegebenen Aufgaben Schritt für Schritt selbst lösen, sonst wird man nie zum Ziele kommen.

Dritte Abtheilung.

A. Isoperimetrische Perspective.

§. 1.

Einleitung.

In der ersten Abtheilung, welche die Projectionslehre abhandelte, haben wir gesehen, daß es eine Art Zeichnungen gab, nach welcher man Körper durch Aufzeichnung des Grundrisses, des Aufrisses, und des Durchschnittes **meßbar** in allen ihren einzelnen Theilen darstellen konnte. So wichtig diese Art Darstellung für den Bauhandwerker, so unentbehrlich sie für die Aufzeichnung von sogenannten Baurissen ist, hat sie nichts desto weniger manches Weitläufige und Unbequeme, namentlich bei Darstellung solcher Gegenstände, bei welchen viele einzelne in einander greifende Theile verdeutlicht werden sollen; man ist alsdann genöthigt, den Zusammenhang immer aus dem Grundrisse, dem Aufrisse und dem Durchschnitte zugleich herauszusuchen, was in manchen Fällen, und namentlich bei verwickelten einzelnen Bautheilen (Details), bei schwierigen Dachconstructionen ꝛc., aber ganz insbesondere bei Darstellungen von Maschinen, wo man häufig seine Einbildungskraft sehr anstrengen muß, um sich aus den gewöhnlichen sogenannten geometrischen Zeichnungen Alles gehörig zu verdeutlichen, viele Schwierigkeiten hat. Bei diesen geometrischen Projectionszeichnungen hat man bekanntlich immer nur eine einzelne Ebene vor sich, entweder den Grundriß, den Aufriß oder den Durchschnitt, man kann also die Maße des dargestellten Körpers auch nur nach und nach aus diesen drei Arten von Zeichnung auffinden.

Es ist aber oft höchst wünschenswerth, diese drei Arten der Projection, so zu sagen in einer einzigen Zeichnung zu verbinden, und dies lehrt die isoperimetrische Perspective.

Bei dem gewöhnlichen Projectionszeichnen werden im Grundrisse die Maße der Länge und Breite, im Aufrisse die Maße der Höhe, dargestellt; hierzu braucht man immer mindestens zwei Zeichnungen, häufig auch noch den Durchschnitt als dritte Zeichnung.

Könnte man nun die Maße der Länge, Breite und Höhe in einer einzigen Zeichnung und zugleich bequem meßbar darstellen, so sieht man, welchen Vortheil diese Vereinfachung haben müßte.

Ein Engländer Farish, Professor an der Universität Cambridge, hat diese Erfindung gemacht und sie die isoperimetrische Perspective genannt. Der Name kommt aus dem Griechischen, läßt sich nicht mit einem einzelnen Worte verdeutschen, bedeutet aber so viel, als daß die drei Hauptabmessungen eines Körpers (Länge, Breite, Höhe) nach einem und demselben Maßstabe in einer und derselben Zeichnung dargestellt werden können.

Die senkrechten Linien bleiben alsdann auch in der Zeichnung senkrecht, die wagerechten Linien, welche die Länge und Breite einer Ebene begrenzen, neigen sich aber (wenn sie rechtwinklig auf einander stehen) nicht rechtwinklig, sondern unter Winkeln von 60 Grad.

Ein Beispiel wird dies deutlicher machen.

Man denke sich (Tafel 8 Fig. 1) eine wagerechte Linie **A B**. In dieser Linie nehme man einen beliebigen Punkt d als Anfangspunkt der Zeichnung an, so heißt dieser Punkt der regulirende Punkt.

Von diesem Punkte aus soll ein Würfel (Cubus) isoperimetrisch verzeichnet werden.

In **d** errichte man die lothrechte Linie **d c** und mache sie so lang, als die eine Seite des Cubus werden soll. Ferner ziehe man durch denselben Punkt d zwei Linien d f und d b beide so gegen die wagerecht Linie **A B** geneigt, daß sie mit ihr Winkel von 30 Grad bilden, so wird der Winkel, welchen die Linien d f und d b einschließen, 120 Grad betragen, was so viel ist, als $2 \times 60 = 120$ Grad.

Nun mache man die Linie $df = dc$ und die Linie $bd = cd$, so hat man die beiden untern Kanten des Cubus bestimmt. Es würde der Punkt b links und der Punkt f rechts von dem regulirenden Punkte d liegen, was auch in der Zukunft, bei zu suchenden Punkten, zu merken ist.

Errichtet man nun auf den Punkten b und f die Lothrechten b a und e f, und macht diese beiden Linien $= c\,d$, so hat man wieder zwei Kanten des Würfels gefunden.

Nun ziehe man a c parallel mit b d und c e parallel mit d f, so hat man die oberen Kanten der beiden Seitenflächen. Zieht man nun noch g a parallel mit c e, und g e parallel mit a c, so hat man die beiden Kanten der den Cubus oberhalb begrenzenden Fläche gefunden, und somit den ganzen Körper, so weit er dem Auge in der Natur sichtbar sein würde, wenn man sich das Auge in der nach oben verlängerten Diagonale des Cubus dächte.

Betrachtet man die Zeichnung, so zeigt sie von dem Körper zwei Seitenflächen und eine obere Fläche, aus der oberen Fläche kann man die Maße der Länge und Breite, und aus den Seitenflächen die Maße der Höhe entnehmen.

Es wird demnach eine solche isometrische Zeichnung stets drei Seiten eines Körpers zeigen, wenn eine gewöhnliche geometrische Projection nur eine Seite auf einmal gezeigt hätte.

Der mathematische Beweis dafür, daß alle verschiedenen Flächen der Zeichnung nach einerlei Maßstab meßbar sind, wird hier als zu weit führend übergangen, er beruht jedoch darauf, daß in einem regelmäßigen Sechseck alle Mittelpunktswinkel gleich 60 Grad, und die Seiten des Sechsecks den Radien des Kreises gleich sind, in welchem das Sechseck beschrieben ist, wie Fig. 1 zeigt.

Der Punkt d hieß als erster Punkt, von welchem aus die übrigen bestimmt wurden, der regulirende Punkt.

Die Linie c d, als die erste Lothrechte, nach welcher die anderen bestimmt werden, heißt immer die Verticale zum Unterschiede gegen die übrigen Senkrechten.

Die beiden Linien b d und d f, welche durch den regulirenden Punkt d gehen, heißen beide die horizontalen Linien, zum Unterschiede gegen alle übrigen, und davon heißt d b die linke und d f die rechte Horizontale.

Die Ebene e d f e, welche durch die verticale Linie c d und durch die rechte Linie e f geht, heißt die rechte Ebene.

Die Ebene c d a b, welche durch die verticale Linie c d und die linke Linie a b geht, heißt die linke Ebene.

Diese Benennungen dienen dazu, um die Lage irgend eines beliebigen Punktes so leicht als möglich zu bestimmen, wenn man seine drei Abstände mißt, denn jeder Punkt muß entweder in einer der regulirenden Linien selbst liegen (wo er dann leicht zu finden ist), oder er liegt außerhalb der regulirenden Linien irgendwo; alsdann bestimme man seine Abstände gegen die rechte und linke Horizontallinie, wodurch man die Länge und Breite des Abstandes findet, und alsdann bestimme man in den senkrechten Ebenen die Höhe des Punktes, ziehe dann von diesen Punkten parallele Linien mit der rechten und linken Horizontale, und wo diese Parallelen sich schneiden, wird der gesuchte Punkt liegen.

Die folgenden Beispiele werden das Verfahren hinlänglich verdeutlichen.

Im Ganzen übersieht man vorläufig gewiß durch die Zeichnung des Cubus so viel, daß ein anschauliches Bild jedes Körpers auf diesem Wege geliefert werden, und daß man in diesem Körper jeden beliebig gegebenen Punkt, auch in der Zeichnung bestimmen könne. Aber auch jeder beliebig gegebene Punkt außerhalb des Körpers ist dadurch bestimmbar, daß man nach den zu bestimmenden Maßen seine Abstände gegen die horizontalen und senkrechten Ebenen bestimmt und dadurch seine Lage in der Zeichnung festsetzt.

Es wird also auch keine Schwierigkeit machen, jede beliebige gerade Linie isometrisch zu zeichnen, wenn man ihre beiden Endpunkte bestimmt, und diese durch eine gerade Linie verbindet.

Krumme Linien jeglicher Gestalt lassen sich ebenfalls dadurch bestimmen, daß man in ihnen eine beliebige Menge Punkte annimmt, diese isometrisch bestimmt und dann diese zuletzt in der Zeichnung gefundenen Punkte durch Linien mit einander verbindet.

Es leuchtet ein, daß je mehr Punkte man auf diese Art für eine krumme Linie sucht, um so genauer wird ihr Bild in der Zeichnung werden.

Nachdem wir die allgemeinen Begriffe der isoperimetrischen Perspective erläutert, wenden wir uns zu einzelnen Beispielen, welche das Verfahren vollkommen verdeutlichen werden.

Betrachten wir zur besseren Verständigung Fig. 1 noch einmal, so ergiebt sich Folgendes.

Der Cubus wird durch ein regelmäßiges (im Kreise construirtes) Sechseck und durch die Radien c d, c e, c a dargestellt. Denkt man sich außerdem im Sechseck Radien gezogen, so sind alle Winkel am Mittelpunkte = 60 Grad.

Das Sechseck hat vor allen im Kreise gezeichneten regelmäßigen Vielecken, die Eigenschaft, daß jede Seite des Sechsecks gleich dem Radius des Kreises ist. Folglich sind hier im Cubus alle Seiten gleich lang und folglich auch nach einerlei Maßstabe meßbar.

Wenn man z. B. eine der Seiten des Cubus in 5 Fuß getheilt annimmt, so werden alle übrigen Seiten des Cubus mit demselben Maßstabe meßbar sein.

Will man die Diagonale einer der Seitenflächen wirklich messen, so beschreibe man, wie Tafel 8 Fig. 2, ein Quadrat a c d b mit einer der Seiten des Cubus aus Fig. 1, so daß die Seite des Quadrats a b gleich einer der Seiten des Cubus wird; z. B. = c d (in Fig. 1). Zieht man nun in dem Quadrate die Diagonale b c oder a d, so sind diese nach demselben Maßstabe meßbar, welcher für den Cubus festgesetzt war.

Wollte man die Diagonale des Cubus wirklich messen, so suche man ihre wirkliche Länge nach Fig. 3 (Tafel 8). Man trage aus Fig. 1 die Verticale c d in Fig. 3 auf der beliebig langen wagerechten Linie d b auf von d nach c. — Alsdann mache man die Linie d b (Fig. 3) so lang als in Fig. 2 die Diagonale a d war, zieht man nun noch in Fig. 3 die Linie c b, so ist diese die gesuchte Diagonale des Cubus, welche mit demselben Maßstabe meßbar sein wird, welchen man für den Cubus angenommen hat.

Man sieht hieraus, daß man auf ähnliche Weise auch die Längen anderer Linien, welche in der isoperimetrischen Figur unter verschiedenen Lagen geneigt wären, meßbar darstellen könnte, wenn es nöthig wäre.

§. 2.

Aufgabe. Man soll einen Cubus isometrisch zeichnen, auf dessen Begrenzungsflächen sich Achtecke befinden. Tafel 8 Fig. 2 u. Fig. 4.

Auflösung. Man zeichne zuvörderst in Fig. 4 den Cubus ganz so, wie wir in §. 1 Fig. 1 gezeigt haben. Dann zeichne man in Fig. 2 das regelmäßige Achteck in ein Quadrat, welches man so groß gemacht hat, als eine der Seitenflächen des Cubus in Fig. 4 ist.

Um nun das Achteck aus Fig. 2 auf eine der Flächen des Cubus in Fig. 4 zu übertragen, braucht man nur von den Mittellinien oder von den Kantenpunkten des Cubus aus, die Punkte des Achtecks aus Fig. 2 nach Fig. 4 zu übertragen.

Es ist sowohl in Fig. 2 als in Fig. 4 dieselbe Buchstabenbezeichnung gewählt worden und wird man bei Vergleichung beider Figuren sogleich die Lage der gleichnamigen Punkte einsehen und eintragen können.

Bei allen drei sichtbaren Achtecken in Fig. 4 wiederholt sich dasselbe Verfahren auf gleiche Weise.

Wollte man eine Seite des Achtecks in Fig. 4 wirklich nach einem Maßstabe messen, so kann dies nur auf den senkrechten Kanten des Cubus und den Horizontalen geschehen, da die schräg laufenden Diagonalen der Achtecke von verschiedener Länge sind, und folglich ein falsches Maß angeben würden.

§. 3.

Aufgabe. Es soll ein Cubus isometrisch gezeichnet werden, in dessen Seitenflächen Kreise eingezeichnet sind. (Taf. 8 Fig. 5 und Fig. 2.)

Auflösung. Der bloße Augenschein lehrt schon, daß sich diese Aufgabe ganz ähnlich, wie die vorige (§. 2) lösen läßt.

Hat man den Cubus gezeichnet, so trage man wie vorhin die Achtecke ein. Nun betrachte man Fig. 2, so wird man finden, daß ein im Achtecke eingeschriebener Kreis, durch die Punkte n v q w o x p z gehen muß. Zieht man aber in Fig. 5 in dem Vierecke der Seitenfläche a b d c die Diagonalen a d und c b, so schneiden diese das Achteck in den Punkten v w x z und der Kreis wird nunmehr (aus freier Hand) durch die Punkte (in Fig. 5) n v q w o x p z gezogen werden können.

So wie man den Kreis in einer der Seitenflächen gefunden hat, eben so findet man die übrigen Kreise in den andern Seitenflächen.

Anmerkung 1. Man sieht, daß man jedes andere regelmäßige Vieleck auf den Seitenflächen eines Cubus in ganz ähnlicher Weise finden wird, wie man das Achteck und den Kreis zu finden im Stande war.

Anmerkung 2. Die Kreise in Fig. 5 kann man sich als Oberflächen von Räderwerken an einer Maschine denken, welche sich um die in den Mittelpunkten der Kreise vorstehenden Achsen drehen; und man sieht daß auch für Maschinen die isoperimetrische Darstellung sehr geeignet ist, meßbare Figuren in verschiedenen Lagen darzustellen. Hierzu kommt noch die Erleichterung, daß bei Maschinen die Räderwerke meistentheils entweder in wagerechter oder senkrechter Lage sich befinden.

§. 4.

Aufgabe. Man soll eine Welle (Cylinder) isometrisch aufzeichnen. (Taf. 8 Fig. 6 u. 7.)

Auflösung. Es sei der Kreisdurchschnitt der Welle in Fig. 6 gegeben. Nun trägt man Fig. 7 auf einer wagerechten Linie in dem Punkte f nach jeder Seite hin einen Winkel von 30 Grad an und zieht vorläufig die Linien f e und f g willkürlich lang.

Dann errichte man die Verticale f d und mache sie so hoch als der Durchmesser des Kreises in Fig. 6 lang ist. Dann mache man die Linie f e so lang wie d f, ziehe d c parallel f e, und e c parallel f d, so hat man ein Quadrat isometrisch gezeichnet, in welches der Kreis Fig. 6 hinein paßt.

Nun mache man in Fig. 7 die Linie f g so lang als die Welle (der Cylinder) werden soll, errichte g a und ziehe a d und b c parallel mit g f, auch mache man a d und b c so lang wie g f.

Dann ziehe man a b und g h parallel mit d c und f e, so hat man ein Prisma a b c d f e h g, in welches die Welle hinein paßt.

Nun beschreibe man in der Seitenfläche f d c e ein Achteck und darin einen Kreis (§. 3), so hat man die vordere Fläche der Welle.

Dann beschreibe man in der Fläche a b h g ebenfalls einen Kreis, so hat man die hintere Fläche der Welle. Zieht man nun noch die Linien b k und m n parallel mit g f, so hat man die beiden Begrenzungslinien der Welle und somit die verlangte isoperimetrische Zeichnung der Welle gefunden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll ein Kreuz isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 8.)

Auflösung. Man nehme auf irgend einer wagerechten Linie einen regulirenden Punkt a an. Von diesem aus ziehe man unter 30 Grad die Linien a b und a o und mache diese beiden Linien so lang als die Stärke des Kreuzes werden soll. Dann errichte man die senkrechten Linien b d, a c und o l und mache diese so lang als das Kreuz hoch werden soll; alsdann ziehe man c d und d m parallel mit b a, und c l und d m parallel mit a o, so hat man den senkrechten Theil des Kreuzes.

Will man nun den wagerechten Kreuzesarm zeichnen, so bestimme man die Längen d p, p e und e q, q f, so wie l r und ziehe durch die Punkte p q, e f und r die mit b a parallelen h g, o i, n k willkürlich lang.

Dann mache man die Linien q i, r k, f g, e h und o p so lang wie der wagerechte Kreuzesarm werden soll, und ziehe die senkrechten Linien o h, i g und k v, ferner die Linien g v, i k, q r, o n parallel mit a o, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

§. 6.

Aufgabe. Man soll einen Dachstuhl isometrisch zeichnen. (Tafel 8 Fig. 9 u. 10.)

Auflösung. Es sei der Dachstuhl wie er in Fig. 9 gezeichnet ist gegeben. Der zugehörige Maßstab befindet sich darunter.

Will man nun den ganzen Dachverband isoperimetrisch zeichnen, so nehme man sich zuvörderst Fig. 10 auf der wagerechten Linie A B den regulirenden Punkt C an. An diesen trage man wie immer nach jeder Seite hin einen Winkel von 30 Grad und ziehe (§. 1) die horizontalen Linien C D und C E. Die Linie C D mache man vorläufig willkürlich lang und die Linie C E mache man so lang wie der Balken (in Fig. 9) unterhalb ohne Ueberstand ist, nun halbire man die Linie C E in F, so ist F C und F E gleich der halben Länge des Balkens unterhalb.

Errichtet man nun in F (Fig. 10) die Senkrechte F G und macht dieselbe so hoch wie F G in Fig. 9, so hat man die Mittellinie des Dachstuhls und seine Höhe.

Von G aus in Fig. 10 ziehe man die Sparrenlinien G H und G J, nachdem man zuvor den Balken selbst fertig gezeichnet hat, so erhält man das erste Sparrengebind.

Nun zeichnet man mit allen Maßen, welche in Fig. 9 gelten den Kehlbalken, die Rahmstücken und Stiele in Fig. 10 ein.

Die Breite der Hölzer findet man ebenfalls nach dem Maßstabe, wenn man sie auf einer der horizontalen Linien, welche alle unter sich parallel sind, abträgt und die entsprechenden Umrißlinien der Verbandstücke zieht. So findet man das ganze erste Dachstuhlgebind.

Nun trägt man mittelst des Maßstabes die übrigen Balken in Entfernungen (hier) von 4 Fuß auf der Horizontalen C D Fig. 10 hinter einander auf, vollendet diese isometrisch, zeichnet nach und nach eben so die Sparren und den Dachstuhl ein, so wird man ein sehr deutliches und in allen isometrisch wagerechten und senkrechten Linien meßbares Bild des Dachstuhles erhalten.

Die Zeichnung macht Alles hinlänglich deutlich.

§. 7.

Aufgabe. Es soll der einfache Bock eines Hängewerkes isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 11.)

Auflösung. Von dem regulirenden Punkte a ziehe man die Horizontalen a b und a c, setze in a die Höhe des Balkens auf und von a nach c die Breite desselben nach irgend einem vorhandenen oder eingebildeten Maßstabe. Dann vollende man den Balken und zeichne nach und nach eben so die Hängesäule H und die Streben S S daran.

Der Theil links von der Mittellinie ist hier der Raumersparung wegen abgebrochen gezeichnet worden; übrigens macht die Zeichnung Alles deutlich.

§. 8.

Aufgabe. Es sollen zwei quer über einander fortliegende Holzverbände isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 12.)

Auflösung. Zuerst nimmt man den regulirenden Punkt a an, zieht dann gegen diesen, wie immer unter 30 Grad geneigt, die isometrisch horizontalen Linien a b und a c und vollendet den Balken, dann zeichnet man in gleicher Weise die übrigen Holzstücken. C ist ein Balken. A und B sind Stiele, E und E Kopfbänder. D eine Laufschwelle. F und F Streben. Die Zeichnung macht alles hinlänglich deutlich, wenn alles nach einem bestimmten Maßstabe gezeichnet gedacht wird.

§. 9.

Aufgabe. Es soll ein Gesims isometrisch aufgezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 13.)

Auflösung. In der wagerechten Linie A B bestimme man den regulirenden Punkt a willkürlich; ziehe alsdann die isoperimetrischen Horizontalen a c und a d unter 30 Grad. Alsdann bestimme man nach einem gegebenen Maßstabe die Längen der Linien a c und a d und ziehe die Verticale a b.

Nun ziehe man noch die senkrechte Kantenlinie c e und zeichne daran das gegebene Profil (Durchschnitt) des Gesimses, wie aus Fig. 13 bei D ersichtlich. Ferner ziehe man von allen Kantenpunkten des Gesimses parallele Linien mit a c nach der Verticalen a b, bis diese berührt wird.

Auf der entgegengesetzten Seite bei E verfährt man ganz eben so.

Die Breiten der Consols trägt man so wie ihre Abstände von einander nach einem bestimmten Verhältnisse oder Maßstabe auf, so wird man das verlangte Gesims erhalten, wie die Zeichnung zeigt, durch welche überhaupt Alles hinlänglich deutlich dargestellt ist, so daß man sich auch für andere Fälle und bei anderen Formen wird zu helfen wissen.

Anmerkung. In Taf. 8 Fig. 13 ist das Gesims von oben herab angesehen dargestellt; es könnte aber in manchen Fällen wünschenswerth erscheinen, einen Gegenstand umgekehrt, das heißt, von unten nach oben gesehen zu betrachten. Dies zeigt Taf. 8 Fig. 14.

Man hat alsdann nur nöthig, die isometrisch horizontalen Linien von der wagerechten Linie A B nach unten zu ziehen, das Profil des Gesimses anzuzeichnen und dann wie in Fig. 13 zu verfahren. Die Zeichnung macht Alles deutlich.

§. 10.

Aufgabe. Es soll eine Vase isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 16 u. 17.)

Auflösung. Aus der geometrischen Zeichnung der Vase in Fig. 17 ergeben sich alle Maße für Fig. 16. Man ziehe in Fig. 16 eine verticale Linie, welche die Achse des Gefäßes ist; auf dieser Achse nehme man Punkte, die den Mittelpunkten der Hauptkreise dieses Gefäßes entsprechen; durch diese Punkte können die horizontalen isometrischen Linien gezogen werden (wie in Fig. 16 geschehen ist), die die Halbmesser derjenigen Kreise darstellen, mit deren Hülfe die isometrischen Ellipsen, die ihre Stelle vertreten, leicht gezogen werden.

Auf ähnliche Art kann ein Körper dargestellt werden, der durch die Umdrehung einer ebenen Figur um eine ihrer Seiten erzeugt ist.

§. 11.

Aufgabe. Es soll irgend ein Gebäude isometrisch aufgezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 18.)

Auflösung. Hat man in der wagerechten Linie A B den Grundpunkt a, die Verticale a b und die beiden Horizontalen a c und a d bestimmt, so kann man nach dem unter Fig. 18 befindlichen Fußmaßstabe das Gebäude nach allen seinen Abmessungen isometrisch aufzeichnen, wenn man alles das berücksichtigt, was in den vorhergehenden Paragraphen gesagt worden ist. Die Zeichnung Fig. 18 macht Alles deutlich.

§. 12.

Aufgabe. Es soll eine Maschine isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 19.)

Auflösung. Aus der Zeichnung in Fig. 19 ist ersichtlich, daß, wenn man den regulirenden Punkt an irgend einer Stelle der Maschine, z. B. hier bei a, angenommen hat, so wird man im Stande sein, vermittelst lothrechter und isometrisch-horizontaler Linien die Maschine stückweise nach und nach vermittelst eines Maßstabes aufzutragen.

Die Räderwerke machen dabei keine Schwierigkeit, da sie sich entweder in senkrechten oder wagerechten Ebenen befinden, so ist es leicht, die Umrisse derselben zu finden, wenn man die Kreise in Achtecke eingeschlossen denkt und dann so verfährt, wie man Taf. 8 Fig. 6 verfahren hat.

Die Breiten oder Stärken der Räder ergeben sich ebenfalls leicht, wenn man einen zweiten Kreis neben den andern zeichnet, welcher so weit von ersterem absteht, als das Rad selbst dick ist.

Es wird unnöthig sein, noch mehr hinzuzufügen, da die Zeichnung Alles vollkommen deutlich macht.

§. 13.

Schlußbemerkungen.

Es ist nach dem bisher Gesagten leicht zu übersehen, daß die isoperimetrische Perspective sich für alle möglichen Arten der Darstellung eignet, man kann damit alle Arten Bauconstructionen, Schiffe, Festungen, einzelne Gebäude, ja ganze Straßen und Städte, so wie in Situationsplänen Berge, Vertiefungen ꝛc. aufzeichnen und dadurch eine weit größere Anschaulichkeit und Deutlichkeit bewirken, als durch die gewöhnlich üblichen geometrischen Darstellungsweisen. Ganz insbesondere aber wird sie dem Bauhandwerker aller Gewerke nützlich sein, wenn er sich die Zusammenstellung vieler in einander greifender Theile und besonders die sogenannten Details (einzelne Theile der Bauwerke, in größerem Maßstabe gezeichnet, als die Bauzeichnungen gemacht sind) deutlich machen will.

Wenn des beschränkten Raumes wegen auch nur wenige Beispiele gegeben werden konnten, so glauben wir doch, daß der Leser nach Durcharbeitung der gegebenen wohl im Stande sein wird, sich in jedem einzelnen Falle zu helfen.

B. Linearperspective.

§. 14.

Einleitung.

Die Linearperspective lehrt die Gegenstände so zeichnen, wie sie in der Natur erscheinen.

Denkt man sich (Taf. 9 Fig. 1 und Fig. 2) z. B. daß man vor einer Allee gleich hoher und gleich weit von einander entfernter Bäume steht, und daß der Standpunkt sich in der nach vorn verlängerten Mittellinie der Allee befinde, so ergeben sich folgende Erscheinungen.

1) Obgleich die Bäume alle gleich hoch angenommen sind, so werden die dem Auge des Beschauers zunächst stehenden am höchsten, die letzten in der Allee aber am niedrigsten erscheinen.

Es folgt also hieraus, daß die Gegenstände unter allen Umständen immer kleiner erscheinen werden, je weiter sie vom Beschauer abstehen.

Es folgt ferner, daß sehr weit abgelegene Gegenstände nach und nach sich so verkleinern können, daß man sie mit bloßen Augen gar nicht mehr sieht, wie man sich bei jedem Blicke in eine große Ferne leicht überzeugen kann.

2) (Fig. 1.) Die Grundlinien, worauf die Bäume stehen, scheinen sich nach hinten zu in einem gemeinschaftlichen Punkte **A** zu vereinigen.

Eben so werden, wenn man sich über die Wipfel der gleich hohen Bäume wagerechte Linien gezogen denkt, diese an sich wagerechten Linien schräg wie die Grundlinien der Bäume erscheinen, und sich ebenfalls scheinbar in dem Punkte **A** vereinigen.

3) Dieser Punkt **A** heißt der Augenpunkt, nicht weil sich etwa in diesem Punkte **A** das Auge des Beschauers befindet, sondern weil dieser Punkt **A** jedesmal in gleicher Höhe mit dem Auge des Beschauers sich befindet.

4) Eben so wie die Höhen der Bäume im Bilde sich nach hinten zu verkleinern, eben so werden auch die Breitenmaße nach hinten zu immer schmaler. Wir hatten angenommen, daß die Entfernung der Bäume von einander, (nach der Tiefe des Bildes zu) ebenfalls überall dieselbe sei.

Denkt man sich zwischen je zwei Bäumen wagerechte Linien gezogen, so sieht man, daß die Breiten dieser Entfernungen (obgleich sie in der Natur gleich sind) nach hinten immer schmaler zu werden scheinen. Zugleich wird man finden, daß diese Breitenmaße (eben so wie die Höhenmaße) nach hinten zu unter einem gewissen Verhältnisse abzunehmen scheinen.

Es ist also auch ein Maßstab für diese in einem gewissen Verhältnisse stehenden Verkleinerungen denkbar, und diesen Maßstab, welcher wirklich gefunden werden kann, werden wir weiter unten unter dem Namen des perspectivischen Maßstabes kennen lernen.

Er dient hauptsächlich zum Auftragen der perspectivischen Zeichnungen, weniger zum Messen derselben, da er für eine Bauausführung zu unsicher sein würde, wie man späterhin leicht einsehen wird.

5) Denkt man sich in Fig. 1 die Allee durch einen Rahmen gesehen, so heißt **ab** die Grundlinie des Bildes. Der Punkt **G** heißt der Grundpunkt, die Linie **Gc** heißt die Mittellinie, der Punkt **A** der Augenpunkt, und eine wagerechte Linie, welche man sich durch den Augenpunkt **A** gezogen denkt, heißt die Horizontlinie.

Diese Horizontlinie wird höher oder tiefer rücken, je nachdem das Auge des Beschauers höher oder tiefer gegen den Rahmen steht.

Denn je höher der Beschauer steht, um so mehr Grundfläche des Bildes wird er übersehen.

Die Horizontlinie zeigt demnach jedesmal den sogenannten scheinbaren Horizont an und liegt in demselben.

Man kann sich dies am besten vergegenwärtigen, wenn man sich denkt, daß man am Meere oder vor einer ganz flachen meilenlangen Ebene steht, in beiden Fällen wird sich der scheinbare Horizont, als eine wagerechte Linie zeigen, welche in gleicher Höhe mit dem Auge des Beschauers liegt und folglich jedesmal durch den Punkt **A** (Fig. 1) gehen wird.

6) Betrachtet man in Taf. 9 Fig. 2, so hat man den Grundriß zu Fig. 1. Es ist darin **ab** die Grundlinie des Rahmens, **G** der Grundpunkt, welcher zugleich Projection des Augenpunktes **A** ist, so wie die Grundlinie **ab** zugleich Projection der Horizontlinie ist. **S** ist der Standpunkt, d. h. derjenige

Punkt, wo sich das Auge des Beschauers in seiner Grundrißprojection befindet. Die Linie GS heißt die **Standlinie** und giebt jedesmal die Entfernung an, in welcher sich das Auge des Beschauers vor dem Bilde befindet.

Wie die Folge zeigen wird ist es nothwendig, den Standpunkt S auch in der Bildfläche zu haben; man kann ihn sich deshalb nach S′ oder S″ über der Grundlinie gesetzt denken. Da aber der Punkt S in gleicher Höhe mit dem Punkte A in Fig. 1 liegt, so würde man die Punkte S′ oder S″ in der Horizontlinie Fig. 1 erhalten, wenn man aus Fig. 2 die Entfernung GS nach Fig. 1 von A nach S′ oder von A nach S″ trägt.

7) Betrachtet man Fig. 1 und Fig. 2, so ergeben sich folgende Hauptsätze:

Die Achsen der Bäume stehen in der Natur (wie hier angenommen wird) senkrecht, sie stehen auch im Bilde senkrecht, folglich:

> sind alle senkrechten Linien in der Natur auch senkrechte Linien im Bilde.

Ferner, die wagerechten Linien, welche man sich in der Natur von einem Baume zum andern quer über die Allee gezogen denken kann, erscheinen auch in Fig. 1 im Bilde als wagerecht, folglich:

> sind alle wagerechten Linien in der Natur auch wagerechte Linien im Bilde.

Ferner, die beiden Linien, welche man sich durch die Grundpunkte und über die Wipfel der Bäume gezogen denken kann, stehen im Grundrisse (Fig. 2) rechtwinklig (normal) gegen die Grundlinie und auch gegen den Rahmen des Bildes; im Bilde selbst aber (Fig. 1) gehen sie schräg und vereinigen sich im Augenpunkte A, folglich:

> gehen alle auf den Rahmen des Bildes (in der Natur) normale Linien, im Bilde nach dem Augenpunkte A.

8) Wenn man in der Grundlinie eine beliebige Maßeintheilung annimmt, so gilt dieses Maß für die ganze Fläche des Rahmens wie bei jeder geometrischen Fläche.

Da die mit dem Rahmen in der Natur parallelen Ebenen im Bilde nach hinten zu immer kleiner erscheinen, so folgt, daß das Maß der Grundlinie sich in jeder Ebene, welche vom Rahmen weiter nach hinten absteht, auch verändern müsse, das Maß wird nach hinten zu immer kleiner werden. In welchem Verhältniß dies geschieht, werden wir weiter unten sehen.

9) Da die auf den Rahmen normalen Linien sich nach dem Augenpunkte A hin zusammenziehen (Fig. 1) und gleichsam nach diesem Punkte hin zu verschwinden scheinen, so heißt der Punkt A auch zugleich der **Verschwindungspunkt**, für alle diese auf den Rahmen des Bildes normale Linien.

§. 15.

Die Einrichtung des perspectivischen Rahmens oder der perspectivischen Tafel. Taf. 9 Fig. 3 und Fig. 4.

Es wird für die Anschauung sehr bequem sein, wenn man sich den perspectivischen Rahmen mit einer Glasplatte ausgefüllt denkt, durch welche Platte man die dahinter liegenden Gegenstände betrachtet; jedes gewöhnliche Fenster wird hinreichen hiervon einen deutlichen Begriff zu geben.

Von den Gegenständen hinter der Glastafel müssen Lichtstrahlen in unser Auge kommen, wenn wir die Gegenstände sehen sollen. Diese Lichtstrahlen kann man sich als gerade Linien denken, welche auf allen Punkten, wo sie durch die Tafel gehen, dieselbe schneiden.

Es werden somit die Abbildungen der hinter der Glastafel befindlichen Gegenstände, auf der Tafel immer da erscheinen, wo die von ihnen nach unserm Auge kommenden Lichtstrahlen die Tafel schneiden, und auf diese Art kann man nun die Tafel selbst als eine Zeichnung (als ein Bild) betrachten, welche die hinter der Tafel befindlichen Gegenstände getreu darstellt.

Man betrachte Fig. 3; unter der ebenen Fläche abcd stelle man sich eine Glastafel vor, welche senkrecht in der horizontalen Ebene steht. Die Grundlinie der Tafel ab liege in der horizontalen Ebene selbst.

In dieser Grundlinie sei der Grundpunkt G (§. 14) und auf diesem stehe die Mittellinie der Tafel Gc senkrecht. Zieht man ferner durch den Grundpunkt eine auf ab rechtwinklige Linie SH beliebig lang, und nimmt man an, daß der Beschauer in S stehe, so ist S der Standpunkt.

Befindet sich nun senkrecht über S in E das Auge des Beschauers und man zieht parallel mit SG die Linie EA, so wird der Punkt A in der Tafel eben so hoch über G liegen, als E über S lag, weil die Linien ES und AG Parallelen zwischen den Parallelen EA und SG sind. Der Punkt A wird also (nach §. 14 Nr. 2) der Augenpunkt der Tafel sein, und da die Länge der Linie AE zugleich die Entfernung angiebt, wie weit sich das Auge von der Tafel befindet, so nennt man den Punkt E auch den **Entfernungspunkt**.

Nimmt man nun an, daß in der Standlinie SH sich ein Punkt H befände und daß von diesem Punkte aus ein Lichtstrahl in das Auge des Beschauers bei E gelangte, so wird dieser Lichtstrahl die Tafel in H′ schneiden und der Punkt H **hinter** der Tafel wird also **in** der Tafel bei H′ sichtbar werden.

Es würde aber nicht anders als etwa mit ausgespannten Fäden angehen, daß man die Lage der Punkte hinter der Tafel auf der Tafel selbst bestimmte, wenn der Punkt E vor der Tafel steht. Für eine Zeichnung, welche nur ein ebenes Papier darbietet, geht dies Verfahren nicht an; man muß daher ein andres Mittel ergreifen, um den Punkt H bei H′ in der Tafel zu bestimmen.

Trägt man nämlich die Entfernung AE auf der durch A gehenden Horizontlinie (§. 14) entweder von A nach E′ oder von A nach E″, so sind die Entfernungen AE′ und AE″, welche mit der Tafel in eine Ebene fallen, gleich groß mit der Entfernung AE, und man kann nunmehr den Punkt E′ oder E″ eben so gut wie den Punkt E als Entfernungspunkt gebrauchen, wie wir gleich sehen werden.

Wir wollen E′ als Entfernungspunkt (Distanzpunkt) betrachten.

Setzt man die Entfernung des Punktes H hinter der Tafel von G nach H″ auf der verlängerten Grundlinie ab und zieht H″E′, so wird diese Linie die Mittellinie der Tafel bei H′ schneiden. Es ist aber dieses derselbe Punkt, welcher durch den durch die Tafel von H aus nach E gehenden Lichtstrahl geschnitten wurde, und es ist demnach zur Aufsuchung perspectivischer Punkte nicht nothwendig, daß der Entfernungspunkt E vor der Tafel liege, er kann auch wie wir eben gezeigt haben, mit der Tafel selbst in einerlei Ebene (auf dem Papiere, worauf man zeichnet) angenommen werden.

Es ist für das gute Aussehen einer perspectivischen Zeichnung nicht gleichgültig, wie weit man den Entfernungspunkt E von der Tafel annimmt. Das Mindeste ist die *halbe Tafelbreite*.

Besser und schöner wird das Bild, wenn man die Linie E A Fig. 3 gleich der *ganzen Tafelbreite lang* annimmt, oder was dasselbe ist, wenn die Entfernung des Auges eben so groß ist, als die *größte Seite* der Bildfläche.

Wäre also das Bild Hochformat, so würde man nicht die Breite sondern die Höhe zur Entfernung des Auges nehmen.

In Fig. 4 ist der Grundriß von Fig. 3 vorgestellt. Die Linie a b ist Grundlinie und zugleich Projection der Horizontlinie.

Der Punkt G ist Grundpunkt und zugleich Projection des Augenpunktes.

Die Linie H S ist Standlinie und S ist zugleich Projection des Entfernungspunktes (E).

Die beiden Punkte E′ und E″, in der verlängerten Linie a b sind die Projectionen der in der Horizontlinie liegenden Entfernungspunkte Fig. 3 bei E′ E″.

H in Fig. 2 endlich ist der Punkt H aus Fig. 3, welcher hinter der Tafel und in der Standlinie liegt.

Wir haben nunmehr die Einrichtung der Tafel gezeigt, welche bei allen folgenden Beispielen beibehalten werden wird, und wir haben zugleich gesehen wie es möglich wurde, einen Punkt H, welcher hinter der Tafel und in der Standlinie lag, in der Tafel selbst bei H′ zu bestimmen.

Wir müssen nun den Leser aufmerksam machen, nicht eher weiter zu gehen, als bis er die beiden §§. 14 und 15 *vollkommen* verstanden hat und ihm die darin gegebenen Erklärungen geläufig sind.

§. 16.

Die Einrichtung der perspectivischen Zeichnung auf dem Papiere und der perspectivische Maßstab. (Taf. 9, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5.)

Zeichnet man in Fig. 5 das Rechteck a b c d auf dem Papiere, so kann man sich diese Figur als den Rahmen des Bildes oder als die Glastafel vorstellen, durch welche man die dahinter liegenden Gegenstände sieht, welche sich auf ihr abbilden.

Setzt man in der Mittellinie G c dieser Tafel die Höhe des Auges über dem Grundpunkte G bei A fest, so hat man den Augenpunkt. Zieht man durch diesen eine wagerechte Linie, folglich eine Parallele mit der Grundlinie, so ist diese die Horizontlinie. Nimmt man in dieser die Entfernung A E und denkt sich unter E den Punkt, wie weit das Auge des Beschauers von dem Punkte A (folglich von der Tafel selbst) entfernt liegt, so hat man in E den Entfernungspunkt gefunden. (Siehe §. 14 und 15.)

Gehen wir nun zu Fig. 3 und 4 zurück, so haben wir (§. 15) gesehen, daß der Punkt H in der Tafel bei H′ gefunden wurde, wenn man die Entfernung G H von G nach H″ setzte, H″ E zog und den Punkt H′ in der Mittellinie bemerkte.

Eben so aber wird man jeden andern beliebigen Punkt z. B. J in der Tafel bei J′ finden, wenn man die Entfernung G J von G nach J″ setzt, von J″ aus nach E′ zieht und den Punkt J′ in der Mittellinie bemerkt.

Der Punkt J liegt in der Mitte zwischen H und G und man kann sich in der Verlängerten G H nach hinten noch eine Menge gleicher Entfernungen wie G J, J H denken, die man alle eben so wie J und H in der Tafel zu zeichnen im Stande ist.

Man kann also eine Menge gleicher Abtheilungen auf der Mittellinie abschneiden, oder wenn man jeder dieser Abtheilungen ein bestimmtes Maß, z. B. 2 Fuß, unterlegt, kann man sich auf der Mittellinie der Tafel einen perspectivischen Maßstab bilden, welcher in der wagerechten Ebene eine Menge gleicher Entfernungen nach der Tiefe des Bildes hin anzeigt.

Betrachten wir nun Fig. 5.

Setzt man von dem Grundpunkte G nach o ein bestimmtes Maß, z. B. 2 Fuß (NB. es kann aber auch jedes andere beliebige Maß bedeuten), und zieht von o nach A die gerade Linie o A, so ist dies eine Linie in der wagerechten Ebene, welche im Augenpunkte A verschwindet, folglich ist sie (§. 14 Nr. 7) eine Normale auf die Tafel. Das Stück der Mittellinie aber, welches von G nach A geht, verschwindet ebenfalls im Augenpunkte A und die Linie G A ist mithin ebenfalls eine Normale auf die Tafel wie es o A war; folglich sind die Linien o A und G A *perspectivisch* parallel, und es werden folglich alle *zwischen* ihnen gezogenen wagerechten Linien wie bei o 1 2 3.... *perspectivisch* gleich groß sein, da sie Parallelen zwischen Parallelen sind.

Dies behalte man auch für die späteren Fälle wohl.

Will man nun von der Mittellinie ein Stück abschneiden, welches so groß wie o G ist, so ziehe man von o nach E eine gerade Linie, wo diese die Mittellinie schneidet (in 1′) ist 1′ der gesuchte Punkt (wie es Fig. 3 der Punkt H′ für H war) und die Entfernung 1′ G ist perspectivisch gleich mit G o.

Zieht man nun die Wagerechte 1′ 1, so ist diese perspectivisch gleich mit o G.

Zieht man von 1 nach E und bemerkt den Punkt 2′ in der Mittellinie, so ist die Entfernung 1′ 2′ = 1′ G, und die Linien 2 1 = 1 o = 1′ G = o G. Zieht man nun von dem Punkte 2′ in der Mittellinie die Wagerechte 2′ 2 und von 2 wieder nach E und bemerkt den Durchschnittspunkt in der Mittellinie wie vorher, so sieht man daß man bei fortgesetztem Verfahren, so viele gleiche Theile von der Mittellinie abschneiden kann, als man will, und daß man sich auf diese Weise einen perspectivischen Maßstab nach der Tiefe des Bildes machen kann.

Da die wagerechten Linien o G, 1 1′, 2 2′,... auch alle einander perspectivisch gleich sind, so hat man zugleich in jeder der verschiedenen Ebenen auch einen Breitenmaßstab.

Da ferner in jeder senkrechten Ebene die mit der Grundlinie der Tafel parallel ist, das Maß der Grundlinie auch als Höhenmaß gilt, so kann man auch in den verschiedenen Ebenen durch die Linien o G, 1 1′, 2 2′,.... die Höhenmaße bestimmen, wie wir späterhin noch deutlicher sehen werden.

Was die Entfernung der Horizontlinie A E *von der Grundlinie der Tafel* a b *betrifft, so muß hier ein für allemal bemerkt werden, daß es für die Schönheit der Darstellung angemessen ist, wenn man den Punkt A (Augenpunkt) und folglich die Horizontlinie* **so legt, daß sie in dem dritten Theile der Höhe des Bildes zu liegen kommt.**

Denkt man sich nun ferner die wagerechten Linien 1 1′, 2 2′,...... rechts und links verlängert, so erhält man wagerechte Linien in der wagerechten Ebene, welche alle gleich weit von einander abstehen.

Es ist unbequem den perspectivischen Maßstab mitten im Bilde zu haben, deshalb thut man immer besser, ihn am Rande des

Bildes (rechts oder links), am bequemsten links, wie hier bei a, zu zeichnen.

Macht man das Maß auf der Grundlinie o a = o G und nimmt man nun die Randlinie a d des Bildes als Mittellinie an, so daß A′ den Augenpunkt bedeutet, setzt man dann die Entfernung **A E** von A′ nach E′ und zieht am Rande o A′, so ist das Dreieck o A′ a = Dreieck o A G und zieht man am Rande von o nach E′, so ist Dreieck o 1′ a = Dreieck o 1′ G und folglich 1′ a = 1′ G und so weiter; das heißt, die Theilungen am Rande a 1′, 1′ 2′,... entsprechen denen in der Mittellinie G 1′, 1′ 2′,... und man sieht, daß man den perspectivischen Maßstab eben so gut am Rande als in der Mitte zeichnen kann.

Die Fläche von der Grundlinie a b bis zur Horizontlinie hinauf bei **A′ A E′ E** stellt die wagerechte Ebene dar, so weit sie nach der Höhe des Auges bei **A** über dem Grundpunkte bei **G** sichtbar ist.

§. 17.

Aufgabe. Die perspectivischen Höhenmaße zu finden (Taf. 9 Fig. 6).

Auflösung. Zeichnet man sich die Tafel a b c d wie in Fig. 5 auf und den perspectivischen Maßstab dagegen, so ergiebt sich Folgendes.

Bedeutet z. B. das Maß o a zwei Fuß und man will auf der Grundlinie a b selbst eine senkrechte Linie B sechs Fuß hoch machen, so ziehe man eine willkürlich lange Linie B und setze das Maß o a = zwei Fuß dreimal von der Grundlinie auf dieser Linie aufwärts.

Das Maß o a auf der Grundlinie a b gilt nämlich auf der ganzen senkrechten Fläche der Bildtafel als Breiten- und Höhenmaß für alle Linien, welche in dieser Ebene liegen.

Ferner: es wäre in der Grundlinie a b ein Punkt g gegeben, an diesen Punkt stieße eine auf die Grundlinie normale Linie an, so wird dieselbe im Bilde von g nach **A** gezogen werden müssen oder in **A** verschwinden.

Denkt man sich nun auf dem Punkte g eine senkrechte Linie C, sechs Fuß hoch, so wird sie eben so hoch sein wie die Linie B.

Denkt man sich ferner von dem oberen Endpunkte k der senkrechten Linie C eine Linie von k nach **A** gezogen, so ist diese Linie k **A**, weil sie im Augenpunkte verschwindet, auch eine normale Linie auf die Tafel (§. 14 Nr. 7) wie die Linie g **A** war, folglich sind die Linien k **A** und g **A** perspectivisch parallel.

Zieht man nunmehr durch die Punkte des perspectivischen Maßstabes 1 1′, 2 2′,.... Parallelen mit der Grundlinie a b, welche Parallelen die Linie g **A** schneiden und errichtet auf den Durchschnittspunkten die Perpendikel D F G′, so sind diese alle gleich hoch, und zugleich alle so hoch wie der Perpendikel C gemacht worden war, denn die Perpendikel C D F G′ sind parallel und befinden sich zwischen den perspectivisch parallelen Linien g **A** und k **A**, folglich sind sie Parallelen zwischen Parallelen, daher einander gleich. Man kann also nach dieser Methode auf jedem beliebigen Punkte der wagerechten Bildebene einen Perpendikel von bestimmter Höhe errichten.

Gesetzt es wäre der Punkt m gegeben, man soll einen Perpendikel von 6 Fuß Höhe darauf errichten.

Zieht man von dem Punkte m eine wagerechte Linie nach dem perspectivischen Maßstabe herüber, so fällt sie in die Linie desselben bei 4. Auf dieser Linie aber steht der Perpendikel G′ und der Perpendikel H wird nun eben so lang werden müssen wie der Perpendikel G′ war, weil sie in einer und derselben senkrechten Ebene liegen und für eine solche der Höhenmaßstab gleich ist.

Um die Aufgabe noch allgemeiner zu stellen, nehme man an, daß in der wagerechten Ebene ein ganz willkürlicher Punkt n gegeben sei; man soll auf diesem Punkte n einen Perpendikel von 6 Fuß Höhe errichten.

Man ziehe durch den Punkt n die Linie **A** g, so ist diese eine Normale auf die Grundlinie a b.

Nun errichte man auf g den Perpendikel C und trage das Maß o a des perspectivischen Maßstabes = 2 Fuß dreimal auf C von g bis k, so ist der Perpendikel C 6 Fuß hoch gemacht worden.

Zieht man nun k **A**, so ist diese perspectivisch parallel mit g **A**.

Errichtet man nun auf dem Punkte n den Perpendikel F, so ist dieser eben so hoch wie der Perpendikel C, weil beide wieder Parallelen zwischen den perspectivischen Parallelen k **A** und g **A** sind.

In gleicher Weise würde man den Perpendikel bei J gleich hoch mit dem Perpendikel bei G′ und H machen, weil sie alle auf derselben wagerechten Linie, folglich in gleicher Entfernung hinter der Grundlinie stehen.

Man sieht, daß man auf diese Weise auf jedem beliebigen Punkte Perpendikel von beliebiger Höhe, folglich alle Höhenpunkte finden kann.

§. 18.

Aufgabe. Es soll ein Cubus und eine Reihe gleich weit von einander abstehender Prismen perspectivisch gezeichnet werden. (Taf. 9 Fig. 7.)

Auflösung. Man richte sich zuerst die Tafel auf dem Papiere ein mit dem perspectivischen Maßstabe, wie in Fig. 6 gezeigt wurde.

Von dem Beschauer links hinter der Tafel stehe ein Cubus und zwar 2 Fuß von der Mittellinie links und hinter der Grundlinie a b 4 Fuß entfernt.

Die Linie o a des perspectivischen Maßstabes sei 2 Fuß lang, so sind auch alle Theilungen von o bis 1, von 1 bis 2, von 2 bis 3,..... 2 Fuß lang. Es kommt nunmehr darauf an den Punkt k des Cubus zu bestimmen, welcher Cubus 2 Fuß hoch und breit ist.

Der Punkt k liegt, wie vorausgesetzt, 2 Fuß links von der Mittellinie. Nimmt man demnach die Linie o a = 2 Fuß in den Zirkel, setzt sie auf der Grundlinie von dem Grundpunkte G nach h, so ist h von G um 2 Fuß entfernt. Zieht man die Linie h **A**, so ist sie normal auf der Grundlinie und von der Mittellinie überall 2 Fuß weit entfernt; es wird also die eine Seite des Cubus in ihr liegen.

Der Punkt k liegt ferner, wie vorausgesetzt, 4 Fuß hinter der Grundlinie. Wenn wir also eine Linie finden, die 4 Fuß hinter der Grundlinie liegt, so wird die vordere Seite der Grundfläche des Cubus in ihr liegen.

Auf dem perspectivischen Maßstabe ist die Linie o 1 = 2 Fuß, die Linie 1 2 auch 2 Fuß lang, folglich ist die Linie o bis 2 = 4 Fuß lang. Zieht man nun von 2 bis 2′ nach 1 und k eine wagerechte Linie, so liegt diese 4 Fuß hinter der Grundlinie und die Linie 1 k wird die andere Kante der Grundfläche des Cubus sein, wenn man noch i gefunden hat; da aber der Cubus 2 Fuß breit ist, so setze man 2 Fuß = o a = h G, von h nach g auf der Grundlinie und ziehe g A, so schneidet diese die 2 Fuß lange Seite i k ab.

Will man nun auch die hintere Seite m l der Grundfläche finden, so ist diese 2 Fuß von i k entfernt. Man ziehe also durch den Punkt 3 des perspectivischen Maßstabes eine Linie wagerecht bis l, so ist m l diese gesuchte hintere Seite und i k l m ist das Quadrat der Grundfläche des Cubus. Um nun den Cubus zu vollenden braucht man nur auf den Punkten i k l m Perpendikel zu errichten, und die beiden auf i und k so hoch wie die Linie i k lang ist zu machen.

Ferner muß man die beiden Perpendikel über m und l so hoch machen wie die Linie m l lang ist; zieht man alsdann auf den Endpunkten der Perpendikel i und k eine Parallele mit i k, auch zwei Linien nach A und durch die Endpunkte der Perpendikel über m und l eine Parallele mit m l, so wäre der gesuchte Cubus vollendet.

Schwebte ein eben solcher Cubus 6 Fuß über der Grundebene, stünde aber ebenfalls 2 Fuß links von der Mittellinie und 4 Fuß hinter der Grundlinie, wie vorhin, so suche man erst das Quadrat i k l m, mache dann die Linien i n, m q, k p und l r 6 Fuß lang und verbinde die Punkte n p r q durch gerade Linien, so hat man die Grundfläche des schwebenden Cubus gefunden, worauf man ganz ähnlich wie vorhin verfährt, um die Höhen zu finden, was die Zeichnung ganz deutlich macht.

Betrachtet man die Grundfläche und obere Fläche des untern Cubus, so sieht man, daß die Fläche am größten (breitesten) erscheint, welche am weitesten von der Horizontlinie A′ A E absteht, läge eine wagerechte Fläche in der Höhe der Horizontlinie selbst, so würde sie nur als Linie erscheinen und gar keine Tiefe zeigen.

Um die rechts von der Mittellinie gezeichneten Prismen aufzutragen, darf man nur ihre Maße und Abstände von der Mittel- und Grundlinie wissen.

Jedes Prisma hat eine quadratische Grundfläche von 2 Fuß, sie stehen alle unter einander und das erste auch von der Grundlinie 2 Fuß ab, die Höhe der Prismen beträgt 8 Fuß. Von der Mittellinie rechts sind sie 4 Fuß entfernt.

Macht man nun die Entfernung G z auf der Grundlinie = 4 Fuß = 2 × (o a) und zieht z A, so liegen in dieser Linie alle vorderen Kanten der Grundflächen der Prismen.

Macht man ferner auf der Grundlinie z v = o a = 2 Fuß und zieht v t nach A hin, so ist die Breite aller Prismen zwischen z A und w A bestimmt. Nun steht das erste Prisma 2 Fuß hinter der Grundlinie und ist auch 2 Fuß breit, man ziehe demnach durch die Punkte 1 und 2 des perspectivischen Maßstabes wagerechte Linien, so erhält man die vordere Kante w t des ersten Prisma und dessen hintere Kante bei x. Ganz ähnlich verfährt man bei den übrigen Prismen. Um ihre Höhen zu bestimmen setze man die Linie 1 1′ = 2 Fuß des perspectivischen Maßstabes von w und t in die Perpendikel aufwärts und verbinde die Endpunkte, zieht man nun noch von u nach A, so erhält man alle Oberkanten der anderen Prismen, und die oberen Seitenkanten werden wagerecht daran gezogen, was aus der Zeichnung deutlich wird. Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß man auf diese Art Körper perspectivisch zeichnen kann, *ohne daß man irgend einer geometrischen Zeichnung dazu bedarf*, und daß man die Maße nur im Kopfe zu haben oder anzunehmen braucht.

§. 19.

Aufgabe. Ein Achteck perspectivisch zu zeichnen. (Taf. 9 Fig. 8.)

Auflösung. Das geometrisch gezeichnete Achteck f g h i k l.... ist hier wegen Raumersparung in die Bildtafel selbst gezeichnet worden.

Man richte sich die Bildtafel und den zugehörigen perspectivischen Maßstab ein, wie früher.

Das Achteck stehe um die Entfernung p G von der Mittellinie links, so trage man diese Entfernung von G nach p und ziehe p A, so liegt in dieser Linie die Seite h i des Achtecks.

Das Achteck sei ferner in ein Quadrat eingezeichnet, welches zwei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes, wie o a, zum Durchmesser hat, so setze man einen solchen Theil von p nach r und den andern von r nach t, ziehe r A und t A, so hat man die Linien, in welchen die Mittellinie des Achtecks und die Seite n m fallen wird.

Nun stehe das Achteck um einen Maßtheil des perspectivischen Maßstabes hinter der Grundlinie zurück, so schneide man von 1 wagerecht herüber, und wo diese Linie die t A und p A schneidet, wird die Seite f g des Achtecks liegen. Da das Achteck auch zwei Maßtheile tief ist, so schneide man eben so wagerecht von 2 und 3 herüber und man erhält die Mittellinie und die hinterste Linie l k des Achtecks; um nun endlich die schrägen Seiten zu bekommen, setze man die Punkte f und g nach s und q in die Grundlinie und denke sich s A und q A gezogen; wo die Durchschnittspunkte hinfallen, liegen auch die Endpunkte der schrägen Seiten. Ganz ähnlich verfährt man für die Punkte i h n m nach der Tiefe. Wenn man sich in dem Achteck einen Kreis gezeichnet denkt, so kann man ihn sehr leicht aus freier Hand in das perspectivische Achteck eingezeichnet denken.

Ganz ähnlich würde man ein Achteck finden, welches nicht in der wagerechten Grundebene, sondern über dem Horizont läge. Alsdann zeichnete man es erst in der wagerechten Ebene, errichtete auf allen Endpunkten Perpendikel und machte diese so lang, wie hoch das gegebene Achteck über der Grundebene liegen soll; verbindet man alsdann diese gefundenen Höhenpunkte, so erhält man das Achteck, welches gesucht wurde.

§. 20.

Aufgabe. Dreiecke perspectivisch zu zeichnen. (Taf. 9 Fig. 9.)

Auflösung. Die beiden gegebenen geometrischen Dreiecke g h f und k m n sind in die Bildtafel selbst wegen Raumersparung gezeichnet worden.

Zuerst wollen wir das Dreieck g h f bestimmen, nachdem wieder wie früher die Tafel a b c d und der perspectivische Maßstab festgesetzt worden sind.

Es liege in dem Dreieck g h f der Punkt h um die Entfernung G i in der Grundlinie von der Mittellinie ab, so trage man diese Entfernung von G nach i und ziehe i A, so wird in dieser Linie der perspectivische Punkt h liegen.

Ferner trage man die Linie h g des geometrischen Dreiecks auf die Grundlinie von i nach v und ziehe v A, so wird in dieser Linie der Punkt g und die Seite g f des Dreiecks liegen.

Das Dreieck stehe um einen Maßtheil mit seiner Seite g h von der Grundlinie ab, so ziehe man durch den Punkt 1 des perspectivischen Maßstabes eine wagerechte Linie; wo diese die Linien **v A** und **i A** in der Tafel schneidet, wird die Seite g h des Dreiecks liegen.

Die Seite f g im geometrischen Dreieck ist einen Maßtheil lang. Zieht man demnach durch den Punkt 2 des perspectivischen Maßstabes eine wagerechte Linie bis dahin, wo sie die Linie v A schneidet, so ist f der gesuchte letzte Punkt des perspectivischen Dreiecks g h f.

Nun soll man das gleichschenklige Dreieck k m n perspectivisch zeichnen.

Es liege in der Grundebene der Punkt k um die Entfernung **G p** von der Mittellinie ab, so setze man diese Entfernung in die Grundlinie von G nach p, ziehe p A, so wird der Punkt k in **p A** zu liegen kommen.

Die Entfernung k m des geometrischen Dreiecks auf der Grundlinie der Tafel von p nach q gesetzt und q A gezogen, giebt die Linie, in welcher der Punkt m zu liegen kommen wird.

Zieht man nun noch aus der Mitte zwischen p und q aus t nach A, so liegt in dieser Linie die Mittellinie des Dreiecks.

Nun sei die Linie k m des geometrischen Dreiecks um einen Maßtheil von der Grundlinie entfernt, so ziehe man durch den Punkt 1 des perspectivischen Maßstabes eine wagerechte Linie, bis sie die p A und q A in k und m schneidet, so hat man die Grundlinie des perspectivischen Dreiecks k m gefunden.

Die Höhe l m des geometrischen Dreiecks beträgt zwei Maßtheile, zieht man also durch den Punkt 3 des perspectivischen Maßstabes eine wagerechte Linie, bis sie die Linie t A in n schneidet, so ist das perspectivische Dreieck k m n das gesuchte.

§. 21.

Aufgabe. Ein schiefwinkliges Dreieck und eine beliebig gekrümmte Linie perspectivisch zu zeichnen. (Taf. 9 Fig. 10.)

Auflösung. Das Dreieck, so wie die gekrümmte Linie, sind geometrisch der Raumersparung wegen in die Bildtafel selbst gezeichnet worden. Auch bedeutet die darunter punktirte Linie i n die Grundlinie der Tafel, so daß also alle senkrechten Abstände der einzelnen Punkte des Dreiecks und der krummen Linie von der Grundlinie meßbar werden. Nun richte man die Bildtafel a b d c wie immer bisher ein.

Wir nehmen nun zuerst das Dreieck. Der Punkt l liegt in der geometrischen Zeichnung von dem Punkte v um die Entfernung l v ab. Setzt man diese in der Grundlinie der Bildtafel von G nach l und zieht von l nach **A** eine Linie, so wird in ihr der Punkt h liegen.

Trägt man ferner eben so aus der geometrischen Zeichnung die Entfernung k v auf der Grundlinie der Bildtafel von G nach k und zieht von k eine Linie nach A, so wird in ihr der Punkt g liegen. Trägt man ferner aus der geometrischen Zeichnung die Entfernung i v von G nach i und zieht von i nach A eine Linie, so wird in ihr der Punkt f liegen.

Wo diese Punkte zu liegen kommen werden, wird nun durch die Tiefenmaße bestimmt.

In der geometrischen Zeichnung liegt der Punkt h von der Grundlinie so weit entfernt, wie die Linie l h lang ist. Diese Länge trage man auf der nach links verlängerten Grundlinie der Tafel von a nach n, ziehe n E, so schneidet diese Linie auf ihrem

Durchschnittspunkte auf der Tafellinie a d ein Stück a s ab, welches so groß ist als a n. (Wie bei dem perspectivischen Maßstabe.)

Zieht man nun durch s eine Wagerechte s h, so ist l h in der perspectivischen Zeichnung = l h in der geometrischen und der Punkt h der gesuchte. Trägt man eben so g k von a nach m, zieht m E bis w und von w wagerecht nach g, so ist g der gesuchte Punkt.

Trägt man eben so i f von a nach p, zieht p E bis z und von z wagerecht nach f, so ist der letzte Punkt gefunden. Verbindet man nun die Punkte f g h der perspectivischen Zeichnung durch gerade Linien, so hat man das Dreieck f g h gefunden.

Man sieht aus diesem Beispiele, daß man jeden beliebigen, in der Grundebene gelegenen Punkt perspectivisch finden kann, wenn man nur seine normale Entfernung von der Standlinie (im Bilde die Mittellinie) und seine normale Entfernung von der Grundlinie der Tafel weis.

Nun wollen wir die krumme Linie rechts im Bilde suchen.

Man denke sich die krumme Linie aus den Stücken f g, g h, h i bestehend, so wird man nach dem Vorigen im Stande sein, die Punkte f g h i perspectivisch zu bestimmen.

Man trage z. B. aus der geometrischen Zeichnung die Entfernung v k auf der Tafelgrundlinie von G nach k, ziehe k A, so liegt in dieser Linie der perspectivische Punkt f. Um ihn der Tiefe nach zu bestimmen, trage man die Geometrische k f auf der links verlängerten Grundlinie von a seitwärts auf, ziehe von diesem gefundenen Punkte eine Linie nach E, und wo diese die Tafellinie a d schneidet, ziehe man wagerecht nach der Richtung bis p, so ist der Durchschnittspunkt f auf der Linie k A der gesuchte.

Eben so findet man auf l A den Punkt g, auf m A den Punkt h, auf n A den Punkt i, wenn man sie wie f einzeln sucht.

Verbindet man nun die gefundenen Punkte f g h i der perspectivischen Zeichnung aus freier Hand, so hat man das perspectivische Bild der gegebenen geometrischen krummen Linie gefunden. Hieraus folgt deutlich, daß man jede beliebige krumme oder gebrochene Linie finden kann, wenn man einzelne Punkte davon sucht und diese nachher unter einander verbindet.

§. 22.

Aufgabe. Ein Prisma mit Deckplatte und einem paar Treppenstufen zu zeichnen. (Taf. 9 Fig. 11.)

Auflösung. Zuvörderst richte man sich die Tafel und den perspectivischen Maßstab ein. Will man nun zuerst das Prisma zeichnen, so muß man das Maß seiner Grundfläche und deren Abstände von der Grund- und Standlinie (im Bilde Mittellinie) kennen. Dann sucht man vermittelst der Linien, welche nach dem Augenpunkte gehen, die Breiten, und vermittelst des perspectivischen Maßstabes die Tiefen der Linien, welche den perspectivischen Grundriß bilden. Betrachtet man dabei Taf. 9 Fig. 7 und vergleicht, was §. 18 über die Auffindung eines Cubus gesagt wurde, so kann dies keine Schwierigkeit haben.

Hat man den Grundriß gefunden, so trägt man alle Höhen des Prisma auf, woraus man die obere Fläche desselben perspectivisch findet.

Um die Platte zu finden, zeichne man sich ihren Vorsprung im Grundrisse wie bei m n p q auf, ziehe dann in dem perspectivischen Quadrate, welches die obere Fläche des Prisma begrenzt, Diagonalen und verlängere diese willkürlich, so müssen die unteren Eckpunkte der Platte in diese Diagonalen fallen, wenn man die

Punkte m n p q senkrecht hinauf schneidet. Sucht man nun noch die Höhe der Deckplatte nach §. 17 Fig. 6, so hat man die Zeichnung vollendet.

Um nun die Treppenstufen zu finden, suche man erst den Punkt v und bestimme die Tiefe der Linie v x mit dem perspectivischen Maßstabe. Dann setze man mit dem Maße 1 1′ des perspectivischen Maßstabes (welche Linie in derselben Ebene liegt, wie die vordere Fläche der Treppe) die Höhe v z und die Breite der Stufe auf, errichte in x einen Perpendikel und ziehe z A, so findet man die hintere Höhe, und wenn man u A zieht, auch die hintere Breite; so verfahre man bei jeder Stufe, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, um die Treppe nach und nach zu vollenden.

§. 23.

Erklärung einer bequemen Methode, um schräg gegen die Grundlinie stehende Gegenstände schneller als nach der bisher beschriebenen Art zu zeichnen. (Taf. 9 Fig. 12 und unmittelbar darunter der zugehörige geometrische Grundriß Fig. 17.)

Wir haben in Fig. 10 §. 21 gesehen, daß es allerdings möglich ist, jede beliebige Linie und Fläche, folglich auch jeden beliebigen Körper perspectivisch dadurch zu finden, daß man die Lage jedes einzelnen Punktes nach und nach bestimmte; man hat aber eine Methode, dies Verfahren bedeutend abzukürzen, sie besteht in Folgendem.

Es sei in der geometrischen Grundrißzeichnung Fig. 17 a b die Grundlinie der Bildtafel und folglich auch die wagerechte Projection derselben, G sei der Grundpunkt und zugleich die Projection des Augenpunktes. Die nach hinten verlängerte Linie E″ G sei die Standlinie und E″ der Standpunkt, also die Linie E″ G = der Entfernung des Auges von der Tafel (vergleiche Fig. 3 §. 15). Hinter der Grundlinie a b befinde sich in der wagerechten Grundebene ein Rechteck f g h i, unter irgend einem beliebigen Winkel gegen die Grundlinie geneigt, welches man perspectivisch zeichnen soll.

Zieht man mit f g aus E″ eine Parallele bis zur Grundlinie nach E′, so wird der Punkt E′ die Projection eines Punktes im Horizonte sein, worin alle Linien zu verschwinden scheinen, welche in der Natur mit f g parallel sind.

Man nennt einen solchen Verschwindungspunkt (zum Unterschiede von dem Augenpunkte, in welchem bekanntlich alle Normalen auf die Tafel verschwinden) einen zufälligen Verschwindungspunkt.

Setzt man nun die Linie E′ E″ von E′ nach T′, so erhält man in T′ die Projection desjenigen Punktes im Horizonte, vermittelst dessen man im Stande ist, bestimmte Theile von den in E′ verschwindenden Linien abzuschneiden (wie wir bald sehen werden); deshalb heißt der Punkt T′ der Theilpunkt für den Verschwindungspunkt E′.

Man erinnere sich, daß bei normalen Linien auf die Tafel, welche im Augenpunkte verschwinden, der Entfernungspunkt zugleich der Theilpunkt war. Man vergleiche die Figuren 3....11, wo bei dem perspectivischen Maßstabe der Punkt A′ den Augenpunkt, und die Entfernung A′ E den Abstand von der Tafel bedeutete, und E, der Entfernungspunkt, gerade so weit von der Tafel abstand, als die Entfernung A′ E groß ist.

Zieht man ferner in Fig. 17 mit der Linie g h eine Parallele aus E″ nach E, so ist, wie vorhin, E die Projection eines Punktes im Horizonte, nach welchem alle Linien verschwinden werden, welche mit g h parallel sind, sie mögen in der Grundebene oder höher liegen.

Setzt man die Entfernung E E″ von E nach T, so ist T, wie vorhin, die Projection desjenigen Punktes im Horizonte, vermittelst dessen man im Stande ist, bestimmte Theile von den in E verschwindenden Linien abzuschneiden; deshalb heißt der Punkt T der Theilpunkt für den Verschwindungspunkt bei E.

Betrachtet man nun noch den Winkel unter der Grundlinie E′ E″ E, so ist er ein rechter Winkel, wie f g h, weil die Linie E′ E″ mit f g und die Linie E″ E mit h g parallel gezogen worden war.

Es folgt ferner aus dem Vorigen, daß man den Verschwindungspunkt jeder wagerechten Linie findet, wenn man mit ihr eine Parallele aus dem Entfernungspunkte nach dem Horizonte gezogen denkt, wo diese den Horizont schneidet, ist der gesuchte Punkt; den zugehörigen Theilpunkt findet man, wenn man dieselbe Länge von dem gefundenen Verschwindungspunkte in den Horizont einträgt, wie man in Fig. 17 E″ E″ von E′ nach T′ getragen hatte.

Gehen wir nun zu Fig. 12 über. Die Einrichtung der Tafel ist wie gewöhnlich; um aber die Punkte E′ und E zu finden, trage man aus Fig. 17 G E″ in Fig. 12 von A nach E″, so hat man die Entfernung des Auges von der Tafel. Nun setze man Fig. 12 bei E″ den rechten Winkel E′ E″ E eben so an, wie er in Fig. 17 bei E″ angetragen war, so erhält man in Fig. 12 die Verschwindungspunkte E′ und E im Horizonte. Macht man nun Fig. 12 E E″ = E′ T′, so ist T′ der Theilpunkt für den Verschwindungspunkt E′, und wenn man E E″ = E T macht, so ist T der Theilpunkt für den Verschwindungspunkt E.

Nun wollen wir die Zeichnung des Rechtecks f g h i perspectivisch suchen.

Verlängert man in Fig. 17 die Linie f g bis k, so hat man eine Linie f k, welche in E′ ihren Verschwindungspunkt hat.

Trägt man nun aus Fig. 17 die Entfernung G k nach Fig. 12 von G nach k und zieht in Fig. 12 k E′, so wird die Linie f g in k E′ liegen. Will man nun auf dieser Linie ein Stück wie g k abschneiden, so nehme man aus Fig. 17 die Linie g k, trage sie in Fig. 12 von k nach m und ziehe m T′, so wird diese die Linie k E′ in g schneiden und g der gesuchte Punkt sein.

Eben so findet man den Punkt f.

Man setzt aus Fig. 17 die Entfernung k f nach Fig. 12 von k nach n, zieht n T′, und wo diese die k E′ schneidet, in f, ist der gesuchte Punkt und die Linie f g in Fig. 12 ist das perspectivische Bild der Linie f g in Fig. 17.

Will man nun die Linie g h finden, so ist in Fig. 17 g h eine Linie, welche in dem Punkte g anfängt und ihren Verschwindungspunkt im Horizonte bei E haben wird. Zieht man also in Fig. 12 von g nach E, so liegt in dieser Linie g h.

Zieht man T v, setzt die Entfernung g h von v nach l und zieht l T, so schneidet diese g h auf g E ab. Die beiden anderen Seiten finden sich leicht, man braucht nur von f aus die Linie f E und von h aus die Linie h E′ zu ziehen, so wird der Punkt i in Fig. 12 dem Punkte i in Fig. 17 entsprechen, denn so wie die Linien in Fig. 17, f g parallel i h, und g h parallel f i, so sind sie auch perspectivisch parallel in Fig. 12, und in Fig. 12 ist die Zeichnung f g h i das gesuchte Rechteck.

Man kann jetzt schon übersehen, daß diese Methode bei sehr vielen unter sich parallelen Linien, wie z. B. bei ganzen Gebäuden, große Bequemlichkeiten hat.

§. 24.

Einrichtung des perspectivischen Maßstabes für die in §. 23 gezeigte Methode. (Taf. 9 Fig. 13.)

Es sei Fig. 13 die Einrichtung der Tafel dieselbe wie §. 23 in Fig. 12.

Denkt man sich die Linie h E' gezogen, so lassen sich von ihr gleichgroße Stücke abschneiden; wenn man von h aus auf der Grundlinie die gleichen Theile h 1, 1 2.... aufträgt und von den Punkten 1 2 3.... nach dem zur Linie h E' gehörigen Theilpunkte T' zieht, so sind auf der Linie h E' die Stücken h 1, 1 2.... perspectivisch eben so groß, als die auf der Grundlinie geometrisch aufgetragenen. Zieht man nun von h aus die Linie h E, setzt wieder dieselben gleichen Theile von h aus rechts ab auf der Grundlinie und zieht von diesen Punkten nach dem zur Verschwindungslinie h E gehörigen Theilpunkte T, so erhält man ganz ähnliche Theilung der Linie h E, wie früher von h E'.

Es schneidet sich auf der Linie h E mit dem Punkte 1 das Stück h k ab, welches perspectivisch eben so groß ist, wie h 1 auf der Grundlinie.

Zieht man nun k E', so ist sie perspectivisch parallel mit G E', zieht man zwischen diesen beiden Linien die wagerechte Linie k 1, so schneidet sie von der Linie h E' in dem Punkte 1 das Stück h 1 eben so ab, als es früher dadurch abgeschnitten wurde, wenn man von dem Punkte 1 in der Grundlinie (links von G) nach dem Theilpunkte T' gezogen hatte.

Zieht man also zwischen den beiden Linien h E' und k E' abwechselnd wagerechte Linien und von den Durchschnittspunkten auf h E' Linien nach dem Verschwindungspunkte E, so erhält man, wie die Zeichnung zeigt, einen perspectivischen Maßstab für die Linie k E', und man braucht die Theilungen nicht alle auf der Grundlinie aufzutragen, welches letztere namentlich bei beschränktem Raume des Papieres und des Reißbrettes oft sehr störend ist, ja wohl zuweilen gar nicht angeht. Es ist demnach die Einrichtung eines perspectivischen Maßstabes so wie früher viel bequemer, als wenn man keinen anwendet.

§. 25.

Eine anderweitige bequeme Einrichtung der Tafel. (Taf. 9 Fig. 14.)

Man denke sich die Tafel wie in Fig. 12 und 13 eingerichtet.

Es ereignet sich häufig, daß bei kleinem Reißbrett oder bei großen Zeichnungen der Verschwindungspunkt E weit außerhalb des Bildes fällt, so daß daraus die größte Unbequemlichkeit entsteht. Um nun diesen weit außerhalb des Bildes liegenden Punkt E ganz entbehren zu können, mache man sich im Kleinen (nach Verhältnißtheilen, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der großen Bildfläche) dieselbe Tafeleintheilung, wie die große Bildfläche, worauf man zeichnen will, hat.

Dann ziehe man von d eine Linie d E, so wird diese die Tafel rechts bei 4 schneiden. Nun setze man rechts und links im Horizonte den Punkt Null (0) an, theile rechts von Null (0) bis

4 vier gleiche Theile ab und setze diese Theilung unterhalb des Horizontes in gleicher Weise fort.

Eben so theile man den Rand der Tafel links, von Null (0) aufwärts, in vier gleiche Theile und setze diese Theilung unterhalb des Horizontes ebenfalls fort, so hat man die beiden Linien a d und b e proportional getheilt, und wenn man z. B. über dem Horizonte links von Punkt 4 nach dem Punkte 4 rechts über dem Horizonte zieht, so würde eine solche Linie nothwendig verlängert nach E gehen müssen, wenn E auf dem Zeichenbrette vorhanden wäre.

Dasselbe gilt von allen gleichnamigen Zahlen rechts und links, wenn sie beide entweder über oder unter dem Horizonte liegen. Hätte man nun im Bilde einen Punkt h, und man soll von ihm aus eine nach E verschwindende Linie ziehen, so probirt man mit dem Lineal so lange, bis dieser Punkt und zwei der gleichnamigen Theilungsziffern (hier 2 und 2) in eine gerade Linie fallen, und zieht dann die Linie h k beliebig lang.

Hier müßten die beiden Theilpunkte (2, 2) unter dem Horizonte liegen, da der Punkt h ebenfalls unter dem Horizonte lag.

Denkt man sich die Linie h n gezogen und von n aus die Linie 3 n 3 wie vorhin, so geht auch diese verlängert nach E aus denselben Gründen wie vorhin.

Denkt man sich nun in i und k Senkrechte errichtet, so werden sie perspectivisch so hoch sein, wie h n, weil die beiden sie begrenzenden Linien oben und unten perspectivisch parallel sind.

Denkt man sich ferner h E' und n E' gezogen, so werden die auf l und m errichteten Perpendikel ebenfalls so hoch wie h n sein, weil h E' und n E' perspectivisch parallel sind.

Man sieht hieraus, daß man durch die in vorliegender Fig. 14 geschehene Proportional-Eintheilung des Randes der Tafel rechts und links, über und unter dem Horizonte den Punkt E gänzlich entbehren kann.

Hat man die Haupteintheilung verhältnißmäßig im Kleinen gemacht, so kann man sie sehr leicht in die große Bildtafel, in welcher man zeichnet, eintragen.

§. 26.

Weitere Anwendungen von §. 23, §. 24, §. 25. (Taf. 9 Fig. 15.)

Man richte sich die Tafel wie in Fig. 14 ein und nehme an, daß im Bilde ein Punkt gegeben sei, von welchem aus man mehrere andere Punkte bestimmen will.

Will man nun zuerst die Maße der Abstände für den Punkt n von Grund- und Mittellinie bestimmen, so zieht man E' n m. Zieht man nun von T' durch n nach der Grundlinie bis v, so ist das Stück n m perspectivisch so groß, wie das geometrische Stück m v. Wollte man nun auf E' n zwei gleich große Stücke, so groß wie v w und w z, abschneiden, so ziehe man von w und z nach T'; wo die Durchschnittspunkte in E' m fallen, sind die verlangten Stücke abgeschnitten. Wollte man nun auf den Punkten n s t der Linie E' m gleich hohe Perpendikel errichten, so errichte man zuerst bei m auf der Grundlinie einen Perpendikel m p in geometrischem Maße so groß, als die andern bei n s t werden sollen. Zieht man nun von p aus die Linie p E', so sind p E' und m E' perspectivisch parallel, weil sie in dem gemeinschaftlichen Punkte E' verschwinden; errichtet man nun die Perpendikel n q, s u und t r, so sind diese Parallelen zwischen Parallelen, folglich perspectivisch einander gleich.

Wollte man nun von n und q aus Linien ziehen, welche nach dem in der Tafel nicht vorhandenen Verschwindungspunkte E gehen sollen, so findet man für n die Linie 4 n 4 und für q 6½ q 6½.

Soll nun von dem Punkte n aus auf der Linie 4 n 4 ein Stück von 5 Fuß oder 5 Theilen abgeschnitten werden, so ziehe man erst T l, setze von l aus ein Maß von 5 Theilen auf die Grundlinie bis i, ziehe i T, so ist n k 5 Theile lang. Zieht man nun noch durch den Punkt t eine Linie 3 t 3 und durch k eine Linie nach E, so ist n k h t ein Rechteck, und wenn man noch k x und x o nach E′ zieht, so erhält man die Figur eines Prisma in geneigter Stellung gegen die Tafel.

§. 27.

Aufgabe. Es sollen ein Cylinder und ein Kegel, deren Achsen in den Grundflächen parallel mit der Grundlinie der Tafel stehen, perspectivisch gezeichnet werden. (Taf. 9 Fig. 16.)

Auflösung. Es wird nach dem, was in §. 19 bei Taf. 9 Fig. 8 über die Zeichnung eines Achtecks im Quadrate und eines Kreises im Achtecke gesagt war, nicht schwer sein, das Geforderte zu leisten. Man richte sich Fig. 16 die Tafel so ein, wie sie in Fig. 8 eingerichtet war, mit dem perspectivischen Maßstabe dabei.

Es lägen nun die vorderen Seiten der Grundquadrate, in welchen die Achtecke und Kreise der Grundflächen beider Körper eingeschlossen sind, um einen Maßtheil des perspectivischen Maßstabes von der Grundlinie der Tafel zurück, so ziehe man durch 1 des perspectivischen Maßstabes eine Wagerechte, und man wird die Linie haben, in welcher die vordere Seite der Quadrate liegen wird. Die Quadrate sollen zwei Maßtheile breit und tief werden. Man ziehe demnach noch durch 2 und 3 des perspectivischen Maßstabes Parallelen mit der Grundlinie der Tafel, so hat man die Mittellinie und hintere Begrenzung gefunden.

Stände nun der Punkt p in der Grundlinie der Tafel um ein Maßtheil links von der Mittellinie der Tafel (Standlinie) und man zieht p A, so hat man die rechte Seite des Grundquadrats. Macht man p m und m n gleich einem Maßtheile und zieht m A und n A, so hat man die Mittellinie und die andere Seite des Quadrats. Nun sucht man nach §. 19 das Achteck und beschreibt in diesem den Kreis, so hat man die Grundfläche des Cylinders.

Bestimmt man nun die Höhe desselben, was gar keine Schwierigkeit hat, und zieht die äußeren beiden Begrenzungslinien, wo sie den oberen und unteren Kreis tangiren, so hat man den Cylinder gefunden. Bei dem Kegel ist es eben so leicht.

Die Tiefen waren bereits bestimmt. Sucht man die Punkte q r s und zieht die Linien q A, r A, s A, so schneidet sich das Grundquadrat des Kegels ab. Errichtet man auf dessen Mitte eine Senkrechte, bestimmt darauf (mittelst des perspectivischen Maßstabes) die Höhe und zieht von da ab die Begrenzungslinien, so hat man den Kegel gefunden.

§. 28.

Aufgabe. Es soll ein Cubus perspectivisch gezeichnet werden, dessen eine Seite einen beliebigen Winkel mit der Grundlinie der Tafel macht. (Taf. 9 Fig. 18.)

Auflösung. Man richte die Tafel nach §. 23 Tafel 9 Fig. 12 ein.

Man will, daß der Körper mit seiner einen Kante in dem Punkte v stehen soll, weil man vorher weiß, daß die perspectivischen Linien alsdann angenehm fallen werden.

Zieht man nun E′ v bis r an der Grundlinie, so hat man von v nach E′ hin die Verschwindungslinie, in welcher die eine Seite der Grundfläche des Cubus liegen wird, und zugleich in r den Punkt, wo diese Linie in der Grundlinie eintrifft.

Zieht man T′ n, so hat man von r E′ ein Stück r v abgeschnitten, welches so lang als r n ist, und hierdurch hat man zugleich das Maß des Abstandes des Punktes v von der Grundlinie bestimmt.

Nimmt man nun das Maß der einen Seite des Cubus, setzt es von n nach m und zieht n T′ und m T′, so ist die Linie v x die eine perspectivische Seite des Cubus.

Zieht man ferner aus dem Punkte v die Linie v E, so hat man die verschwindende Linie, in welcher die andere sichtbare Seite der Grundfläche des Cubus liegen wird. Zieht man T v bis zur Grundlinie, setzt daselbst von p nach q das Maß einer Seite des Cubus und zieht q T, so ist v w die andere Seite der Grundfläche des Cubus.

Um seine Höhe zu bestimmen, errichte man in dem Punkte r die Senkrechte t r und mache sie gleich der Maßhöhe des Cubus, ziehe von t nach E′, so ist E′ t eine perspectivische Parallele mit v E′ und die auf den Punkten v und x errichteten Senkrechten werden beide so hoch sein wie t r.

Zieht man nun vom obersten Punkte des Perpendikels auf v eine Linie nach E und errichtet in w ebenfalls einen Perpendikel, so ist dieser eben so hoch wie t r.

Zieht man nun noch die Linien der Oberfläche nach den entsprechenden Verschwindungspunkten, wie die Zeichnung zeigt, so hat man den Cubus vollendet.

Anmerkung. Man wird jetzt bereits übersehen, daß man alle möglichen Gestaltungen in allen möglichen Lagen perspectivisch darzustellen im Stande ist, wenn man die Begrenzungspunkte der Körper und Flächen einzeln aufsucht. Man wird aber zugleich bei einiger Uebung sehen, daß die Aufgaben immer leichter werden, je mehr man deren auflöst, indem sich bei dem Zeichnen selbst eine Menge Vereinfachungen im Auffinden der Punkte ergeben werden, welche, um nicht unnöthig weitläufig zu werden, hier nicht berührt werden konnten.

Da in den vorhergehenden Paragraphen und Figuren die Hauptfälle enthalten sind, so werden wir in den folgenden Figuren nur die nöthigen Andeutungen machen, indem vorausgesetzt werden muß, daß der Leser das bisher Gesagte vollständig inne habe.

Was das perspectivische Darstellen architectonischer Gegenstände noch sehr erleichtert, ist, daß die Bauformen größtentheils prismatisch sind, oder doch in Prismen und Cuben eingeschlossen gedacht werden können. Abweichungen lassen sich aber, wie wir gesehen haben, in allen Fällen bestimmen, z. B. bei dem Cylinder bei dem Kegel, und so dürfte es wohl nunmehr keine Form mehr geben, welche wir nicht im Stande wären zu bestimmen.

Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß der Leser nur durch das Selbstaufsuchen der vorliegenden Figuren, nach möglichst großem Maßstabe, Fertigkeit in der Perspective erlangen wird und daß das bloße Ansehen und Verstehen der Figuren im Buche so gut wie nichts hilft, denn alles Wissen will geübt sein.

§. 29.

Aufgabe. Es soll ein innerer Raum mit verschiedenartig geschlossenen Eingangsöffnungen perspectivisch gezeichnet werden. (Taf. 9 Fig. 20.)

Auflösung. Man richte sich die Tafel (wie Tafel 9 Fig. 7) ein. Es ist hier angenommen, daß die hintere Wand parallel mit der Grundlinie der Tafel stehe und 5 Maßtheile von der Grundlinie entfernt sei.

Zieht man nun durch 5 eine Parallele mit der Grundlinie, setzt links und rechts auf ersterer Linie die Hälftenmaße der Breite der hintern Wand nach **n p**, **p m** ab und zieht man **A n** verlängert und **A m** verlängert, so hat man die untern Begrenzungen des Raumes.

Setzt man auf **n** und **m** mit dem perspectivischen Maßstabe (in 5) die Maßhöhen **n q** und **m r** auf und zieht man **q A** und **r A** verlängert und **q r**, so hat man die hintere Wand, die Decke und Seitenwände.

Der Eingang links sei mit einem Halbkreisbogen geschlossen. Man suche nach dem perspectivischen Maßstabe das Rechteck, welches diese Oeffnung begrenzt, so wie dessen Mittellinie.

Auf dieser setze man die Höhe des Bogens von oben herunter nach **v** und ziehe von **v** nach **A**. Wo die Verlängerte **v A**, die Seitenlinien der Oeffnung schneidet, sind die Anfänge des Halbkreisbogens, welchen man aus freier Hand zieht.

Für die Breite der Oeffnung verfahre man ganz eben so und man findet den hinteren Bogen.

Die mittlere Oeffnung ist im flachen Bogen geschlossen. Der Mittelpunkt desselben sei **p**. Man trage also die Breite und Höhe der Oeffnung auf und beschreibe aus **p** den flachen Bogen.

Für die Breite der Oeffnung verfahre man eben so, nur daß man als Centrum des zugehörigen Bogens den Punkt unmittelbar hinter **p** auf der Mittellinie nehmen muß, wo sich die Breite der Oeffnung abschneidet.

Die Oeffnung rechts ist mit einem Spitzbogen geschlossen, welcher eben so hoch als breit ist.

Man zeichne erst das begrenzende Rechteck, bestimme auf dessen Mittellinie die Höhe des Bogens nach dem perspectivischen Maßstabe, ziehe durch **w** eine Linie nach **A**, verlängere sie, bis sie die Seiten der Oeffnung schneidet und zeichne dann den Spitzbogen aus freier Hand hinein. Für den zweiten Bogen, nach der Breite der Oeffnung, verfahre man eben so.

Auf dem Fußboden ist eine Theilung in Felder eingetragen, welche ganz aus dem perspectivischen Maßstabe und der Theilung auf der Grundlinie hervorgeht, so wie die Zeichnung Alles deutlich macht.

§. 30.

Aufgabe. Es soll ein Kreuzkappengewölbe, dessen geometrische Maße bekannt sind, perspectivisch gezeichnet werden. (Taf. 9 Fig. 20.)

Auflösung. Angenommen, daß der Grundriß der Kreuzkappe, wie gewöhnlich, ein Quadrat bilde und daß die zugehörigen vier Eckpfeiler ebenfalls Quadrate sind, so wird es gar keine Schwierigkeit machen, mittelst des in der Fig. 20 angegebenen Maßstabes den Grundriß in Perspective zu bringen.

Eben so wird es keine Schwierigkeit machen, nach §. 29 Fig. 19 alle Halbkreisbögen der Gurten zu finden und es bliebe nur noch die Bestimmung der Kreuzkappe selbst übrig.

Zu diesem Zwecke zeichne man sich das perspectivische Prisma **h l m i f g p o**, welches den innern Raum des Gewölbes begrenzt, ziehe in dem Höhenraume **f o p g** die Diagonalen **f p** und **o g**, so ist **z** der Scheitelpunkt des Gewölbes.

Zieht man nun aus den Anfangspunkten der Gewölbebogen **B C D F** aus freier Hand die krummen Linien **B Z, C Z, D Z, F Z**, so hat man das Kreuz des Gewölbes gefunden.

Sollte der Maßstab der Zeichnung sehr groß sein, so wird man die Bogenlinien alle um so genauer finden, je mehr einzelne Punkte man zur Bestimmung derselben in der geometrischen Zeichnung annimmt und diese in der perspectivischen aufsucht.

Die Zeichnung macht dies Alles deutlich.

§. 31.

Aufgabe. Treppen in verschiedenen Lagen zu zeichnen. (Taf. 10 Fig. 21.)

Auflösung. Da die wagerechten Linien der Zeichnung hier alle entweder parallel mit der Tafel oder normal auf dieselbe stehen, und deshalb die Parallelen mit der Tafel im Bilde parallel mit der Grundlinie des Bildes gehen, die Normalen auf die Tafel aber alle im Augenpunkte verschwinden, so richte man sich die Tafel ein wie Tafel 9 Fig. 7 oder 19 oder 20 und zugleich den perspectivischen Maßstab. Bei diesem ist zu bemerken:

Es kommt häufig vor, daß bei einer weit nach hinten fortgesetzten Theilung, die Linien so flach einschneiden, daß das Maß undeutlich und unsicher wird, wie hier etwa bei dem zehnten Theilpunkte geschieht. Ist dies der Fall, so setze man die doppelte Breite des Maßes auf, von **a** nach **A'** und setze dann die Tiefentheilung in gleicher Weise fort. Man muß aber nicht vergessen, daß man nun immer eine doppelte Tiefe anstatt einer einfachen abgeschnitten hat. Will man die Hälfte davon haben, so ergiebt sie sich auf der Linie **o A**. Zum Beispiel aus dem vierzehnten Theilpunkte hat man nach **E** gezogen und wo diese die Senkrechte schneidet, zieht man wagerecht herüber, so findet man $14 + 2 = 16$. Will man aber den fünfzehnten Maßtheil haben, so findet man ihn da, wo die Linie aus 14 nach **E** gezogen die **o A'** schneidet; denn diese ist die Mittellinie des Quadrats zwischen Theil 14 und 15 und die Linie aus 14 nach **E** ist die Diagonale dieses Quadrats, welche die Mittellinie in der Hälfte schneiden wird.

Es wird nun, um die Zeichnung zu beginnen, vorausgesetzt, daß die geometrischen Maße alle bekannt sind.

Der Punkt **a** und die durch denselben gehende wagerechte Linie läge vier Maßtheile von der Grundlinie ab, so ziehe man von dem Punkte 4 eine Parallele mit der Grundlinie. In dieser Linie bestimme man (Alles mit dem perspectivischen Maßstabe) die Breite **m n** und **m a**. Von **a** und **n** ziehe man **a A**. Sollen nun von **a** bis **b** 8 Stufen liegen und jede Stufe einen halben Maßtheil breit sein, so schneide man von 8 nach **b**, so ist a b die Tiefe der Treppe. Schneidet man nun auf dem perspectivischen Maßstabe mit halben Tiefentheilen nach a b heräber, so geben die Durchschnittspunkte die einzelnen Stufen. Errichtet man auf allen diesen Punkten Perpendikel, so werden in diesen die Höhen der Stufen liegen. Bestimmt man nun die Höhe a c (hier = zwei Maßtheilen) und theilt diese Höhe in 8 gleiche Theile, so hat man die einzelnen Stufenhöhen. Zieht man aus diesen Punkten auf a c nach A, so schneidet sich jede einzelne Stufenhöhe auf den übereinstimmenden senkrechten Theilungen ab.

Dasselbe würde man erhalten, wenn man von der Oberkante der untersten Stufe eine Linie nach d gezogen hätte.

Es ist nur noch zu merken, daß die Seitenlinien der Stufen nach dem Augenpunkte A laufen, die Höhenlinien aber senkrecht stehen.

Will man nun die obere Treppe bestimmen, so bestimme man erst den Punkt e. Man findet ihn, wenn man von d nach A zieht, wenn man auf a A die Breite der oberen Terrasse (nach dem perspectivischen Maßstabe) von b bis h abschneidet und in h einen Perpendikel errichtet, welcher den Punkt e in der Linie d A abschneidet.

Zieht man durch e eine Wagerechte, so ist diese die vordere Kante der Treppe. Bestimmt man nun die Höhe e g und zieht g A, so liegt in dieser die Oberkante der Seitenfläche der Treppe.

Bestimmt man h k als Tiefe der Treppe (nach dem perspectivischen Maßstabe) und errichtet k f, so ist f die obere Kante der Treppe.

Theilt man nun g e in acht gleiche Theile, zieht von der Oberkante der untersten Stufe eine Linie nach f und von allen Theilpunkten der Linie a g nach A, so schneiden sich die Höhen der einzelnen Stufen auf der nach f gehenden Linie ab und man verfährt dann wie vorhin.

Die Ansichten rechts von der Mittellinie sind ganz wie die links von derselben, da die Linien alle parallel mit der Tafel oder normal auf dieselbe laufen.

Denkt man sich die Linien, welche von den Oberkanten der letzten Stufen nach den Oberkanten der obersten Stufen gezogen sind, verlängert, bis sie die Mittellinie in v schneiden, so ist v der Verschwindungspunkt für alle Linien, welche eine gleiche Neigung wie die gezogenen gegen die Grundebene hatten und normal auf die Tafel standen.

In ähnlicher Weise findet man die Verschwindungspunkte für alle schräg gegen die Grundebene geneigten Ebenen.

Die beiden kleinen Aufbaue an der oberen Treppe erhält man, wenn man nach dem perspectivischen Maßstabe bei Theilpunkt 12 die Breiten und Höhen aufträgt, dann auf der Linie a A die Tiefe h i bestimmt und dann wie z. B. in Tafel 9 Fig. 7 die Prismen vollendet und die deckenden Theile sucht, was aus der Zeichnung deutlich wird.

Will man nun endlich die Stufen bei w bestimmen, so setze man die Breiten der Stufen nach dem perspectivischen Maßstabe links ab und errichte in ihnen Perpendikel. Trägt man nun auf w x die Höhen auf und schneidet von diesen Theilpunkten wagerecht nach den Perpendikeln hinüber, so findet man die Stufen. Zieht man nun von den Kantenpunkten derselben nach A, so erhält man die perspectivischen Ansichten dieser Stufen, wie die Zeichnung zeigt.

§. 32.

Aufgabe. Eine Pfeilerhalle zu zeichnen. (Taf. 10 Fig. 22.)

Auflösung. Da in Fig. 22 auf der den ganzen Raum einnehmenden Bildfläche kein Platz für den perspectivischen Maßstab war, der Maßstab von Fig. 21 aber auf derselben Grundlinie anfängt, so ist dieser Maßstab für Fig. 22 mit benutzt worden.

Da hier alle wagerechten Linien parallel mit der Tafel, oder normal auf dieselbe angenommen sind, so hat das Ganze gar keine Schwierigkeiten.

Man bestimme zuerst die Entfernung der Linie g f mittelst des perspectivischen Maßstabes, so hat man die Ebene der vier Pfeiler, welche im Mittelgrunde stehen. Setzt man nun aus dem Grundpunkte G mit dem Maßstabe der Grundlinie die Pfeilerbreiten a b und c d, so wie ihre Entfernung b c ab und zieht von diesen Punkten nach A, so erhält man die Pfeilerbreiten i k, l m.

Die Höhen dieser Pfeiler findet man mittelst des perspectivischen Maßstabes.

Um nun die Pfeiler bei g h und e f zu bestimmen, setze man die Entfernung k l von m nach e und von i nach g. Zieht man nun aus g und h, i und k, l und m, e und f nach A, so erhält man die Linien, in welche die übrigen Pfeiler zu stehen kommen, wenn man vermittelst des perspectivischen Maßstabes die Tiefen der Entfernungen und der Pfeilerbreiten abschneidet. Auch findet man eben so leicht nach Betrachtung der Zeichnung die Linie der Decke und des Fußbodens, so wie die Vertiefung des Bassins, in welchem der Springbrunnen angegeben ist.

§. 33.

Aufgabe. Es soll ein Gebäude perspectivisch gezeichnet werden, dessen Fronten unter einem gegebenen Winkel gegen die Grundlinie der Tafel geneigt sind. (Taf. 10 Fig. 23.)

Auflösung. Zuerst richte man sich die Tafel nach Fig. 12 bis Fig. 18 §. 23 bis §. 28 ein, so ist G der Grundpunkt, A der Augenpunkt, E der eine Verschwindungspunkt, E' der andere. (NB. Dieser mußte wegen Mangel an Raum in die nebenstehende Fig. 22 verlegt werden, wo er in der Horizontallinie zu suchen ist.) Die Linien E' E'' und E E'' würden sich, nach oben verlängert, in der Mittellinie der Tafel in dem Punkte E'' schneiden, welchen wir früher als den Abstand des Auges von der Tafel oder, was dasselbe ist, als den Entfernungspunkt bezeichneten. Die Maße des Gebäudes sind als bekannt vorausgesetzt.

Wäre a ein willkürlich gewählter Punkt, wo die vordere Ecke des Hauses stehen soll, und zieht man von E' (in Fig. 22) aus eine gerade Linie E' a bis zur Grundlinie (in Fig. 23) bei C, so liegt in der Linie E' C die vordere Front des Hauses. Macht man sich nun auf der Grundlinie der Tafel einen Maßstab, setzt die Entfernung des Punktes a, welche er in der Natur von dem Punkte C hat, von C nach G zu (hier fällt sie in G selbst, was jedoch zufällig ist) und zieht G T', so ist die Linie a C perspectivisch so lang, wie C G, und folglich die Entfernung des Punktes a von dem Punkte C im Maße gefunden.

Setzt man nun das Maß des Hauses links von der Mittellinie von G bis Nr. 6 auf der Grundlinie ab, so ist G Nr. 3

die Mitte. Zieht man von Nr. 6 und Nr. 3 nach dem Theilpunkte T′, so schneidet sich in l das Ende und in p die Mitte des Hauses auf der Linie C E′, von dem Punkte a aus, ab. Setzt man nun eben so den Maßstab rechts von G auf der Grundlinie fort, zieht von dem Punkte a nach dem Verschwindungspunkte E, so wird in der Linie a f die Tiefe des Hauses sich abschneiden lassen. Zu diesem Zwecke ziehe man von T durch a nach k, setze von k aus die Tiefe des Hauses nach P und die Mitte nach N, ziehe N T und P T, so ist a f die Tiefe des Hauses und m die Mitte von a f.

Errichtet man nun in den Punkten l p a m f Perpendikel, so werden in diesen die Höhen des Gebäudes liegen; um sie zu finden verfahre man wie folgt. Man errichte in der Grundlinie bei C, wo die Linie l a C einschneidet, einen Perpendikel C B und setze darauf die Höhe des Hauses nach dem Maßstabe der Grundlinie, von C bis B. Nun ziehe man von B nach E′ (Fig. 22), so sind E B und E′ C perspectivisch parallel, folglich die Perpendikel auf den Punkten l p a alle gleich C B.

Zieht man nun von Q nach E, so schneiden sich eben so die Höhen für die Punkte m und f ab und die beiden sichtbaren Seiten des Gebäudes sind gefunden.

Trägt man nun auf C B alle Höhen der Plinthe, der Thüre, des Fensters ꝛc. auf, und zieht aus ihnen nach E′ und E, so findet man diese Höhen auf den Seiten, zu welchen der jedesmalige Verschwindungspunkt E oder E′ gehört.

Man erinnere sich immerfort, daß man nichts weiter zu suchen hat, als prismatische Formen. Ferner suche man jeden Theil einzeln, die großen zuerst, dann die kleineren Theilungen; so wird man sich das Auffinden sehr erleichtern. Will man aber Alles zugleich suchen, so wird man sich verwirren und gar nichts finden.

Man soll nun das Dach finden. Es sei auf der Seite rechts von der Mittellinie ein ganzer Walm, auf der Seite links ein steiler Giebel. Um zuerst den halben Walm rechts zu finden, muß man den Anfallspunkt n im Grundrisse zuerst bestimmen. Man ziehe die Mittellinie des Hauses von m nach E′ (Fig. 22), so wird der Punkt n darin liegen.

Es sei die perspectivische Linie n m gleich der Länge a n, so ziehe man von n nach E, dann ist n m = n a und n der gesuchte Punkt im Grundrisse. Auf n errichte man vorläufig einen Perpendikel, so wird in diesem die Dachhöhe liegen; um diese zu bestimmen, wollen wir den steilen Giebel auf der anderen Seite erst suchen.

Zieht man von l nach x, so ist x die Mitte des Giebels, errichtet man auf x einen Perpendikel, trägt dann auf C B von B aus die Dachhöhe von B nach z mit dem Maßstabe der Grundlinie auf und zieht von z nach E′ (Fig. 22), so ist der Perpendikel l s = C z, folglich s der Höhenpunkt des Daches. Zieht man nun von S nach E, so schneidet sich die Höhe des Giebels in M ab. Um nun den Anfallspunkt des Walmes bei r zu finden, ziehe man M E′, wo diese den Perpendikel auf n schneidet liegt r, der Anfallspunkt. Zieht man nun r Q und die jenseitige schräge Walmlinie, so hat man auch die Walmseite gefunden.

Das Aufsuchen der Thüre und des Fensters übergehen wir, da das Verfahren, prismatische Formen aufzufinden, sich dabei nur immer wiederholt.

Wollte man nun die schräge Ebene vor der Thüre finden, so

bestimme man erst deren Breite. Zieht man von dem Punkte 2 nach T′, so schneidet sich der Punkt u ab, und p u ist gleich einem Maßtheile der Grundlinie.

Zieht man ferner von u nach D durch T und setzt das Maß D H auf die Grundlinie (so lang wie die Rampe werden soll), so hat man die Länge der Rampe auf der Grundlinie.

Zieht man ferner von E durch u eine Linie u s und von H nach T, so ist u s die perspectivische Länge der Rampe. Nun ziehe man erst s t willkürlich lang, dann T′ s bis 3 an die Grundlinie. Nun war angenommen, daß die Rampe zwei Maßtheile der Grundlinie breit sein solle, wenn man also von Nr. 5 nach T′ zieht, so ist s t die Breite der Rampe. Zieht man nun s v, t w, so hat man die Neigung der Rampe. Verlängert man t w und s v, bis sie sich in W schneiden, so ist W der Verschwindungspunkt für alle mit t w oder s v parallelen Linien. (§. 31 Fig. 21, der Punkt v.)

Um nun endlich die Rampe auf der rechten Seite des Hauses zu finden, bestimme man erst ihren Grundriß c d g i, dann die Höhen c h, d e, i k, und ziehe dann c e und g k, so sind diese die Rampenlinien. Alles dieses wird nach dem bisher Gesagten und nach der Zeichnung keine Schwierigkeiten haben.

Zieht man c e und g k verlängert, bis sie sich in V schneiden, so werden alle mit den genannten Linien Parallele in V verschwinden. Wir haben hierbei absichtlich nur die Auffindung der Hauptpunkte hervorgehoben, weil, wenn man diese zu finden im Stande ist, man auch alle übrigen wird finden können. Bei a b ist auch ein Stück perspectivischer Maßstab mit einem Maßtheile zur Länge der Linie a b angezeichnet, welcher ebenfalls zum Aufsuchen der einzelnen Punkte sehr nützlich werden kann, wenn man bedenkt, was §. 24 bei Fig. 13 darüber gesagt wurde.

§. 34.

Aufgabe. Eine Stube perspectivisch zu zeichnen, mit darin befindlicher Einrichtung. (Taf. 10 Fig. 24.)

Auflösung. Nimmt man an, daß wie hier die hintere Wand parallel mit der Grundlinie der Tafel stehe, folglich die beiden Seitenwände normal auf die Tafel sind; so wird die Aufgabe gar keine Schwierigkeiten haben, wenn man die Figuren Taf. 9 Fig. 19 und Fig. 20 und Taf. 10 Fig. 22 zu Rathe zieht.

Man richte sich die Tafel und den perspectivischen Maßstab wie Taf. 9 Fig. 19 und Fig. 20 ein. Bestimmt man nun nach dem perspectivischen Maßstabe den Abstand der hinteren Wand von der Grundlinie der Tafel und ihre Größe selbst, und zieht von ihren vier Eckpunkten von A aus gerade Linien, so bestimmen sich die Seitenwände, die Decke und der Fußboden.

Die Maße und Abstände der Thüren und Fenster sind nach dem perspectivischen Maßstabe leicht zu finden, und eben so leicht wird man den Ofen, die offene Thüre, den Stuhl und den Tisch zeichnen können, wenn man für diese Gegenstände bestimmte Maße festsetzt und sie nach dem perspectivischen Maßstabe und nach Berücksichtigung der verschwindenden Linien in der Tafel aufsucht, welches hier um so leichter ist, da alle Linien, wie oben gesagt, entweder parallel mit der Tafel oder normal auf dieselbe angenommen worden sind; es werden also alle Parallelen mit der Grundlinie in der Natur auch Parallelen mit der Grundlinie im Bilde sein, und alle Normalen auf die Tafel im Augenpunkte A verschwinden, wie die Zeichnung zeigt.

§. 35.

Aufgabe. Gesimse perspectivisch zu zeichnen. (Taf. 10 Fig. 25.)

Auflösung. Es befinde sich rechts von der Mittellinie ein prismatischer Körper, welcher parallel mit der Grundlinie der Tafel steht. Man suche zuerst seinen Grundriß a b c d, alsdann seine Höhe, welche durch die Perpendikel a p, b q bestimmt wird, und vollende dann das Prisma ohne das Gesims. Nun trage man das Maß des Gesimses von p nach n und von q nach r herunter und zeichne an q r das Gesims mit quadratischer Ausladung, wie hier, im Durchschnitt auf, welcher durch die Schraffirung angegeben ist. (Das Gesims kann aber auch jede beliebige Ausladung haben.) Nun macht man in der Grundebene b k und b g gleich der Ausladung des Gesimses und vollendet im Grundrisse das Quadrat e h l m, welches die Ausladung des Gesimses bezeichnet. Dann zieht man in diesem Quadrate die Diagonalen m h und e l.

Hierauf ziehe man in dem Quadrate p q x w, welches die Oberfläche des Prisma bezeichnet, ebenfalls willkürlich lange Diagonalen, und schneide aus den unteren Diagonalen die Punkte m e b in die oberen nach v u t hinauf.

Zieht man nun t p, u n und v z, so hat man die Diagonalen der Ausladungen des Gesimses gefunden.

Nun zieht man von A aus durch die schraffirte Ausladung des Gesimses (an den Endpunkten der Glieder) Linien bis in die Diagonale t r, so findet man die Gliederungen auf dieser Linie, trägt man die Punkte aus t s wagerecht nach u n hinüber, so hat man die Gliederungen auf dieser Linie.

Zieht man von u n aus die Endpunkte der Glieder nach A, bis in die Linie v z, so hat man auch in dieser Linie die Gliederungen gefunden, deren Profile man nun aus freier Hand einzeichnet und das Ganze nach der Zeichnung vollendet.

Derselbe Körper stehe links von der Mittellinie und schräg gegen die Grundlinie; man soll das Gesims an ihm bestimmen. Zur leichteren Uebersicht sind hier zur Bezeichnung dieselben Buchstaben gewählt worden, wie vorhin.

Die zum Körper gehörigen Verschwindungspunkte liegen Fig. 25 bei E′ und Fig. 24 bei E″, die Theilpunkte Fig. 25 bei T und T′.

Nun verfährt man mit Berücksichtigung der schrägen Stellung des Körpers wie vorhin. Erst sucht man das Prisma, dann die Ausladung des Gesimses in der unteren und oberen Fläche des Prisma. Hierauf die Diagonalen der Ausladung, zeichnet in diese das Gesims und vollendet die Figur.

Links am Rande der Tafel ist gezeigt, wie man ein Fußgesims finden würde. Hat man den Punkt a festgesetzt, so zeichnet man in der Ausladung a b d das Gesims ein, bestimmt den Punkt c, zieht die Diagonale der Ausladung von d nach c und schneidet aus dem Profil a b d die Gesimsglieder von d b vom Augenpunkte A aus nach d c herüber, woraus man in dieser Linie das Gesimsprofil findet. Dann bestimme man c f und vollende das Ganze nach der Zeichnung.

§. 36.

Aufgabe. Die Spiegelung der Gegenstände im Wasser zu finden. (Taf. 10 Fig. 26.)

Auflösung. Auf der stillstehenden Wasserfläche spiegeln sich bekanntlich die Gegenstände genau ab. Es sei die Tafel wie in Fig. 24 eingerichtet und es befinde sich links von der Mittellinie ein Cubus B freischwebend.

Man findet die Spiegelung des Punktes a, wenn man von ihm eine Lothrechte a w bis auf die Ebene des Wasserspiegels herunter fällt und diese Lothrechte beliebig verlängert. Macht man nun die Linie a w oberhalb des Wassers gleich a w im Wasser, so ist der Punkt a im Wasser die Spiegelung des Punktes a über dem Wasser.

Man findet demnach die Spiegelung eines jeden beliebigen Punktes a, welcher sich über dem Wasser befindet, wenn man von diesem Punkte eine Lothrechte a w bis auf den Wasserspiegel gezogen denkt, und von diesem Punkte w aus (wo die Wasserfläche anfängt) die Höhe w a in die nach unten Verlängerte a w hinabsetzt, gleichsam in das Wasser hinein.

So wie man die Spiegelung des Punktes a gefunden, findet man die der Fläche a b e g über dem Wasser bei a b e g im Wasser.

Eben so die Spiegelung der Punkte f e d über dem Wasser und f e d unter dem Wasser.

Die Spiegelung des Prisma bei D, welches vom Ufer zurücksteht, würde man in ganz gleicher Weise finden, nur müßte man erst die Punkte h i k auf die Wasserfläche reduciren und es würden z. B. die Punkte l m n über dem Wasser sich im Wasser bei l m n spiegeln.

Eben so würde man die Spiegelung des Körpers bei H mit der daran befindlichen vorspringenden Platte finden. Die Punkte sind über und unter dem Wasserspiegel alle gleichnamig bezeichnet.

Was die nach dem Augenpunkte A oder nach andern zufälligen Punkten verschwindenden Linien betrifft, so verschwinden sie unter dem Wasser nach denselben Punkten, wie über dem Wasser; so verschwindet z. B. an dem Körper bei H über dem Wasser die Plattenlinie h k nach A, und es wird demnach auch im Wasserspiegel die Linie h k von h nach A gezogen werden müssen.

Wäre eine Linie schräg gegen das Wasser geneigt, wie die Linie b c auf der schiefen Rampe, so suche man die Höhe c w über dem Wasser, welches geschieht, wenn man von b nach A und von c über dem Wasser abwärts nach w senkrecht zieht, dann ist w der Punkt, wo der Wasserspiegel anfängt. Setzt man nun c w über dem Wasser von c nach w unter dem Wasser, und zieht b c unter dem Wasser, so ist b c der Wasserspiegel von b c über dem Wasser. Hieraus folgt: daß man den Wasserspiegel einer schrägen Linie sehr leicht findet, wenn man diese schräge Linie als die Diagonale eines Rechtecks betrachtet, dann die Wasserspiegelung des Rechtecks sucht und darin auch die Diagonale zieht, dann ist die letztgefundene Diagonale die Wasserspiegelung der ersteren.

Auf der Seite rechts von der Mittellinie würde man die Spiegelung der schrägen Linie a w über dem Wasser bei a w im Wasser eben so wie vorhin finden.

Was die Figur bei k betrifft, so gilt für sie alles bisher Gesagte und ihr Wasserspiegel ist nach der Zeichnung leicht zu finden.

Der Punkt T im Horizonte dient, um die Entfernungen und Breiten der kleinen Pfeiler bei k zu finden. Setzt man nämlich von k aus in der durch diesen Punkt gezogenen Wagerechten nach H hin die Entfernungen der Pfeiler und ihre Breite auf (nach dem perspectivischen Maßstabe, welcher mit k in gleicher Ebene liegt), und zieht von diesen Punkten nach T, so schneiden sich sämmtliche Entfernungen und Breiten der Pfeiler auf der Linie **k A** ab. Das Uebrige macht die Zeichnung deutlich.

§. 37.

Aufgabe. Den perspectivischen Schatten eines Körpers zu finden, wenn die Sonne unter dem 45. Grade sowohl von der Höhe herab, als auch in ihrer Projection gegen die Tafel scheint. (Taf. 10 Fig. 27.)

Auflösung. Es muß hierbei vorausgesetzt werden, daß der Leser alles das vollkommen inne habe, was in der zweiten Abtheilung des vorliegenden Buches von der Schattenconstruction bei geometrischen Körpern gesagt worden ist.

Es werden nämlich die Schatten an perspectivisch gezeichneten Körpern ganz auf dieselbe Weise und nach denselben Grundsätzen gesucht, als bei geometrisch gezeichneten Körpern; nur tritt dabei natürlich der Unterschied ein, daß bei perspectivischer Schattenconstruction die Schattenlinien ebenfalls perspectivisch aufgetragen werden müssen.

Es sei die Tafel in Fig. 27 wie in Fig. 24 eingerichtet. Durch den Theilpunkt des perspectivischen Maßstabes gehe eine Linie parallel mit der Grundlinie der Tafel. Diese Linie bedeute das untere Ende (die Grundlinie) einer senkrechten Mauer, welche um vier Theile des perspectivischen Maßstabes von der Tafelgrundlinie absteht und an welche Mauer die Körper **B C D** angelehnt sind, die ihre Schatten auf die senkrechte Mauer werfen.

Betrachten wir zuerst das an der Mauer stehende Prisma **C**. Dasselbe springt um zwei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes aus der Mauer hervor, man soll den Schatten desselben finden, wenn die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von 45 Grad sowohl von oben herab, als auch gegen die Tafel geneigt einfallen.

Die vordere Fläche des Körpers **a f e b** steht um zwei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes vor der Mauer. Die Fläche **b c d e** ist also so breit wie der eben genannte Vorsprung. Setzt man nun von **e** nach **p** zwei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes und zieht von **p** nach **A** bis **n**, so ist **e d** = **p n** = **e p** = **d n**, folglich ist **e d n p** ein Quadrat und seine Diagonale **e n** macht mit **e d** einen Winkel von 45 Grad. Es wird also der Punkt **e** seinen Schatten unter 45 Grad nach **n** werfen.

Zeichnet man nun an die Linie **b e** von dem Punkte **b** aus mit zwei Maßtheilen des perspectivischen Maßstabes das Quadrat **b g k l**, zieht dann **g h** und **k i** nach **A** und von **n** aus die Lothrechte **n h**, so ist **b l k i h g e m** ein Cubus, und jede Seite des Quadrates **e h i m** ist so lang, wie der Vorsprung **b e** des Körpers. Scheint aber die Sonne unter 45 Grad, so ist der Schatten so breit wie der Vorsprung, und die Diagonale des Quadrats **e h i m** wird die Richtung und Länge des Schattenstrahles bestimmen bei **i**, welchen Punkt man ebenfalls durch Ziehung der Diagonale des Cubus **b i** gefunden hätte. Zieht man nun **n i**, so ist **e i n d** der Schatten auf der Wand durch **e i n d**, und der Schatten auf der Erde durch **e d n** begrenzt.

Betrachten wir nun die vorspringende Platte bei **B**. Sie springt ebenfalls zwei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes vor. Die Größe dieser Maßtheile ist aus der durch den perspectivischen Maßstab gezogenen wagerechten Linie **2 2** zu entnehmen, in der Ebene der Platte **B** bei **a b d c**.

Die Kanten **c d**, **d b**, **b e** sind die schattenwerfenden.

Zeichnet man nun an die Linie **b d** den Cubus **b f h i k m l e**, so wird der Punkt **e** seinen Schatten nach **i** werfen, der Punkt **b** ebenfalls nach **i**, der Punkt **d** nach **p** und der Punkt **g** nach **n**. Es ist also **e i p n g** die Gestalt des Schattens von der vorspringenden Platte **B** auf die Mauer.

Betrachten wir nun den Körper **D**. Es ist ein Prisma, welches um zwei Maßtheile vorspringt. Die darüber liegende Platte springt drei Maßtheile des perspectivischen Maßstabes vor und einen Maßtheil über die Außenflächen des Prisma. Zeichnet man mit zwei Maßtheilen in der Grundebene das Quadrat **M w x r** und zieht die Diagonale **w r**, so ist sie die Schattenlinie des Punktes **w**.

Construirt man an der Linie **e f** den Cubus **e o p r s q n** und zieht die Diagonale **n s** des hinteren Quadrates, oder auch **e s**, die Diagonale des Cubus, so wirft die Linie **n e** ihren Schatten von **n** nach **s**; setzt man nun die Länge **e f** von **s** nach **t** und zieht **t u** und **r u**, so hat man den Schatten rechts auf der Wand. Die Linie **e k**, unter 45 Grad gezogen, giebt den Schatten links auf der Wand. **k l** nach **A** gezogen und **l m** parallel mit **d f** gezogen giebt den Schatten der Platte auf den Körper.

Es leuchtet wohl ein, daß bei schräg gegen die Tafel stehenden Körpern das Verfahren ganz dasselbe ist, nur muß man alsdann die verschwindenden Linien nach den zugehörigen Verschwindungspunkten ziehen und für Tiefenmaße die zugehörigen Theilpunkte benutzen. Will man den Punkt **s** aus dem Grundrisse finden, so construire man sich das Quadrat des Vorsprunges der Platte **P H N z**, ziehe die Diagonale **H z** und von **z** senkrecht hinauf nach **t**.

§. 38.

Aufgabe. Die perspectivischen Schatten zu finden, wenn die Sonnenstrahlen unter 45 Grad, aber parallel mit der Tafelfläche einfallen. (Taf. 10 Fig. 28.)

Auflösung. Dieser Fall ist noch einfacher, als der in §. 37. Nimmt man den oben links in der Tafel unter 45 Grad geneigten Pfeil als die Richtung der Sonnenstrahlen an, so ergiebt sich Folgendes.

Wollte man z. B. den Schatten einer Linie **B** (rechts in der Tafel) bestimmen, so zieht man die Wagerechte **b c** beliebig lang, dann zieht man unter einem Winkel von 45 Grad die Linie **a c**, so ist **b c** die Länge des Schattens vom Stabe **B** und **b c** zugleich seine Richtung.

Wollte man den Schatten der Linie **D** (links von der Mittellinie) finden, so ziehe man **d e** parallel mit der Grundlinie bis **e**, dann die Linie **e f** parallel mit der geneigten Ebene; dann ziehe man die Linie **e f** unter 45 Grad bis **f**, so ist die Linie **d e f** der Schatten für die Länge **d e** der Linie **D**.

Die übrigen Schatten der in der Tafel gezeichneten Körper werden ganz eben so gefunden.

Der Punkt **g** wirft seinen Schatten unter 45 Grad nach **h**. Die Linie **g z** wird gleich **z h**, der Punkt **z** wirft seinen Schatten nach **N**, der Punkt **M** nach **P** und die Linie **g z** ihren Schatten von **P** über **Q** nach **h**.

Zieht man von R senkrecht nach i, so wirft der Punkt i seinen Schatten über die niedrige Mauer bei k nach l auf die Ebene.

Eben so wirft der Punkt o seinen Schatten nach p und q nach r.

Eben so an dem hohen Prisma der Punkt s seinen Schatten nach v und der Punkt t seinen Schatten nach u.

Das Uebrige macht die Zeichnung deutlich.

§. 39.

Aufgabe. Den perspectivischen Schatten zu finden, wenn das Licht von einer kleinen Flamme ausgeht. (Taf. 10 Fig. 29.)

Auflösung. Wenn bei Sonnen- und Mondlicht wegen der Größe und der weiten Entfernung der beleuchtenden Körper die Licht- und folglich auch die Schattenstrahlen unter sich parallel angenommen werden konnten, so ist dies nicht bei Kerzen- oder Fackellicht der Fall, hierbei gehen sie nicht parallel, sondern sie gehen von der beleuchtenden Flamme aus aus einander (divergiren).

Es sei die Tafel und der perspectivische Maßstab wie bisher immer eingerichtet und die Zeichnung des Zimmers sei perspectivisch gegeben. Auf dem Tische links im Bilde stehe ein Licht und F sei die Flamme, von welcher die Beleuchtung ausgeht.

Will man nun den Schatten des Tisches auf dem Fußboden finden, so ziehe man die Linie g h wagerecht, dann h a senkrecht, dann F a wagerecht, dann a b senkrecht und b d wagerecht, endlich F d senkrecht, so hat man die Projection des Punktes F auf dem Fußboden gefunden. Zieht man nun die Diagonalen d e und d f willkürlich lang und von der Flamme F aus über die Kanten des Tisches die Linien F e und F f, und verbindet e mit f (welche Linie nach dem Augenpunkte A gehen wird, wenn man sie verlängert), so ist e f der Schatten der einen Kante des Tisches, zieht man nun aus e und f wagerechte Linien, so findet man die beiden andern Schattenkanten vorne bei e und g und hinten in der wagerechten Linie durch f.

Will man dann den Schatten in der Fenstervertiefung finden, so zieht man von a nach k, wo die obere Fensterlinie schneidet,

dann k l willkürlich lang und endlich F l, so ist l der Projectionspunkt der Flamme in der Höhe des Fenstersturzes. Zieht man nun von l nach der Kante des Fensters bei n nach m und im Fußboden von d bei der Kante p vorbei nach q, so sind n m und q p die Schattenrichtungen. In dem anderen Fenster wird kein Schatten sichtbar werden, weil er verdeckt liegt, wie man finden wird, wenn man ihn sucht.

Will man den Schatten in der Mauervertiefung in der Mitte des Bildes suchen, so ziehe man von d aus bei der Kante t vorbei nach u, so ist t u die Schattenrichtung; zieht man nun u v und v w, so hat man den Schatten der Vertiefung gefunden.

Will man den Schatten der Mauervertiefung rechts im Bilde finden, so ziehe man von d aus nach der Kante z eine Linie, man wird aber finden, daß diese Linie in die Dicke der Mauer und nicht in die Thürvertiefung schneidet, es ist also kein Schatten vorhanden.

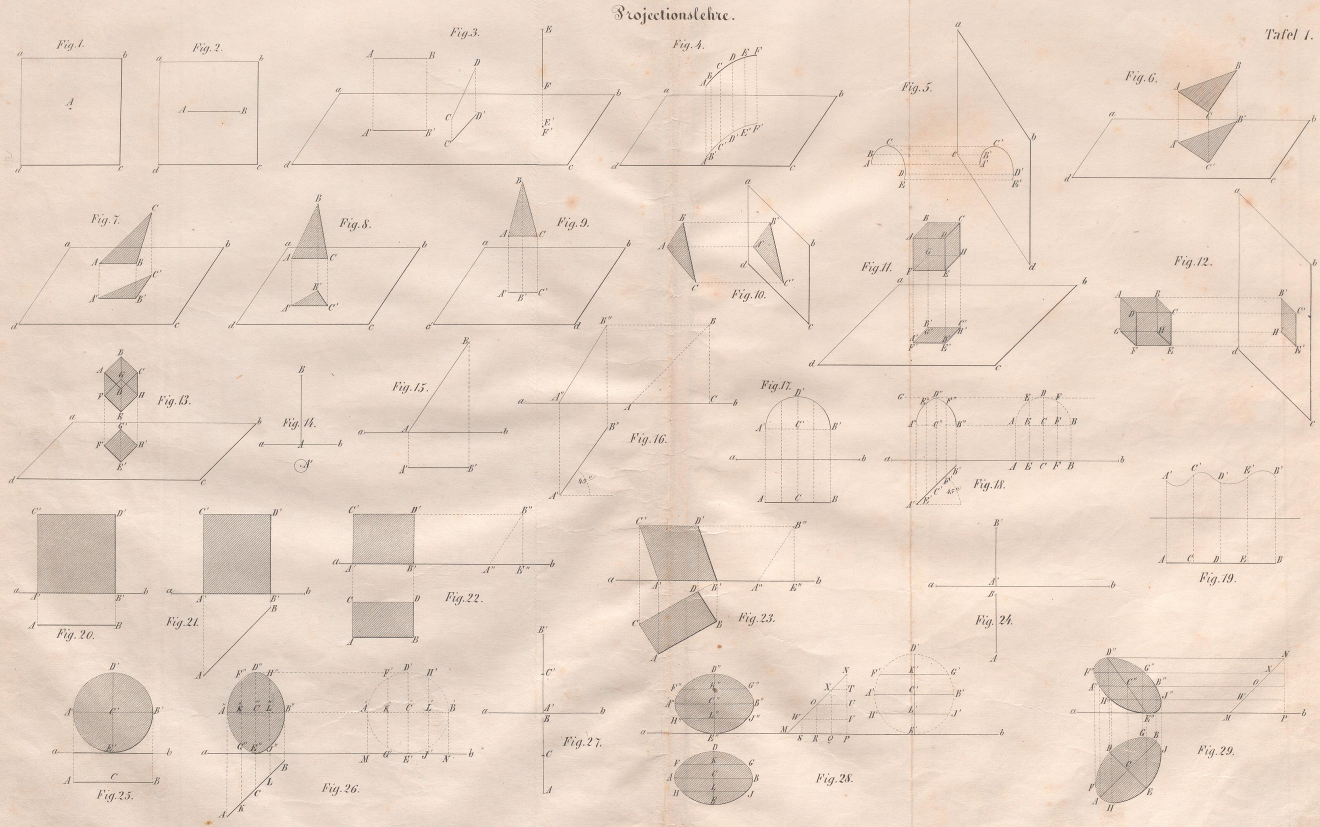
Will man den Schatten der kleinen Thürverdachung finden, so reducire man erst den Punkt F nach F′, ziehe von F durch c nach f, so hat man den Streifschatten. Zieht man nun von der Flamme F durch b nach f, so schneidet sich c f bestimmt ab. Zieht man nun von f senkrecht nach h, macht f h = a b und zieht von h nach dem Augenpunkte A, so hat man den Schatten gefunden.

Will man nun die Schatten in der Decke finden, so reducire man für die Reihe der hintersten Vertiefungen den Flammenpunkt F nach F″, welches in gleicher senkrechter Ebene mit der Linie der Deckenvertiefungen a d liegt. Zieht man dann von F″ durch a nach b und von F″ durch d nach e und aus b und e von A aus nach c und h, so sind a b c und d e h die gesuchten Schattenpunkte. Die Vertiefung links wird keinen Schatten haben. Eben so findet man aus den Punkten F‴ M und a die Schatten der zweiten Vertiefungsreihe.

Wäre die Stube schräg gegen die Grundlinie gestellt, so würde das Verfahren ganz ähnlich sein, nur mit Berücksichtigung der dann eintretenden zufälligen Verschwindungs- und Theilpunkte.

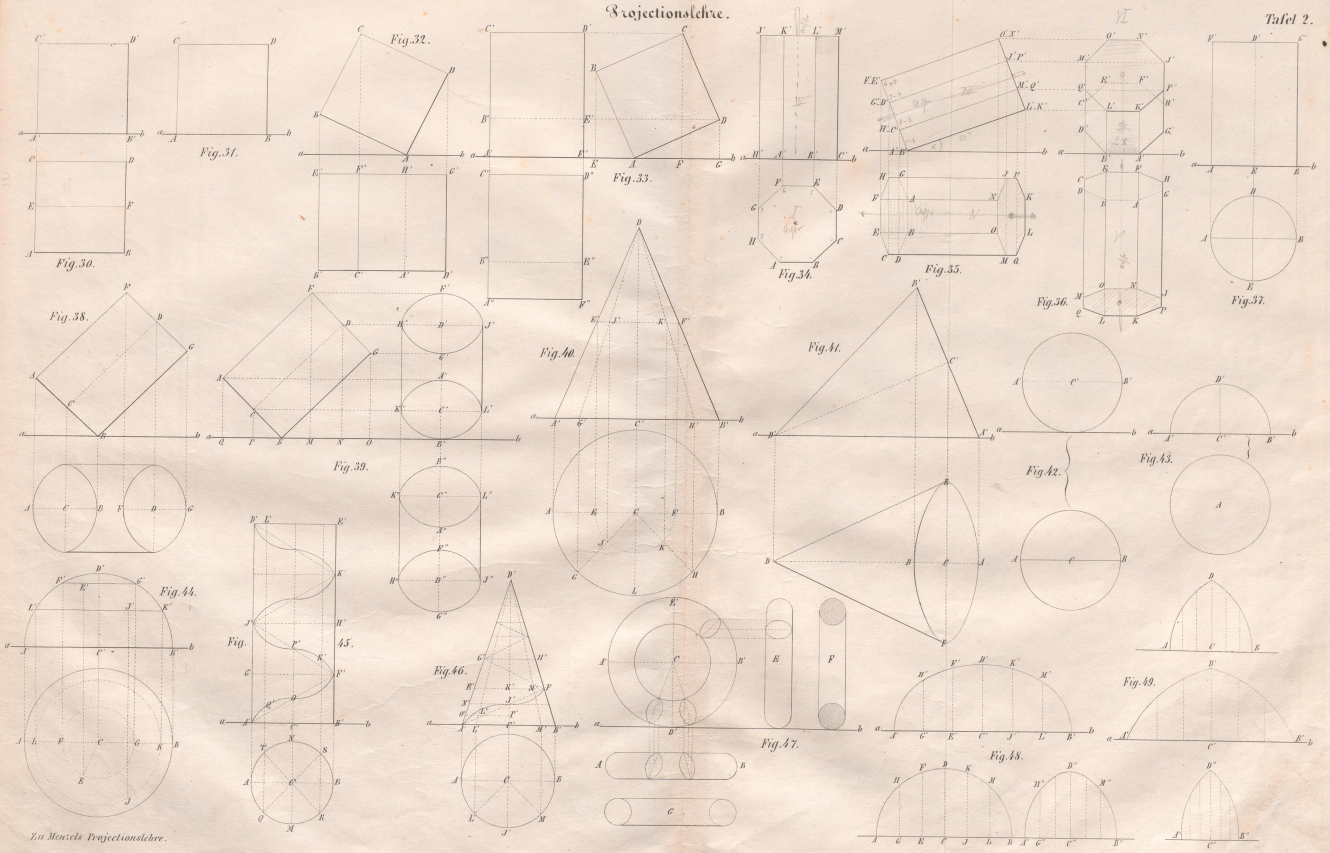
Projectionslehre.

Tafel I.



Zu Menzels Projectionslehre.

Projectionslehre.



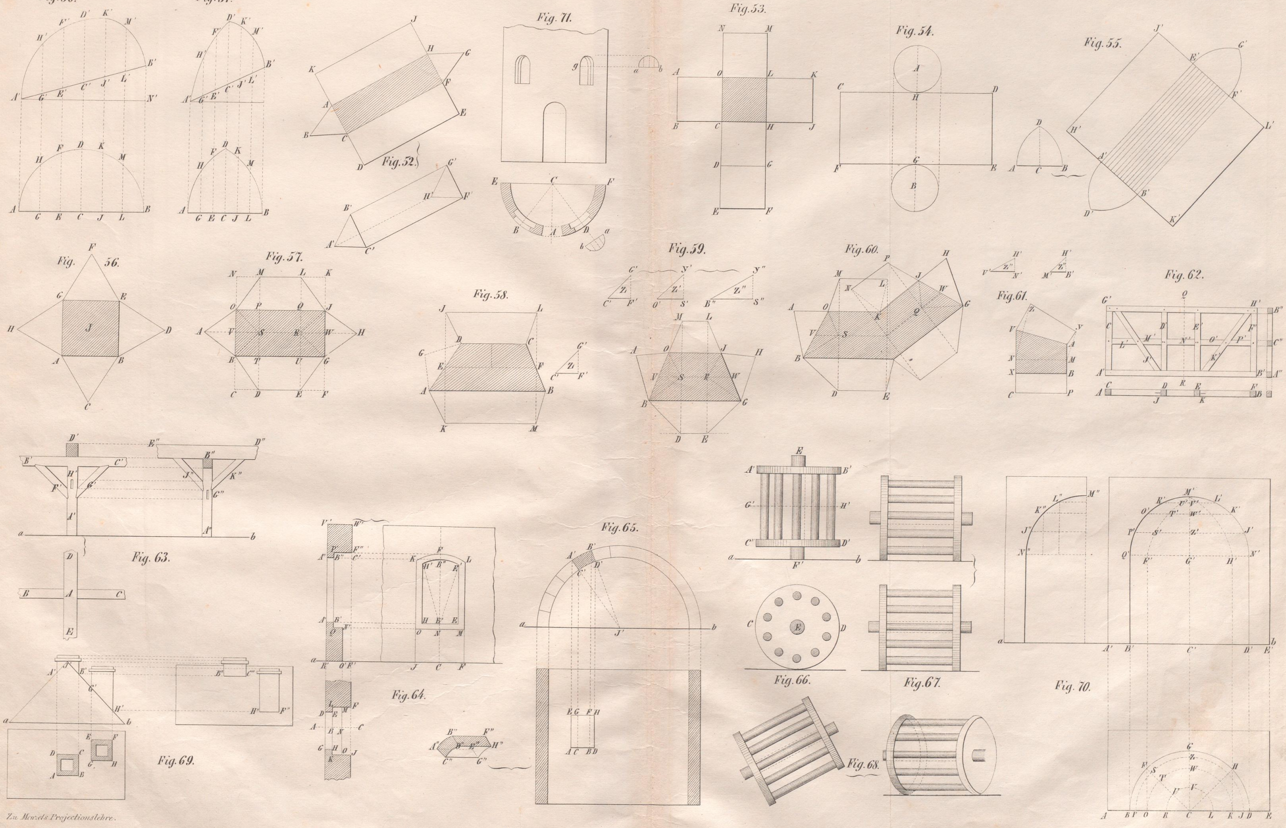


Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.

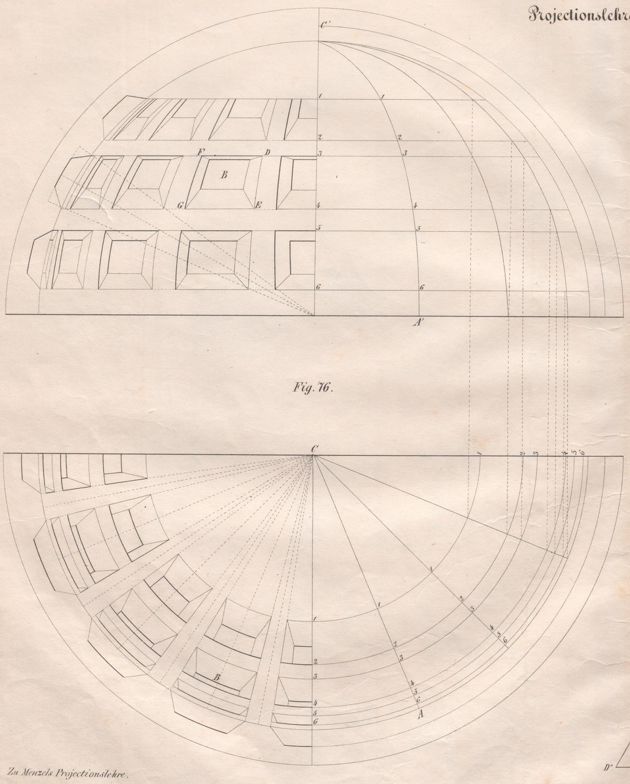


Fig. 76.

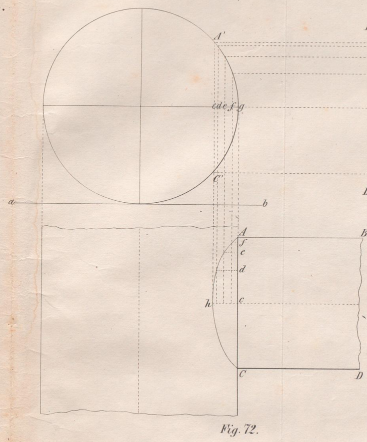


Fig. 72.

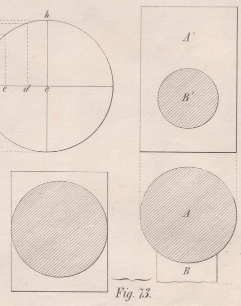


Fig. 73.

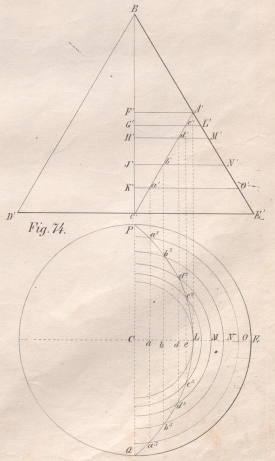


Fig. 74.

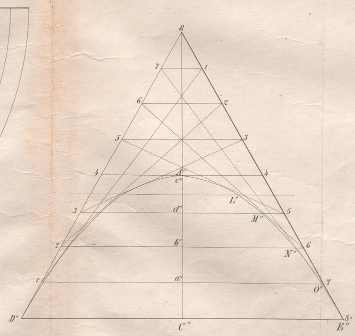
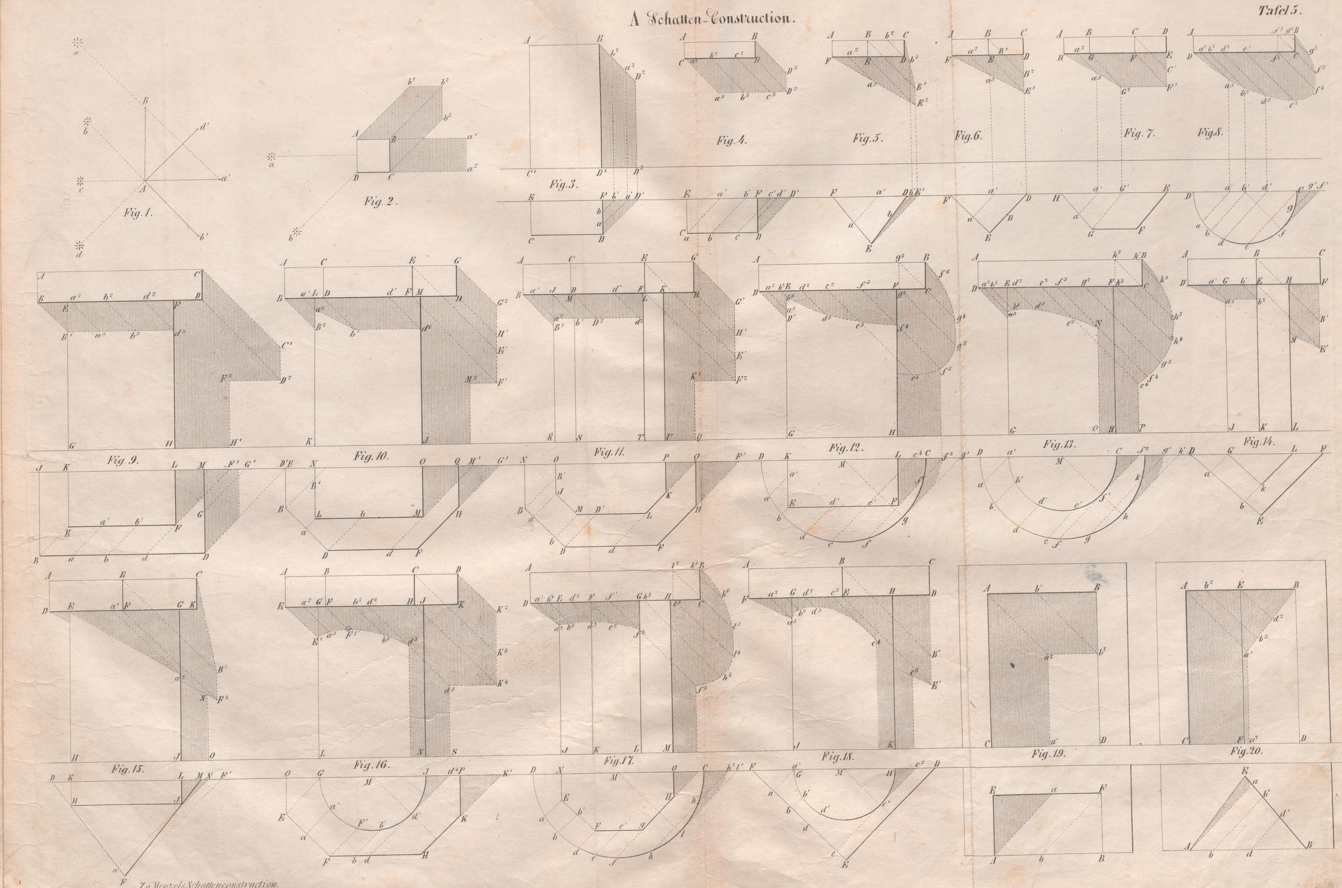


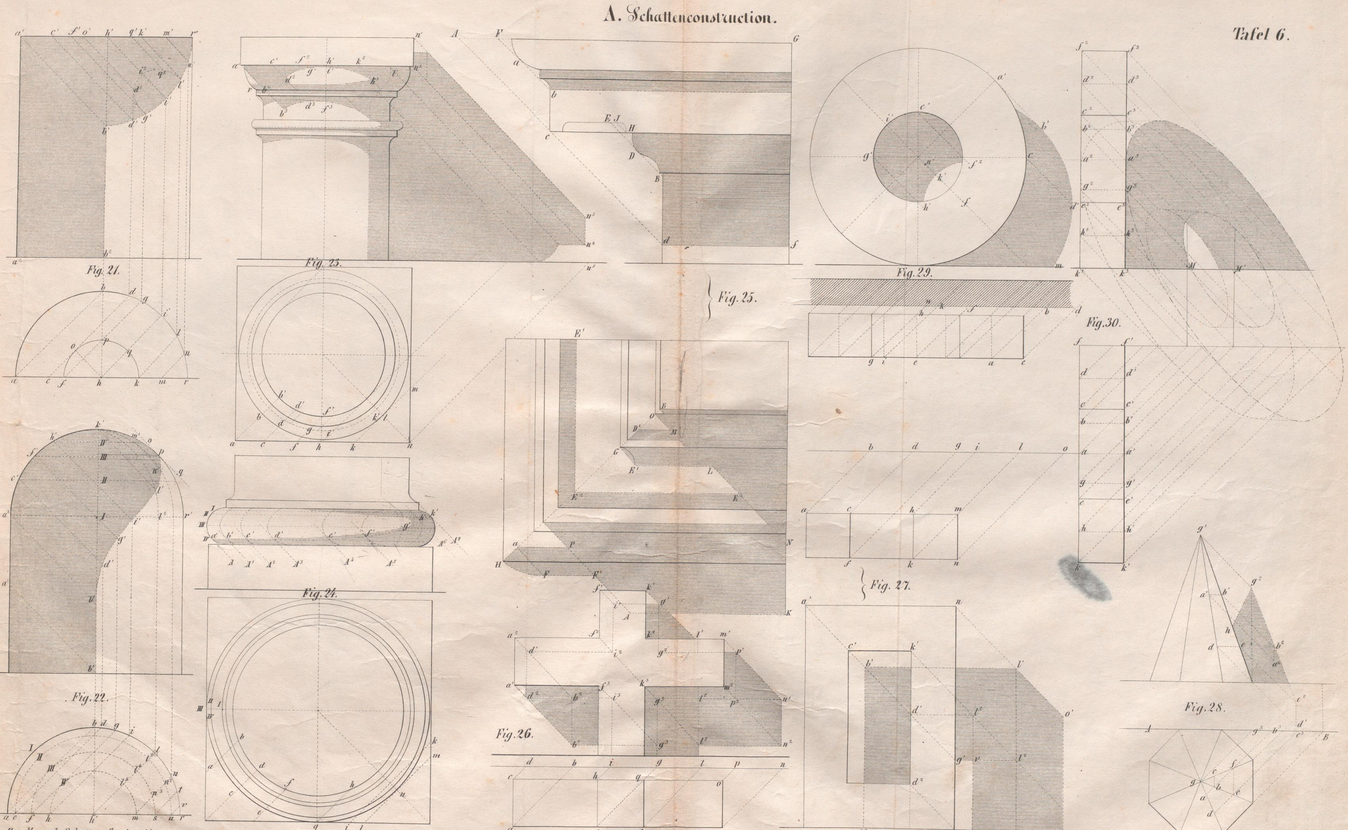
Fig. 75.

A Schatten-Construction.



Zu Menzels Schattenconstruction.

A. Schattenconstruction.



Zu Menzels Schatten-Construction.

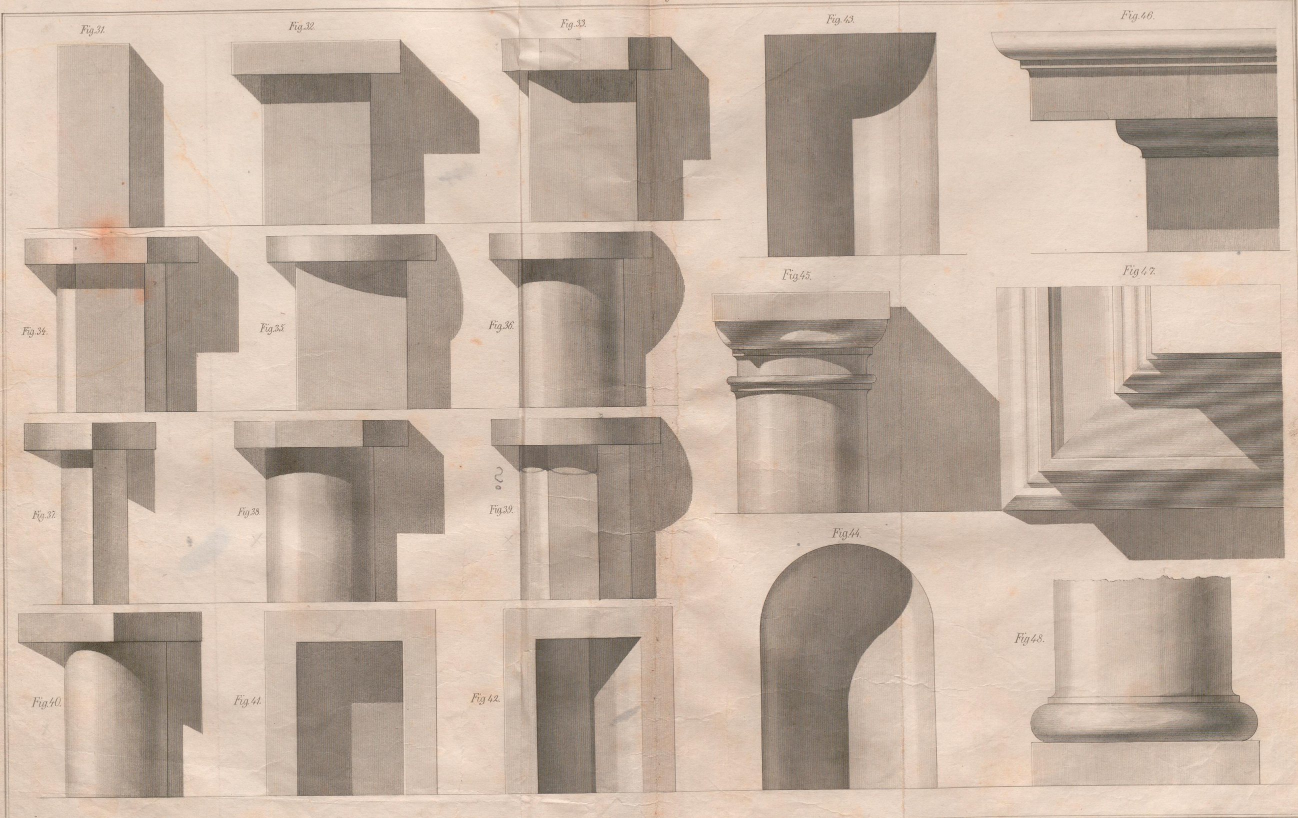
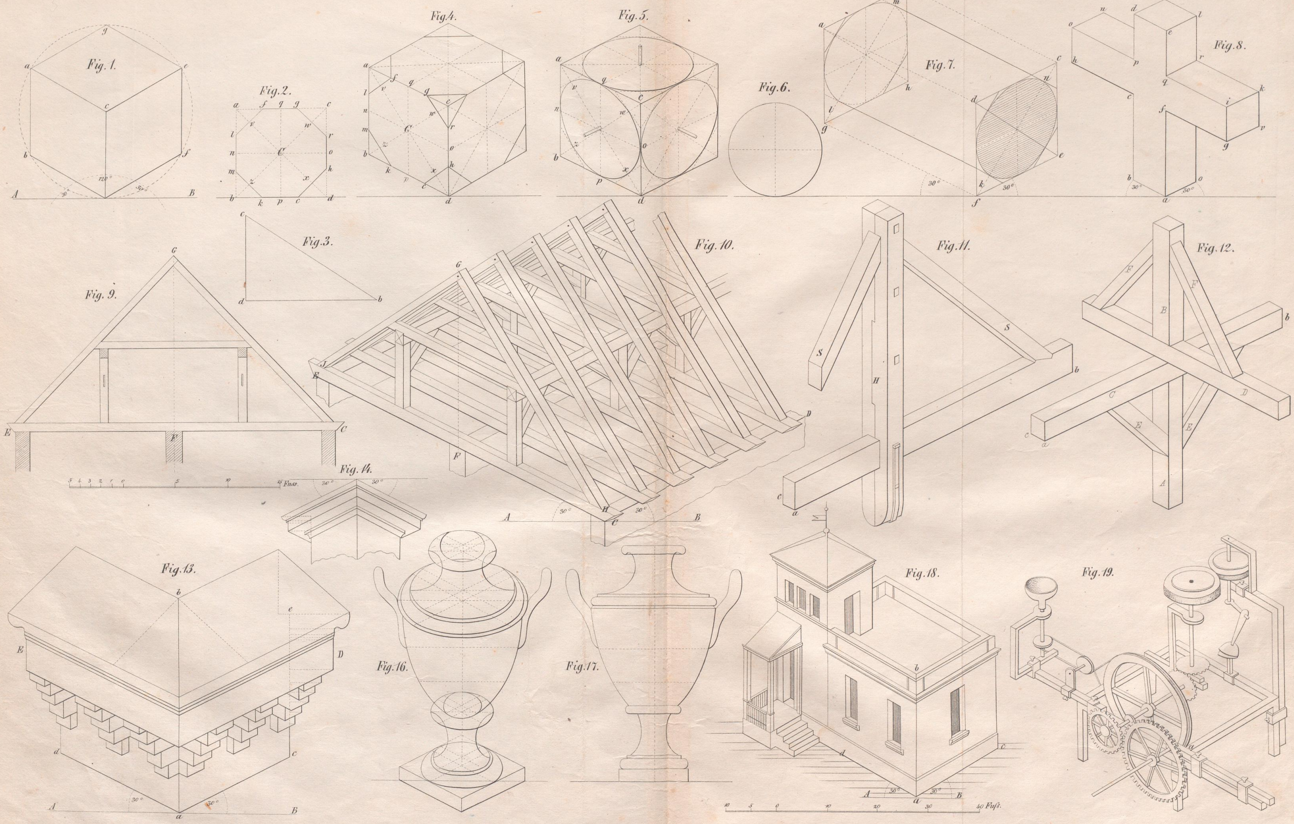
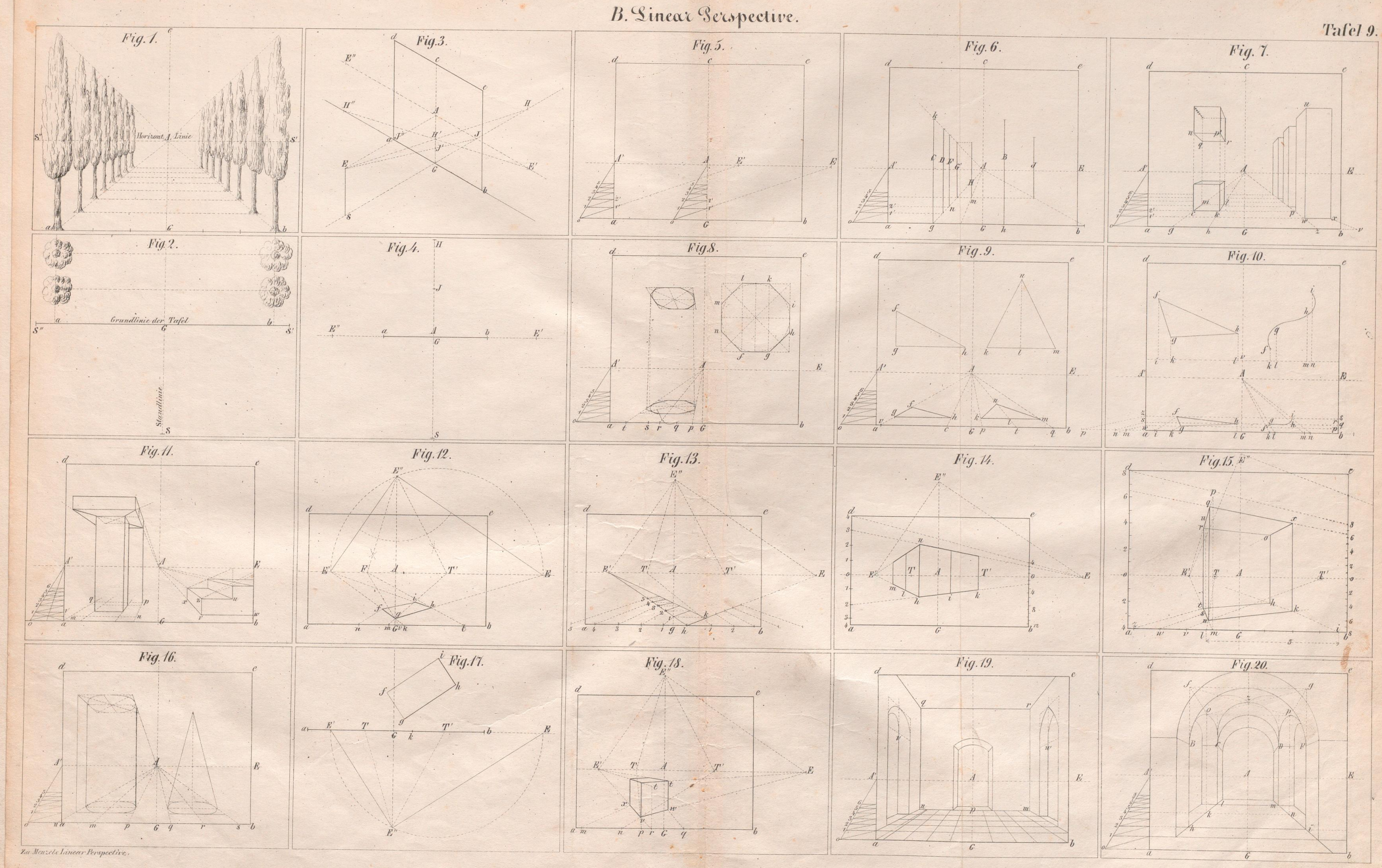


Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 43.
Fig. 46.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 45.
Fig. 47.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 44.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 48.

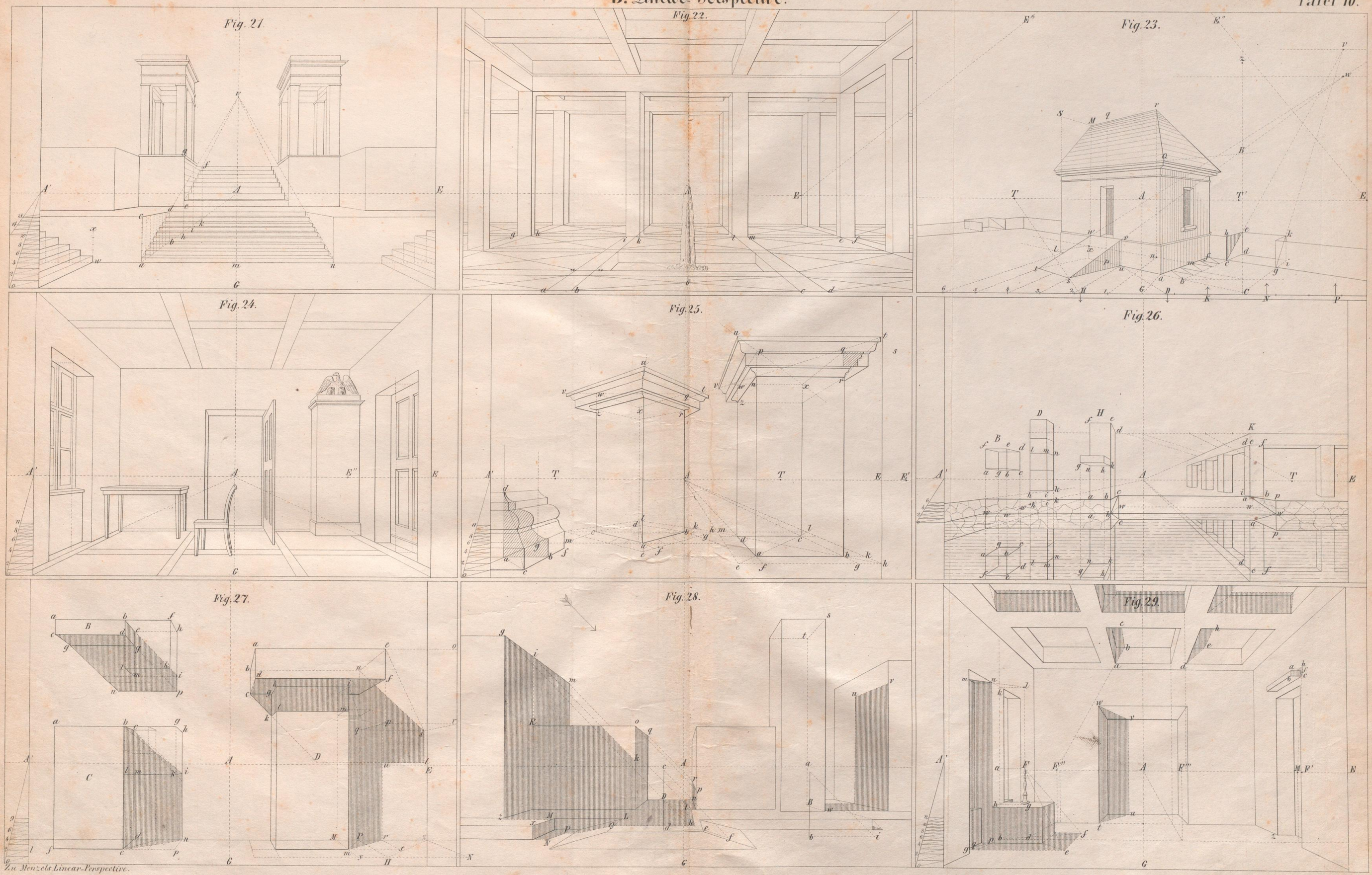
G. Feldweg sc.

A. Isoperimetrische - Perspective.





Zu Menzels Linear Perspective.



Zu Menzels Linear-Perspective.