Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

Erste Abtheilung. Projectionslehre.

Erste Abtheilung.

Projectionslehre.

Erklärung 1. Unter Projectionslehre versteht man diejenige Lehre, welche darthut, wie man in dem freien Raume befindliche Punkte (Linien, Flächen, Körper) auf einer gegebenen Fläche so aufzeichnen kann, daß sie meßbar sind.

Erklärung 2. Die Projection eines einzelnen Punktes entsteht, wenn man von einem im Raume beliebig gegebenen Punkte eine rechtwinklige Linie nach einer gegebenen Fläche zieht und den Durchschnittspunkt der Linie mit der Fläche bemerkt. Dieser Durchschnittspunkt ist die gesuchte Projection des im Raume gegebenen Punktes. Es ist hiernach die Projection eines Punktes das **Bild** desselben, welches entsteht, wenn man von diesem Punkte eine rechtwinklige Linie auf eine gegebene Fläche zieht und den Durchschnittspunkt bemerkt, welcher letztere das **Bild** oder die **Projection** des gegebenen Punktes genannt wird.

Erklärung 3. Jede rechtwinklige Linie auf einer wagerechten (horizontalen — mit dem stillstehenden Wasser gleichlaufenden) ebenen Fläche, heißt bekanntlich eine perpendiculare Linie oder lothrecht.

Jede rechtwinklige Linie auf einer nicht wagerechten Ebene heißt eine normale. Es ist demnach zwar jede lothrechte Linie eine normale, aber nicht jede normale eine lothrechte. Wenn im Verfolge also von einer normalen Linie die Rede ist, so wird überhaupt eine Linie darunter verstanden, welche auf eine gegebene Ebene oder Fläche rechtwinklig gezogen ist, oder gezogen gedacht wird.

§. 1.

Aufgabe. Es soll die Projection eines gegebenen Punktes gefunden werden.

Auflösung. Man denke sich Tafel **1** Fig. **1** über der gegebenen wagerechten Ebene **a b c d** einen Punkt. Ferner denke man sich von diesem Punkte eine normale Linie nach der Ebene gezogen, welche Linie die Ebene in **A** schneidet; bemerkt man den Durchschnittspunkt bei **A** mit einem Punkte, so ist dieser die Projection des oberhalb liegend gedachten Punktes.

Anmerkung 1. Da die gegebene Ebene hier wagerecht angenommen ist, so wird die von dem gegebenen Punkte nach **A** gezogen gedachte normale Linie in dem vorliegenden Falle zugleich eine lothrechte sein.

Anmerkung 2. Wäre die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** nicht wagerecht, sondern senkrecht gestellt gedacht und man sollte die Projection eines davor liegenden Punktes finden, so denkt man sich von diesem Punkte wieder eine normale Linie nach der Ebene zu, und es wird der Durchschnittspunkt in **A** die Projection des vor der Ebene befindlichen Punktes sein.

In diesem Falle wird die normale Linie keine lothrechte, sondern eine wagerechte sein.

Anmerkung 3. Denkt man sich die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** schräg aufgestellt und über oder vor derselben einen Punkt, dessen Projection man finden will, so denke man sich wieder von diesem gegebenen Punkte eine rechtwinklige (normale) Linie nach der Ebene gezogen; auch hier wird in dem Durchschnittspunkte bei **A** die Projection des außerhalb der Ebene gegebenen Punktes erscheinen.

In diesem Falle wird die von dem gegebenen Punkte außerhalb nach der Ebene **a b c d** gezogen gedachte Linie (die Normale) weder lothrecht noch wagerecht sein, sie wird gegen eine wagerecht oder lothrecht gedachte Ebene schräg stehen, obgleich sie rechtwinklig auf der schiefgedachten Ebene **a b c d** steht.

Anmerkung 4. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß das Bild (die Projection) eines **Punktes** immer wieder ein **Punkt** werden wird, da die von einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Ebene gezogene Linie diese Ebene nur immer in einem einzigen Punkte schneiden kann.

§. 2.

Aufgabe. Es soll die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei Tafel **1** Fig. **2** eine wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, über dieser Ebene und mit ihr gleichlaufend (parallel) befinde sich eine gerade Linie **A B**, so findet man die Projection dieser Linie, wenn man von allen Punkten derselben normale Linien nach der Ebene **a b c d** gezogen denkt (siehe §. 1) und diese Punkte bemerkt. Zieht man alsdann durch diese gefundenen Punkte die gerade Linie **A B**, so ist diese die Projection der über der Ebene gedachten geraden Linie. Man hat nämlich dadurch, daß man die einzelnen Punkte der außerhalb der Ebene liegenden Punkte in ihrer Projection gesucht und gefunden hat, auch dadurch die Projection der ganzen Linie gefunden.

Anmerkung 1. Da die einzeln aufgesuchten Projectionspunkte der außerhalb der gegebenen Ebene a b c d liegenden geraden Linie in der Ebene wieder eine gerade Linie A B bilden, so hätte man nur nöthig gehabt, die Projectionen der beiden Endpunkte zu suchen und diese durch eine gerade Linie A B zu verbinden, welches Verfahren die Projection viel kürzer dargestellt hätte, als wenn man sich die gegebene Linie aus vielen einzelnen Punkten bestehend denkt und diese vielen Punkte einzeln sucht, um die Linie zu finden. Deshalb braucht man nur die Projectionen der Endpunkte einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche zu suchen und die gefundenen Projectionen dieser Endpunkte durch eine gerade Linie zu verbinden, wenn man die Projection der ganzen Linie zeichnen will.

Anmerkung 2. Da die außerhalb der Ebene gegebene Linie mit der Ebene a b c d gleichlaufend ist, so wird die Projection dieser Linie, nämlich die Linie A B, genau eben so groß sein, als die außerhalb gegebene Linie selbst ist; denn denkt man sich diese außerhalb der Ebene befindliche Linie so, daß sie sich, in immer gleicher Lage, der Ebene so lange nähert, bis sie in dieselbe zu liegen kommt, so wird ihre Projection genau so groß sein als die Linie selbst ist.

Anmerkung 3. Aus 2 folgt, daß die Projection einer geraden Linie, welche **gleichlaufend** (parallel) mit einer gegebenen Ebene liegt, **genau so groß ist,** als die Linie selbst.

Anmerkung 4. Wenn die gegebene Ebene Fig. 2 a b c d nicht wagerecht, sondern senkrecht stehend gedacht wird, und die gegebene Linie, deren Projection man finden soll, ebenfalls wagerecht und gleichlaufend (parallel) vor derselben liegt, so findet man ihre Projection wieder wie vorhin (Anmerk. 1), wenn man von den Endpunkten der Linie Normalen nach der Ebene gezogen denkt und die Durchschnittspunkte mit der Ebene bei A B durch eine gerade Linie verbindet, wo alsdann eben diese Linie A B die Projection der gegebenen ist.

Anmerkung 5. Denkt man sich Tafel 1 Fig. 3 eine wagerechte Ebene a b c d, so können gerade Linien gegen dieselbe entweder gleichlaufend oder schräg geneigt, oder lothrecht sein.

Liegt die Linie A B gleichlaufend mit der Ebene, so wird die Projection derselben bei A' B' in der Ebene eine gerade Linie bilden, welche eben so groß ist, als die gegebene Linie A B war. Liegt die Linie C D schräg geneigt gegen die Ebene a b c d, so findet man ihre Projection, wenn man die Normalen C C' und D D' gezogen denkt und die Punkte C' D' durch eine gerade Linie verbindet.

Es wird in diesem Falle die Projection C' D' kleiner werden als die Linie C D selbst war.

Die Projection C' D' wird auch immer kleiner werden, je mehr der Winkel, welchen die Linie C D mit der Ebene a b c d bildet, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht eine Linie Fig. 3 E F senkrecht über der wagerechten Ebene a b c d, so wird ihre Projection bei E' F' nur ein Punkt sein. Denn wenn man von allen Punkten der Linie E F normale Linien nach der Ebene a b c d zieht, so werden diese Normalen alle in eine einzige lothrechte Linie zusammenfallen und diese wird die Ebene a b c d nur in einem Punkte zwischen E' F' schneiden, welcher Punkt, alsdann die Projection der gegebenen Linie E F sein wird.

Anmerkung 6. Aus der Anmerkung 5 folgt, daß die Projection einer geraden Linie auf einer wagerechten Fläche die folgenden Gestalten je nach der Lage der Linien annehmen kann.

Liegt die gegebene Linie gleichlaufend mit der gegebenen Ebene, so wird ihre Projection A' B' eben so groß wie die gegebene Linie.

Liegt die gegebene Linie schräg gegen die gegebene Ebene, so wird ihre Projection C' D' kleiner wie die gegebene Linie, und zwar um so kleiner, je mehr der Winkel, welchen die gegebene Linie gegen die Ebene macht, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht die gegebene Linie senkrecht über der gegebenen Ebene, so ist ihre Projection wie hier zwischen E' F' ein Punkt.

Anmerkung 7. Denkt man sich die Ebene a b c d (Tafel 1, Fig. 3) nicht wagerecht, sondern senkrecht und die Lagen der Linien A B — C D — E F — in ähnlicher Weise davor (oder dahinter), so werden die Projectionen dieser Linien ganz gleich mit den Projectionen erscheinen, wie wir sie bei der wagerechten Ebene gesehen haben.

Anmerkung 8. Aus den vorhergehenden Anmerkungen folgt: daß die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche, entweder mit der gegebenen Linie **gleich groß** oder **kleiner** oder ein **einzelner Punkt** werden kann, je nach der Lage der gegebenen Linie gegen die gegebene Ebene.

§. 3.

Aufgabe. Es soll die Projection einer krummen Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Tafel 1 Fig. 4) die wagerechte Ebene a b c d gegeben; über dieser befinde sich die beliebig gekrümmte Linie A B . . F.

Man findet ihre Projection, wenn man in der gegebenen Linie die beliebigen Punkte B C D E annimmt, von diesen Punkte aus die Normalen A A', B B' . . . . F F' zieht und die in der wagerechten Ebene gefundenen Durchschnittspunkte A' B' C' D' E' F' mit einander durch eine krumme Linie verbindet, welche alsdann die gesuchte Projection der über der Ebene a b c d befindlichen krummen Linie A B C D sein wird.

Anmerkung 1. Befände sich eine krumme Linie (Tafel 1 Fig. 5) vor einer senkrechten Ebene a b c d und man sollte die Projection dieser Linie auf der Ebene zeichnen, so verfährt man ganz wie bei der wagerechten Ebene. Man nimmt beliebige Punkte B C D ... in der krummen Linie an, zieht von diesen aus normale Linien nach der senkrechten Ebene, bemerkt die Durchschnittpunkte A' B' C' D' E', verbindet diese Durchschnittspunkte durch eine Linie, so ist diese die Projection der außerhalb der senkrechten Ebene befindlichen Linie A B C D E.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß die gegebene Linie jede beliebige Krümmung haben kann. Man theilt sie immer wieder durch willkürlich gewählte Punkte in beliebig große Stücken und sucht alsdann die Projectionen dieser einzelnen Punkte und Stücken wie eben gelehrt wurde.

§. 4.

Aufgabe. Es soll die Projection einer gegebenen Fläche auf einer ebenfalls gegebenen wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 6) die wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, über ihr befinde sich das Dreieck **A B C**. Die Projection desselben findet man, wenn man von den Endpunkten **A B C** des Dreiecks normale Linien **A A′**, **B B′**, **C C′** nach der Ebene zieht, und wo diese die Ebene schneiden die Durchschnittspunkte **A′ B′ C′** durch gerade Linien verbindet, wo alsdann das Dreieck **A′ B′ C′** entstehen wird, welches die Projection des gegebenen Dreiecks außerhalb der wagerechten Ebene sein wird.

Anmerkung 1. Liegt das gegebene Dreieck mit der gegebenen Ebene gleichlaufend (parallel), so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß sein, als das Dreieck selbst war.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 7.) Es liege das gegebene Dreieck **A B C** mit der gegebenen wagerechten Ebene nicht parallel, sondern schief gegen diese Ebene, so wird das Projectionsdreieck **A′ B′ C′** kleiner erscheinen als das gegebene, und zwar um so kleiner, je mehr die Neigung des außerhalb der Ebene gegebenen Dreiecks sich einem rechten Winkel nähert, wie aus Tafel 1 Fig. 8 zu sehen, wo das Projectionsdreieck **A′ B′ C′** viel kleiner erscheint als in Fig. 7.

Anmerkung 3. Stünde das gegebene Dreieck **A B C** lothrecht (Taf. 1 Fig. 9) über der wagerechten Ebene **a b c d** und man zieht die Projectionslinien **A A′**, **B B′**, **C C′**, so wird die Linie **A B** und auch die Linie **B C** in eine gerade Linie **A′ B′ C′** fallen und die Projection des ganzen Dreiecks nur aus einer einzigen geraden Linie **A′ B′ C′** bestehen, welche in dem vorliegenden Falle eben so groß wie die Grundlinie des gegebenen Dreiecks **A B C** sein wird.

Anmerkung 4. Befände sich das gegebene Dreieck nicht über einer wagerechten Ebene, sondern vor einer senkrechten, wie Taf. 1 Fig. 10 das Dreieck **A B C** vor der senkrechten Ebene **a b c d**, so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß wie das gegebene Dreieck selbst sein, wenn das gegebene Dreieck **A B C** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene **a b c d** ist.

Stände das gegebene Dreieck schräg gegen die senkrechte Ebene geneigt, so würde die Projection desselben kleiner werden als das gegebene Dreieck, wie wir es eben (Anmerk. 2 §. 4) bei der wagerechten Ebene gezeigt haben.

Stände das gegebene Dreieck normal gegen die senkrechte Ebene, so würde seine Projection eine gerade Linie werden, wie es (§. 4 Anmerk. 3) auch bei der wagerechten Ebene der Fall war.

Anmerkung 5. Es ergiebt sich aus dem Vorangegangenen Folgendes:

1) Die Projection eines Dreiecks auf einer ebenen Fläche kann **eben so groß** sein als das gegebene Dreieck, oder **kleiner**, oder auch **nur eine Linie**.

2) Was für die Figur eines **Dreiecks** gilt, muß auch für alle **möglichen Figuren** gelten, die eine ebene Fläche bilden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Körpers auf einer wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es stehe (Tafel 1 Figur 11) der Cubus **A B C D E F G H** über der wagerechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß die Grundfläche des Cubus, **E F G H**, gleichlaufend (parallel) mit der wagerechten Ebene **a b c d** liege, so werden die Seitenkanten des Cubus lothrecht auf der Ebene stehen und ihre Projectionen werden (§. 2 Anmerk. 5) die Punkte zwischen **A′ F′**, **B′ G′**, **C′ H**, **D′ E′** sein. Eben so wird die Projection der Oberfläche des Cubus **A B C D** mit der Projection der Unterfläche **E F G H** zusammenfallen und die Projection des ganzen Cubus in der Ebene **a b c d** wird das Quadrat **A′ F′**, **B G′**, **C H′**, **D′ E′** sein.

Anmerkung 1. Befände sich derselbe Cubus (Taf. 1 Fig. 12) vor der senkrechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß seine eine Fläche **B C H E** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene liegt, so wird die Projection des ganzen Körpers in das Quadrat **B′ C′ E′ H′** auf der Ebene **a b c d** fallen. Denn da die eine Fläche **B C E H** gleichlaufend mit der Ebene **a b c d** steht, so stehen die Kanten des Körpers, **A B**, **D C**, **G H**, **F E**, normal auf der senkrechten Ebene, und ihre Projectionen fallen in die vier Punkte **B′ C′ E′ H′**. Da ferner die Ebene des Körpers **A D F G** mit der Ebene desselben Körpers **B C E H** zusammenfällt, so wird die Projection des ganzen Cubus hier durch das Quadrat **B′ C′ E′ H′** in der Ebene **a b c d** dargestellt sein.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 13.) Stände der Cubus schief gegen die gegebene wagerechte Ebene **a b c d**, so würde seine Projection wieder eine Figur bilden, welche entsteht, wenn man von den Kanten des Cubus normale Linien auf die wagerechte Ebene zieht und die Durchschnittspunkte **G′ H′ E′ F′** durch gerade Linien verbindet.

Dasselbe würde der Fall sein, wenn der Cubus schräg vor einer senkrechten Ebene läge, wie leicht zu übersehen.

Anmerkung 3. Es folgt aus dem Gesagten: daß die Projection eines Körpers auf einer ebenen Fläche ebenfalls eine **Fläche** bildet.

§. 6.

Folgerung aus den bisherigen Paragraphen.

1) Die Projection eines Punktes ist immer wieder ein Punkt. (§. 1.)

2) Die Projection einer geraden Linie ist
   a) entweder eine gerade Linie, welche eben so groß ist, als die gegebene (§. 2 Anmerk. 3),
   b) oder sie ist kleiner als die gegebene Linie (§. 2 Anm. 5),
   c) oder die gegebene Linie erscheint in ihrer Projection als ein Punkt (§. 2 Anmerk. 4).

3) Die Projection einer Fläche ist
   a) entweder eine Fläche, eben so groß wie die gegebene (§. 4 Anmerk. 1),
   b) oder kleiner als die gegebene Fläche (§. 4 Anmerk. 2),
   c) oder eine bloße Linie (§. 4 Anmerk. 3).

4) Die Projection eines Körpers ist immer eine Fläche. (§. 5.)

§. 7.

Erklärung. Der Maßstab. Um die Projectionen von Linien, Flächen und Körpern auftragen zu können, bedient man sich eines Maßstabes, des gewöhnlichen Duodecimal-Fußstockes, wo ein Fuß in zwölf Zoll getheilt ist.

Des Maßstabes in natürlicher Größe bedient man sich auf den Bauplätzen selbst, und zwar der Zimmermann, indem er aus runden Hölzern vierkantig beschlagene von den verschiedensten Abmessungen bildet, oder indem er die Walmschmiegen eines Sparrens, oder die gekrümmten Wangen 2c. einer gewundenen Treppe aufsucht; der Maurer, um die Maßlatten der Gebäude zu schneiden und zu bezeichnen, um die Gurt- und Gradbögen der Gewölbe 2c. zu bestimmen 2c.

Alle diese Geschäfte sind nichts weiter als das Aufsuchen von Projectionen, und wenn der Gewerksmann auch gewohnt ist, die gewöhnlich vorkommenden Fälle so zu sagen auswendig zu lernen, ohne sich der darauf bezüglichen Lehren bewußt zu sein, so wird man doch in nur wenig veränderten oder gar in seltenen Fällen niemals im Stande sein, sich zu helfen, wenn man keine Projectionslehre versteht. Daher kommt es, daß auf den Zimmerplätzen gewöhnlich nur Einer ist, der schiftet, Treppen aufreißt 2c. und daß die Mehrzahl auch das nicht kann.

Will man Projectionen auf dem Papiere auftragen, so bedient man sich eines sogenannten verjüngten Maßstabes, welcher entweder von einem bestimmten Fußtheile entnommen ist (wo z. B. ein halber Zoll gleich einem Fuß 2c. gesetzt wird), oder man macht sich einen willkürlichen Maßstab von Fußen und Zollen und mißt damit.

Bei den gewöhnlichen Bauzeichnungen nimmt man 10 Fuß auf einen Duodecimalzoll, da bei diesem Maße die einzelnen Theile eines Baurisses noch ziemlich deutlich gezeichnet werden. Kleiner darf man den Maßstab bei Bauzeichnungen nicht nehmen, da sonst die Gegenstände undeutlich und zu klein sich darstellen, um mit dem Zirkel meßbar zu sein.

Denkt man sich die Projection eines Körpers auf einer wagerechten (horizontalen) Ebene, so heißt diese Projection der Grundriß des Körpers.

Denkt man sich die Projection eines Körpers auf einer senkrechten (perpendiculären) Ebene, so heißt diese Projection der Aufriß des Körpers.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene durch einen Körper gelegt und die sämmtlichen durchschnittenen Theile des Körpers auf die senkrechte Ebene in Projection gebracht, so entsteht der Durchschnitt (das Profil) eines Körpers.

Hiernach wäre z. B. der Grundriß eines Cubus ein Quadrat, wenn der Cubus parallel mit der wagerechten Ebene steht. Hiernach wird der Aufriß eines Cubus ebenfalls ein Quadrat, wenn der Cubus parallel mit der senkrechten Ebene steht. Hiernach wird auch der Durchschnitt eines Cubus ein Quadrat, wenn die Durchschnittsebene senkrecht durch den Cubus liegt.

Bei allen Bauzeichnungen nimmt man an, daß die Gebäude oder deren einzelne Theile, welche man eben zeichnen will, gleichlaufend (parallel) mit der wagerechten und der senkrechten Ebene liegen, weil es unnöthiger Weise sehr unbequem für die Meßbarkeit sein würde, wenn man die Projectionsebene geneigt (schräg) gegen die Gebäude annehmen wollte.

Denkt man sich nun ein ganzes Haus aufrecht stehend, und denkt man sich eine wagerechte Ebene durch das Haus gelegt und die Projectionen sämmtlicher durchschnittenen Theile auf der wagerechten Ebene gezeichnet, so erhält man den Grundriß des Hauses.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene vor das Haus gestellt und von allen Punkten des Gebäudes normale Projectionslinien nach der senkrechten Ebene gezogen und die Durchschnittspunkte dieser Linien durch Linien verbunden, so entsteht der Aufriß des Hauses.

Denkt man sich eine senkrechte Ebene auf irgend einem Punkte durch das Haus gestellt, und auf dieser Ebene die sämmtlichen Projectionen der von der Ebene durchschnittenen Theile gezeichnet, so entsteht der Durchschnitt des Hauses.

Grundriß, Aufriß und Durchschnitt der Gebäude werden immer nach verjüngtem Maßstabe aufgezeichnet.

Einzelne Theile der Gebäude dagegen (sogenannte Details) werden häufig (wie z. B. bei den Chablonen der Maurer und Zimmerleute) nach der natürlichen Größe des Fußmaßes aufgetragen.

Man sieht, daß nach dem Vorigen der Plan einer ganzen Gegend oder eines ganzen Landes (Landcharte) nichts weiter ist, als die Projection der Gegend oder des Landes auf einer wagerechten Ebene nach verjüngtem Maßstabe.

Nachdem nunmehr die Projectionslehre in ihren allgemeinen Grundbegriffen dargestellt worden ist, soll in vielfachen Beispielen deren Anwendung gezeigt werden, auch sollen die Beispiele so gewählt werden, daß sie immer, so viel wie möglich, auf in der Ausübung (Praxis) vorkommende Fälle Anwendung finden, was namentlich von den zuletzt folgenden gilt. Es dürfen aber deshalb die hier zuerst aufgezeichneten nicht übergangen oder vernachlässigt werden, da ohne das Verstehen derselben auch die schwierigeren Aufgaben nicht gelöst werden können.

Es ist noch ganz besonders darauf aufmerksam zu machen, daß der Leser, welcher Projectionen zeichnen lernen will, die hier gegebenen Beispiele selbst auf dem Papiere zu lösen versuchen muß, denn wenn derselbe nicht mit den Uebungen im Buche gleichen Schritt auf seinem Reißbrette hält, so wird er durch das bloße Anschauen und selbst durch das Verstehen der gestochenen Figuren doch keine Projectionen zeichnen lernen, da jede Wissenschaft nur durch fortschreitende Uebung und durch Wiederholung erlernt wird und gleichsam eine **Gewohnheit** werden muß, ehe wir sie ganz und ohne Mühe für das practische Leben gebrauchen können.

Es ist diese Wahrheit zwar etwas demüthigend für den menschlichen Geist, aber es ist nun einmal nicht anders, wie wohl Jeder an sich selbst wird erfahren haben.

§. 8.

Aufgabe. Es soll die Projection einer senkrechten geraden Linie im Aufriß und Grundriß auf dem Papiere gezeichnet werden.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 14.) Denkt man sich die vordere Kante einer wagerechten Ebene, so stellt diese Kante eine gerade Linie dar, die ebenfalls wagerecht ist, wie die Linie **a b** (Fig. 14). Diese Linie ist zugleich die Projection der ganzen wagerechten Ebene auf einer dahinter liegenden senkrechten Ebene (§. 2. Auflös.). Wir können demnach die Linie a b als Aufriß der wagerechten Ebene in der senkrechten Ebene betrachten, und zugleich können wir die Linie a b als die Grundlinie der darüber befindlichen senkrechten Ebene bezeichnen.

Eben so können wir den ganzen Raum unter der Linie **a b** als die Projection der wagerechten Ebene selbst betrachten.

Nach §. 2 Anmerk. 4. ist die Projection einer senkrechten geraden Linie, welche mit der senkrechten Ebene parallel ist, ebenfalls eine senkrechte Linie von gleicher Größe, wie die gegebene.

Es wird demnach die Linie A B die Projection der gegebenen Linie im Aufriß sein, wenn sie auf der wagerechten Ebene stehend angenommen worden ist.

Soll die Linie A B außerdem ein bestimmtes Längenmaß enthalten, so braucht man sie nur nach einem zu bestimmenden verjüngten Maßstabe so lang zu machen, als sie werden soll; z. B. sie soll 10 Fuß lang sein, so zeichne man sich erst einen beliebigen verjüngten Maßstab, nehme davon 10 Fuß in den Zirkel und setze diese 10 Fuß von A nach B, so ist die Linie A B 10 Fuß lang. Da wir den Raum unter der Linie a b als die Projection der wagerechten Ebene betrachten können, so würde der Grundriß der senkrechten Linie A B sich in dem Punkte A′ als Punkt darstellen (§. 2 Anmerk. 5), denn die Projectionen sämmtlicher in der Linie A B angenommenen Punkte auf die wagerechte Ebene fallen alle in einen einzigen Punkt A′ zusammen.

§. 9.

Aufgabe. Es soll die Projection einer auf der wagerechten Ebene unter einem bestimmten Winkel schräg stehenden Linie im Aufriß und Grundriß gezeichnet werden.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 15) die Linie a b wieder die Grundlinie der senkrechten Ebene (§. 8) und der Raum unter ihr stelle die wagerechte Ebene vor.

Die Projection einer schrägen Linie von bestimmter Länge in der senkrechten Ebene wird man erhalten, wenn man die Linie A B unter dem gegebenen Neigungswinkel aufträgt, wo dann die Linie A B eben so lang als die gegebene erscheinen wird, wenn sie parallel mit der senkrechten Ebene liegt. Es wird also die Linie A B die gesuchte Projection sein (§. 2 Anmerk. 5).

Will man dieselbe Linie im Grundriß finden, so punktire man die Normalen A A′, B B′, bestimme den Anfangspunkt A′ der Grundrißlinie und ziehe A′ B′, so ist diese Linie der gesuchte Grundriß der Linie A B.

§. 10.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 16) der Aufriß und Grundriß einer Linie gefunden werden, welche mit der wagerechten Ebene einen bestimmten Winkel macht und auch in der wagerechten Ebene selbst unter einem bestimmten Winkel liegt.

Auflösung. Zuvörderst zeichne man sich auf die Grundlinie a b die punktirte Linie A B nach ihrer gegebenen Maßlänge und unter dem gegebenen Neigungswinkel. Zieht man ferner die punktirte Linie B C, so zeigt die Linie A C diejenige Länge an, welche die Linie A B in der Projection als Grundriß haben muß. Nun trage man die Linie A C mit dem Zirkel unter der Linie a b (also auf der wagerechten Ebene) von A′ nach B′, und zwar unter dem gegebenen Winkel (hier 45 Grad) auf, so ist die Linie A′ B′ die gesuchte Projectionslinie des Grundrisses. Will man nun die gegebene Linie im Aufriß finden, so verfahre man folgendermaßen.

Zuvörderst punktire man mit der Grundlinie gleichlaufend die Linie B B″, beliebig lang, so wird der Höhenraum zwischen den Linien a b und B B″ anzeigen, wie hoch überhaupt die zu suchende Linie reichen könne.

Zieht man nun von A′ aus die punktirte Linie A A″, so ist A″ der Grundpunkt der zu suchenden Linie; zieht man ferner die punktirte Linie B′ B″, so ist B″ der höchste Endpunkt, welchen die gegebene Linie erreichen kann.

Verbindet man nunmehr die Punkte A″ B″ durch eine gerade Linie, so ist diese die gesuchte Projectionslinie des Aufrisses.

Anmerkung. Die wirklichen Maßlängen des Grundrisses und Aufrisses würde man bei diesem Beispiele nicht aus den Linien A′ B′ und A″ B″ finden, sondern für A′ B′ würde die Linie A B, und eben so für A″ B″ die Linie A B die wirkliche Maßlänge zeigen, da A′ B′ und A″ B″ kleiner sind als A B (§. 2 Anmerk. 5).

§. 11.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 17) der Aufriß und Grundriß einer krummen Linie gezeichnet werden, wenn die Linie in einer Ebene liegt, welche mit der senkrechten Ebene gleichlaufend (parallel) ist.

Auflösung. Es sei die Linie a b die Grundlinie der senkrechten Ebene und unter ihr befinde sich die Projection der wagerechten Ebene.

Denkt man sich einen Halbkreis in einer Ebene parallel mit der senkrechten Ebene, so wird seine Projection im Aufriß ein eben so großer Halbkreis sein (§. 3 Anmerk. 1).

Man hat demnach nur mit dem Radius C A′ den Halbkreis A′ D′ B′ zu ziehen, so ist dieser die gesuchte Projection des Aufrisses.

Will man nun den Halbkreis im Grundrisse zeichnen, so muß man bedenken, daß, wenn man von beliebig vielen Punkten des Halbkreises Projectionslinien nach der Grundlinie a b (welche zugleich die Projection der wagerechten Ebene ist) zieht, eine gerade Linie entstehen wird.

Der Grundriß der senkrecht stehenden Halbkreislinie wird also eine gerade Linie sein, welche so lang ist, wie der Durchmesser des Halbkreises. Bestimmt man nun in der wagerechten Ebene den Punkt A, wo die Linie A B anfangen soll, und zieht A B so lang als A′ B′, so ist diese Linie der gesuchte Grundriß des Halbkreises.

Man kann sich noch mehr davon überzeugen, wenn man (wie die punktirten Linien zeigen) mehrere Punkte im Halbkreise annimmt und ihre Projectionspunkte einzeln nach einander sucht.

So würden z. B. der Scheitelpunkt D′ des Halbkreises und sein Mittelpunkt C′ im Grundrisse in den Punkt C zusammenfallen.

Anmerkung. Es ist leicht zu übersehen, daß die krumme Linie, welche hier als halbkreisförmig angenommen worden ist, auch jede beliebige andere Gestalt haben kann, z. B. als flaches Bogenstück, als Ellipse, als Spitzbogen ꝛc. Das Aufsuchen aller dieser Formen würde immer in ganz ähnlicher Weise geschehen.

§. 12.

Aufgabe. Es soll (Taf. 1 Fig. 18) der Aufriß und Grundriß einer krummen Linie gefunden werden, welche schräg mit ihrer Grundlinie steht.

Auflösung. Es sei die gegebene krumme Linie wieder ein Halbkreis, so zeichne man sich denselben erst punktirt wie A E D F B nach dem verjüngten Maßstabe auf. Seine Projection auf der Grundlinie zwischen A B wird eben so groß sein als der Durchmesser des Halbkreises.

Diesen Durchmesser (oder die Länge der Projection des Grundrisses vom Halbkreise) trage man mittelst des Zirkels von A′ nach B′ unter demjenigen Winkel auf (hier 45 Grad), welcher gegeben ist. Nun ist die Linie A′B′ die Projection des Grundrisses und C′ der Mittelpunkt des Halbkreises, aber auch zugleich die Projection des Radius C D in dem punktirten Halbkreise.

Will man nun den Aufriß finden, so zieht man erst mit der Grundlinie a b parallel die willkürlich lange punktirte Linie D D″ G. Eben so verlängert man den Durchmesser A B des Halbkreises punktirt willkürlich lang. Der Raum zwischen diesen beiden punktirten Linien zeigt nun die Höhe an, welche der Aufriß des zu suchenden Halbkreises einnehmen muß.

Nun ziehe man vom Grundriß aufwärts die senkrechten punktirten Linien A′ A″, C′ C″ D″, B′ B″ und ziehe durch die Punkte A″, D″, B″ eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte Aufriß des Halbkreises.

Will man den Aufriß genauer bestimmen, so nehme man in dem punktirten Halbkreise noch die Punkte E und F an, suche ihre Projection auf der Grundlinie a b in E und F, trage diese Punkte mit dem Zirkel in E′ und F′ auf die Projectionslinie des Grundrisses A′ B′ und ziehe dann die beliebig langen punktirten Linien E′ E″ und F′ F″. Wenn dies geschehen, nehme man mit dem Zirkel in dem punktirten Halbkreise, vom Durchmesser aufwärts, die Linie E E und trage sie im Aufrisse, wo die Linie E′ E″ den Durchmesser A″ B″ schneidet, nach E″, eben so verfahre man bei F, ziehe dann aus freier Hand die Linie A″ E″ D″ F″ B″, so ist diese der gesuchte Aufriß des Halbkreises.

Anmerkung 1. Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise jede beliebig gekrümmte Linie, welche schräg gegen die senkrechte Ebene mit ihrer Grundlinie steht, finden könne.

Anmerkung 2. Je mehr Punkte man in der krummen Linie, wie E D F, annimmt und ihre Projection bestimmt, um so richtiger wird natürlich auch die aus freier Hand gezeichnete Linie A″ E″ D″ F″ B″ werden.

Am besten thut man, den Durchmesser in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, von diesen Theilungspunkten zieht man alsdann lothrechte Linien bis zum Umkreise, wie hier E D F, und sucht für diese Umkreispunkte die Projectionen des Aufrisses.

Anmerkung 3. Hätte eine krumme Linie (Taf. 1 Fig. 19) A′ B′ im Aufriß eine ganz unregelmäßige Gestalt, so würde ihr Grundriß ebenfalls eine gerade Linie sein, welche man findet, indem man beliebig viele Punkte C D E in der krummen Linie annimmt und ihre Projectionen im Grundrisse sucht, welche Grundrißlinie dann eine gerade Linie A C D E sein wird, wenn die krumme Linie in einer senkrechten Ebene liegt, die mit der gegebenen Aufrißebene parallel ist.

§. 13.

Aufgabe. Die Projection der Fläche eines Quadrats zu zeichnen, welches mit der senkrechten Ebene parallel und mit seiner Grundlinie in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 20) die Linie a b die Grundlinie der senkrechten Ebene, der Raum unterhalb a b sei die Projection der wagerechten Ebene.

Bestimmt man in a b die Länge der Linie A′ B′ als die Grundlinie des Quadrats, so wird die Linie C′ A senkrecht auf A′ B′ und gleich lang mit A′ B′ die eine Seite des Quadrats sein.

Eben so wird die Linie D′ B′, eben so lang wie A′ C′ gezeichnet, die andere Seite des Quadrats sein, und wenn man die Punkte C′ und D′ durch die gerade Linie C′ D′ verbindet, so wird das Quadrat A′ C′ D′ B′ die gesuchte Projection sein; denn da das gegebene Quadrat parallel mit der senkrechten Ebene angenommen war, so werden auch alle Umrißlinien desselben in gleicher Größe erscheinen, wie sie wirklich sind (§. 2), folglich auch die ganze Figur des Quadrats.

Soll man nun den Grundriß desselben Quadrats zeichnen, so wird er durch die gerade Linie A B dargestellt, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Linie C′ A′ fallen in dem Punkte des Grundrisses A zusammen, eben so die Projectionspunkte der Linie D′ B′ in dem Punkte des Grundrisses B, und endlich fällt die Projection der Linie C′ D′ mit der Linie des Grundrisses A B zusammen.

Es wird also der Grundriß des Quadrats A′ C′ D′ B die gerade Linie A B sein.

Anmerkung 1. Stände das Quadrat schräg gegen die senkrechte Ebene (Taf. 1 Fig. 21), wie der Grundriß A B zeigt, so findet man die schräg gestellte Ebene im Aufriß, wenn man die willkürlich langen Linien A A′ C′ und B B′ D′ lothrecht hinauf zieht.

Setzt man alsdann von A′ nach C′ und von B′ nach D′ das Maß einer Seite des Quadrats und zieht die Linie C′ D′, so ist die gesuchte Projection des schräg stehenden Quadrats im Aufriß gefunden.

Anmerkung 2. Es sei das Quadrat schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt (Taf. 1 Fig. 22), man soll Grundriß und Aufriß derselben finden.

Wenn man die punktirte Linie A″ B″ unter dem gegebenen Neigungswinkel B″ A″ E″ zieht und die Länge der Seite des Quadrats von A″ nach B″ setzt, so ist die Linie A″ B″ die Projection der Seitenansicht des Quadrats.

Bestimmt man nun die Grundlinie A′ B′ des Quadrats in der Grundlinie der senkrechten Ebene a b und zieht man die willkürlich lange Linie B″ D′ C′ parallel mit a b, so zeigt der Raum zwischen der Linie B″ D′ C′ und der Grundlinie a A′ B′ b die Höhe an, zwischen welcher das geneigte Quadrat liegen muß. Zieht man nun die Lothrechten A′ C′ und B′ D′ und verbindet diese beiden durch die Linie C′ D′, so hat man die Projection des Aufrisses des schräg gegen die wagerechte Ebene geneigten Quadrats gefunden.

Den Grundriß würde man auf folgende Weise finden.

Man ziehe die Lothrechten C′ A′ C A und D′ B′ D B abwärts willkürlich lang, so giebt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Länge des zu suchenden Grundrisses, zieht man die wagerechte Linie A B als Grundlinie des Quadrats, so ist diese eben so lang als A′ B′, weil beide Linien Parallelen zwischen Parallelen sind.

Nun betrachte man das Dreieck A″ B″ E″; in diesem ist die Linie A″ E″ die Projection der Linie A″ B″, A″ B″ aber ist die Länge des Quadrats, folglich ist A″ E″ die Projection der Länge des Quadrats. Trägt man nun die Länge der Linie A″ E″ mit dem Zirkel von A nach C und von B nach D und zieht von C nach D eine gerade Linie C D, so ist die Figur A C D B der gesuchte Grundriß des Quadrats.

Anmerkung 3. Wäre die quadratische Ebene unter einem gegebenen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt (wie vorhin), die Grundlinie des Quadrats neige sich aber ebenfalls unter einem beliebigen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene (Taf. 1 Fig. 23), so findet man Grund- und Aufriß des Quadrats wie folgt.

Die punktirte Linie A″ B″ giebt die Neigung des Quadrats gegen die wagerechte Ebene an. Zieht man die willkürlich lange Linie B′ D′ C′ parallel mit a A′ B′ b, so zeigt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Höhe an, welche der Aufriß einnehmen wird.

Zeichnet man sich nun den Grundriß A B C D (wie in Anmerkung 2) in diejenige schräge Lage, wovon die Neigung gegeben ist, so kann man aus diesem gefundenen Grundriß nunmehr den Aufriß bestimmen.

Zieht man nämlich die lothrechten Linien A A′ und B B′, so ist A′ B′ die Grundlinie des Aufrisses in ihrer Projection.

Zieht man ferner C C′ und D D′, so ist die Linie C′ D′ die obere Grenzlinie des Quadrats.

Zieht man nun noch A′ C′ und B′ D′, so ist die Figur A′ C′ D′ B′ die gesuchte Projection des Aufrisses. Man kann sich zur Uebung in jeder der geraden Linien mehrere Projectionspunkte annehmen und diese nach und nach bestimmen, wodurch man sich von der Wahrheit noch mehr überzeugen wird. Hier sind immer nur die Endpunkte der Linien gesucht und bestimmt worden, da die etwa in den geraden Linien angenommenen Zwischenpunkte doch mit diesen Endpunkten in ihren Projectionen immer wieder zusammenfallen. Auch kann man zur Uebung die Neigungswinkel willkürlich verändern, woraus immer andere Figuren im Grund und Aufriß entstehen werden.

Anmerkung 4. Denkt man sich das Quadrat senkrecht in der wagerechten Ebene stehend und zugleich unter einem rechten Winkel gegen die Grundlinie a b (Taf. 1 Fig. 24) der senkrechten Ebene geneigt, wie der Grundriß in der Linie A B zeigt, so erhält man den Aufriß, wenn man die lothrechte Linie A′ B′ zieht und A′ B″ so lang macht wie eine Seite des Quadrats, = A B. Es fällt alsdann die Ebene des Quadrats sowohl bei dem Grundrisse, als bei dem Aufrisse, in einzelne gerade Linien zusammen, nämlich in die Linie A B für den Grundriß und in die Linie A′ B′ für den Aufriß. (§. 4 Anmerk. 3.)

§. 14.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Kreises im Grund- und Aufriß gezeichnet werden, wenn die Kreisfläche parallel mit der senkrechten Ebene steht und der senkrechte Durchmesser des Kreises normal auf die wagerechte Ebene gerichtet ist.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 25.) Denkt man sich die mit der senkrechten Ebene parallele Kreisfläche dieser senkrechten Ebene so nahe gerückt, daß der Kreis in die Ebene zu liegen kommt, so wird der Kreis A′ D′ B′ E′ in seiner Projection wieder als Kreis erscheinen, und zwar von derselben Größe wie der gegebene war. Es ist demnach der Kreis A′ D′ B′ E′ die gesuchte Projection. (§. 3 Anmerk. 1 u. 2.) Will man nun den Grundriß finden, so ziehe man die lothrechten Linien A′ A, D′ C′ E′ C, B′ B, und dann die wagerechte Linie A C B, so ist dieselbe der gesuchte Grundriß, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Kreisfläche, so viele man ihrer auch im Umkreise annehmen mag, fallen alle in die gerade und wagerechte Linie A B.

So liegen z. B. die Projectionen der drei Punkte des Durchmessers D′ C′ E′ alle in dem einzigen Punkte C der Linie A C B.

Anmerkung 1. Es stehe (Taf. 1 Fig. 26) der gegebene Kreis senkrecht in der wagerechten Ebene, aber schräg gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene, man soll den Grundriß und Aufriß dieses Kreises finden.

Zu diesem Zwecke zeichne man sich erst nach dem gegebenen Durchmesser den punktirten Kreis A″ D″ B″ J″ auf die Linie a b.

Man theile ferner den Durchmesser dieses Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in vier, und ziehe durch die Theilungspunkte die senkrechten Linien F′ G′, D′ E′, H′ J′, so hat man die nöthigen Hülfsmittel, um den Aufriß zu ermitteln.

Je mehr Theile man den Durchmesser A′ B′ theilt, um so mehr entstehen senkrechte Linien, und um so genauer ist man im Stande, die Aufrißlinie zu finden, wie wir später sehen werden.

Um den Grundriß zu bestimmen, ziehe man die Linien A′ M und B′ N, so wird die Linie M N die Projection des Kreises im Grundrisse sein.

Diese Linie trage man nach ihrer Länge mit dem Zirkel von A nach B, so daß die Linie A B denjenigen Neigungswinkel macht, welchen man bestimmt hat, so ist die Linie A B der Grundriß des Kreises.

Um nun den Aufriß zu finden ziehe man zuvörderst die punktirte Linie D′ D″ willkürlich lang parallel mit a b; eben so verlängere man den Durchmesser A′ B′ des Kreises willkürlich lang. Nun trage man aus dem punktirten Kreise die Punkte des Durchmessers K′ C″ L′ mit dem Zirkel in den Grundriß A B bei K C L. Hierauf ziehe man die Senkrechten A A″, C E C″ D″ und B B″, so hat man die äußersten Punkte des Aufrisses und den Mittelpunkt C″ gefunden. Um nun auch die zwischenliegenden Punkte zu finden, ziehe man die senkrechten K G″ K″ F″ und L J″ L″ H″, alsdann nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie K′ F′ = K′ G′ und trage sie auf dem Durchmesser A″ B″ von K″ nach F″ und abwärts nach G″.

Eben so nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie L′ H′ = L′ J′ und trage sie auf dem Durchmesser A″ B″, von L″ nach H″ und abwärts nach J″. Verbindet man nun aus freier Hand die gefundenen Projectionspunkte A′ F′ D′ H′ B′ J′ E′ durch eine krumme Linie, so hat man die verlangte Projection des Kreises gefunden.

Anmerkung 2. Stände der Kreis (Taf. 1 Fig. 27) senkrecht in der horizontalen Ebene und der wagerechte Durchmesser des Kreises normal gegen die senkrechte Ebene, so würde der Grundriß des Kreises die Linie A B und der Aufriß die Linie A′ B′ sein, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Kreisfläche werden bei der angenommenen Stellung sowohl im Aufriß als im Grundriß in eine bloße gerade Linie zusammenfallen.

Anmerkung 3. Wäre die Kreisfläche (Taf. 1 Fig. 28) gegen die wagerechte Fläche unter einem bestimmten Winkel geneigt, so würde man Grund- und Aufriß derselben auf folgende Weise finden.

Es sei M O N der Durchmesser des Kreises, O der Mittelpunkt desselben und der Winkel N M P der Neigungswinkel gegen die wagerechte Ebene. Ferner sei der punktirte Kreis A′ D′ B′ E′ die Projection des Kreises, welche parallel mit der senkrechten Ebene steht, so sind diese beiden Figuren die Hülfsmittel, um den geforderten Grundriß und Aufriß zu finden. Zuerst wollen wir den Aufriß aufsuchen.

Die Linie N P ist die senkrechte Projection des Kreisdurchmessers M N. Nimmt man nun die Linie N P in den Zirkel und setzt sie von E″ nach D″, so hat man den Höhendurchmesser des Kreises, und wenn man die Höhe P U von E″ nach C″ trägt, so ist C″ der Mittelpunkt des Projectionskreises. Zieht man durch den Punkt C″ die Wagerechte A″ B″ willkürlich lang, so wird in dieser Linie der Breitendurchmesser des Kreises liegen.

Trägt man nun mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie A′ C′ von C″ nach A″ und die Linie C′ B′ von C″ nach B″, so hat man in den Punkten A″ D″ B″ E″ die vier äußersten Punkte der Kreisfläche gefunden.

Um nun noch die Zwischenpunkte zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Man trage aus dem Durchmesser des punktirten Kreises die Entfernung C′ K′ auf der Linie M N, von O nach X und die Entfernung C′ L′ von O nach W. Ferner ziehe man die Wagerechten X T und W V, so sind T und V die Höhenprojectionen von X und W. Trägt man nun die Entfernung U T von C″ nach K″ und die Entfernung U W von C″ nach L″, so sind K″ und L″ die Projectionen der Punkte T und V. Zieht man durch K″ und L″ wagerechte Linien beliebig lang und setzt aus dem punktirten Kreise die Entfernung K′ F mit dem Zirkel von K″ nach F″ und die Entfernung K′ G′ von K″ nach G″; ferner trägt man die Entfernung H′ L von L″ nach H″ und die Entfernung L′ J′ von L″ nach J″, so hat man die Zwischenpunkte F″ G″ J″ H″ gefunden. Verbindet man nun aus freier Hand die Punkte E″ H″ A″ F″ D″ G″ B″ J″ durch eine krumme Linie, so erhält man die Projection der gesuchten Kreisfläche im Aufriß.

Will man nun den Grundriß dazu finden, so verfährt man wie folgt.

Man ziehe die willkürlich lange Mittellinie A B und verlängere die Mittellinie D″ E″ des oberen Kreises nach unten willkürlich lang, so ist C der Mittelpunkt des Grundrisses.

Die Linie M P in dem Dreieck M N P ist die Projection der Linie M N, oder, was dasselbe ist, M P ist der Durchmesser des Kreises in der Grundrißprojection. Setzt man nun die Entfernung R P von C nach D und die Entfernung R M von C nach E, so hat man in D und E die äußersten Punkte des Breitendurchmessers gefunden; trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Länge C′ A′ von C nach A und die Länge C′ B′ von C nach B, so hat man in A und B die äußersten Punkte des Längendurchmessers gefunden.

Um die Zwischenpunkte zu finden verfahre man wie folgt.

Man ziehe in dem Dreieck M N P die Senkrechten W S, O R und X Q, so erhält man in den Punkten S R Q die Projectionen der Punkte W O X. Trägt man nun die Entfernung R Q von C nach K und die Entfernung R S von C nach L, so sind K und L diejenigen Projectionspunkte, welche mit S und Q, mit W und X und im punktirten Kreise mit K′ und L′ übereinstimmen.

Trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Entfernung K′ G′ von K nach G und die Entfernung K′ F′ von K nach F, so hat man die oberen Zwischenpunkte gefunden.

Trägt man ferner aus dem punktirten Kreise die Entfernung L′ J′ von L nach J und die Entfernung L′ K′ von L nach K, so hat man die beiden unteren Zwischenpunkte gefunden.

Verbindet man nun die sämmtlichen Projectionspunkte A F D G B J E durch eine krumme Linie, so hat man die gesuchte Projection der Kreisfläche im Grundriß.

Es ist von selbst einleuchtend, daß, jemehr Punkte des Umkreises man in ihrer Projection sucht, um so genauer findet man die Projection der ganzen Kreislinie.

NB. Es sind nicht immer alle Hülfslinien genannt worden, welche gezogen werden müssen und die man schon in der Zeichnung von selbst sieht, um den Text dadurch nicht ohne Noth zu weitläufig und mithin schwerer verständlich zu machen.

Anmerkung 4. (Taf. 1 Fig. 29.) Es sei derselbe Kreis wie in Anmerk. 3 gegeben. Der Kreis neige sich unter gleichem Winkel wie dort gegen die wagerechte Ebene, sein Grundriß stehe aber gleichzeitig unter einem gegebenen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene geneigt; man soll Grundriß und Aufriß finden.

Zuvörderst vergegenwärtige man sich alles das genau, was in der vorigen Anmerk. 3 über das Auffinden des Grund- und Aufrisses gesagt wurde.

Man denke sich nun den Grundriß der vorigen Figur (28) in Fig. 29 gezeichnet, aber so, daß seine Achse A B mit der Grundlinie a b der senkrechten Ebene den vorgeschriebenen Winkel mache, so ist der gesuchte Grundriß gefunden. (Wären andere Winkel für die Neigungen der Kreisfläche gegeben als in der vorigen Fig. 28, so bliebe nichts weiter übrig, als den Grundriß in gleicher Weise wie in Anmerk. 3 zu suchen, aber für die schräg geneigten Durchmesser A B und E D.)

Den Aufriß findet man, wie folgt.

Man bestimme erst aus dem gegebenen Durchmesser und der gegebenen Neigung desselben die Abstände der parallelen Linien N D″, X F″, O A″, W H″. Nun ziehe man vom Grundrisse aus aufrecht die Normalen D D″, C C″, E E″, A A″, B B″, so hat man die Projectionen der Durchmesser und des Mittelpunktes gefunden.

Auf gleiche Weise bestimmt man die Punkte F″ G″ J″ H″, und der gesuchte Aufriß ist gefunden.

Anmerkung 5. Sollte eine elliptische Fläche oder ein regelmäßiges Vieleck, ein Achteck, Sechseck ꝛc. gezeichnet werden, so würde in allen Fällen ganz in ähnlicher Weise Grund- und Aufriß dafür gefunden werden, wie wir es in dem vorliegenden §. 14 und den zugehörigen vier Anmerkungen gesehen haben.

Zur Uebung kann man sich diese Aufgaben selbst stellen und lösen. Ob man falsch gezeichnet hat, wird man sogleich sehen, wenn man die gesuchten Punkte nicht auffinden kann.

§. 15.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Würfels (Cubus) im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden, wenn der Würfel in der wagerechten Ebene steht und seine senkrechte Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist. (Tafel 2 Fig. 30.)

Auflösung. Wenn der in der wagerechten Ebene stehende Würfel im Grundriß gezeichnet werden soll, so giebt er das Quadrat A B C D, denn die obere Fläche fällt mit der unteren zusammen, weil sie parallel mit derselben ist. Eben so fallen die vier Kanten des Würfels in ihrer Projection in den vier Punkten

A B C D zusammen und Quadrat A B C D ist der gesuchte Grundriß des Cubus. (§. 5.)

Den Aufriß findet man, wenn man die Seiten A C und B D des Grundrisses senkrecht bis über die Grundlinie a b der senkrechten Ebene verlängert, A′ C′ und B′ D′ gleich A C und B D macht und C′ D′ zieht, so ist das Quadrat A′ C′ D′ B′ der gesuchte Aufriß. (§. 5 Anmerk. 1.)

Hier fallen ebenfalls die beiden senkrechten Ebenen zusammen in das Quadrat A′ B′ C′ D′ und die vier auf die senkrechte Ebene normalen Kanten des Würfels fallen in den Punkten A′ C′ D′ B′ zusammen.

Anmerkung 1. Sollte man von dem Würfel in Figur 30 einen senkrechten Durchschnitt zeichnen (§. 7), so verfahre man wie folgt.

Es sei (Fig. 30) die punktirte Linie E F im Grundriß die Richtung einer senkrechten Ebene, welche durch den Würfel liegt.

Trägt man die Länge der Linie E F in Fig. 31 auf der Linie a b von A nach B, so ist A B = E F. Da nun aber E F auch = A′ B′ ist, so ist A B die Grundlinie des Würfeldurchschnittes. Zieht man nun Fig. 31 die Senkrechten A C und B D und macht A C = A′ C′ und B D = B′ D′, so hat man die Kanten des Durchschnittes, verbindet man dann noch C mit D, so ist A B C D Fig. 31 die gesuchte Durchschnittsebene.

Anmerkung 2. Es sei der Würfel unter einem beliebigen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt, man soll Grund- und Aufriß davon zeichnen, wenn der geneigte Würfel mit seiner vorderen Fläche parallel mit der senkrechten Ebene steht. (Tafel 2 Fig. 32.)

Das Quadrat A B C D wird der verlangte Aufriß sein, wenn man die Linie A B desselben unter dem vorgeschriebenen Winkel gegen die Linie a b geneigt hat.

Um den Grundriß zu finden, ziehe man von den Punkten A B C D des Aufrisses normale Linien abwärts und ziehe dann die wagerechte Linie B′ C′ D′, nun mache man B′ E′, C′ F′ und D′ G′ gleich einer Seite des Würfels, so ist der Grundriß gefunden. Die Kante A′ H′ wird von der Fläche F′ G′ D′ C′ verdeckt und nicht sichtbar sein; eben so werden die unterhalb liegenden Flächen des Würfels, welche im Aufriß durch die Linien B A und A D dargestellt werden, im Grundriß nicht zu stehen kommen.

Anmerkung 3. Es sei (Tafel 2 Fig. 33) der Würfel schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt, aber er stehe mit der senkrechten Ebene nicht parallel.

Fig. 33 sei auf der Grundlinie a b der senkrechten Ebene der Durchschnitt A B C D des Würfels unter dem vorgeschriebenen Neigungswinkel gezeichnet.

Um den Aufriß zu bekommen, ziehe man die beliebig langen Wagerechten C D′ C′ und B E′ B′, ferner trage man auf die Linie a b die Linie A′ F′ so lang auf, als eine Seite des Würfels ist, so hat man die Grundlinie des Aufrisses gefunden, nun ziehe man die Senkrechten A′ B′ C′ und F′ E′ D′, verbinde C′ wagerecht mit D′ und B′ wagerecht mit E′, so ist die Figur A′ B′ C′ D′ E′ F′ der gesuchte Aufriß.

Will man nun den Grundriß finden, so verfährt man wie folgt.

Von den Kanten des Durchschnittes B C D ziehe man die Senkrechten B E, C F, D G. Nun verlängere man die Seitenlinien des Aufrisses nach unten willkürlich lang und ziehe die

Wagerechte C″ D″, alsdann mache man C″ B″ und D″ E″ gleich lang mit E F und B″ A″ und E″ F″ gleich lang mit F G, verbinde dann B″ mit E″ und A″ mit F″, so ist die Figur A″ B″ C″ D″ E″ F″ der gesuchte Grundriß.

Anmerkung 4. Wäre der gegebene Körper anstatt eines Würfels, ein Prisma, mit quadratischer Ober- und Unterfläche, so würde die Aufsuchung seiner Grund- und Aufrisse so wie seines Durchschnittes ganz eben so erfolgen, wie wir es eben §. 15 für den Würfel gezeigt haben.

Zur Uebung kann man sich anstatt eines Würfels nun einen prismatischen Körper mit quadratischer Grundfläche in allen Lagen, wie vorher den Würfel zeichnen.

§. 16.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Prisma gefunden werden, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist (Tafel 2 Fig. 34), wenn die senkrechte Achse des Prisma parallel mit der senkrechten Ebene und das Prisma in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Der Grundriß wird durch das regelmäßige Achteck A B C D E F G H dargestellt werden, denn die Projection der oberen achteckigen Fläche fällt mit der Projection der Grundfläche zusammen. (§. 5.) Eben so fallen die sämmtlichen senkrechten Kanten des Prisma mit den Punkten A B C ... zusammen. Es ist also das Achteck A B C D E F G H der gesuchte Grundriß.

Will man nun den Aufriß zeichnen, so ziehe man von den Eckpunkten des Grundrisses aufwärts beliebig lange Linien, so wird H′ C′ dem unteren Durchmesser des Achtecks gleich sein. Nimmt man ferner in den Zirkel das gegebene Maß der Höhe des Prisma und setzt dieses Maß von H′ nach J′, von A′ nach K′, von B′ nach L′, von C′ nach M′ und zieht die Linie J′ K′ L′ M′, so hat man den Aufriß gefunden.

Die Seitenflächen des Prisma, wovon H G, G F, F E, E D und D C im Grundriß die Projectionen sind, werden nicht sichtbar erscheinen, indem sie, wie man sich leicht durch den Augenschein überzeugen kann, im vorliegenden Falle durch die vorderen sichtbaren Flächen gedeckt werden.

Eben so sieht man von der oberen und unteren achteckigen Fläche nichts, als die geraden Linien im Aufrisse H′ A′ B′ C′ und J′ K′ L′ M′. (§. 4 Anmerk. 5.)

Anmerkung 1. (Tafel 2 Fig. 35.) Wenn das achteckige Prisma mit der wagerechten Ebene einen bestimmten Winkel macht, die Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene liegt, so findet man den Aufriß folgendermaßen.

Man zeichne den Aufriß des Prisma aus Fig. 34 (wo derselbe aufrecht steht) in der geneigten Lage auf, wie er Fig. 35 unter dem angenommenen Winkel vorgestellt ist, so hat man den verlangten Aufriß.

Die Projectionspunkte A′ H′ G′ F′ des Aufrisses stimmen nun mit den Projectionspunkten des Grundrisses A H G F Fig. 34 überein. Die Punkte B′ C′ D′ E′ des Aufrisses fallen in ihrer Projection mit den Punkten A′ H′ G′ F′ zusammen und sind nicht sichtbar.

Zieht man im Grundriß die Parallelen H P, F K, E L, C Q so weit von einander wie sie im Aufrisse von einander abstehen, zieht dann von den Punkten F′ G′ H′ A′, O′ M′ Q′ K′ normale Linien nach dem Grundrisse und bemerkt die mit den Aufrißkanten übereinstimmenden Durchschnittspunkte A B D C E F H G ꝛc., so hat man, wenn man diese mit geraden Linien verbindet, den Grundriß gefunden.

Anmerkung 2. Es neige sich das Prisma unter demselben Winkel wie in Anmerk. 1 gegen die wagerechte Ebene, stehe aber mit der Projection seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene wie Tafel 2 Fig. 36, so findet man den Grundriß, wenn man den in Fig. 35 bereits gefundenen Grundriß in diejenige Lage zeichnet, wie er in Fig. 36 angegeben ist.

Zieht man nun aus den Aufrißkanten Fig. 35 die parallelen Hülfslinien O N, M J, O P, L K ꝛc. nach Fig. 36 herüber und eben so aus den Kanten des Grundrisses Fig. 36 die normalen Hülfslinien hinauf in den Aufriß, bemerkt die Durchschnittspunkte und verbindet diese im Aufriß durch die Linien O′ N′, N′ J′, J′ P′, P′ K′ ꝛc. ꝛc., so erhält man den Aufriß des Prisma in der vorgeschriebenen Lage.

Zur Bequemlichkeit sind im Grundriß und Aufriß gleiche Buchstaben zur Bezeichnung der Kantenpunkte gewählt worden, wodurch das Aufsuchen bedeutend erleichtert wird, besonders wenn man auf die einander entgegen stehenden Buchstaben Rücksicht nimmt, so steht z. B. dem A in Grund- und Aufriß das K entgegen, dem B das L (als Anfang und Ende der Seitenkanten des Prisma) dem D das Q ꝛc. ꝛc.

Zur Uebung kann man auch den Grundriß in einer schrägen Lage gezeichnet annehmen und dann den zugehörigen Aufriß suchen.

§. 17.

Aufgabe. Man soll einen Cylinder im Grund- und Aufriß zeichnen, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. So wie für diese Stellung der Grundriß eines Cubus ein Quadrat war, so wird (Tafel 2 Fig. 37) der Grundriß des Cylinders ein Kreis sein. Denn wenn man sich einen Cylinder in der wagerechten Ebene senkrecht stehend denkt, so werden alle in seinem Mantel gedachten senkrechten Linien in ihren Projectionen in einzelnen Punkten zusammenfallen, und wenn man diese Projectionspunkte dann durch eine krumme Linie verbindet, so wird ein Kreis entstehen, welcher der verlangte Grundriß ist. (§. 3 u. §. 4.)

Um den Aufriß zu finden, ziehe man die Linien A A′ F′, E C D E′ D, B B′ G′ willkürlich lang, setze von A′ nach F′, von E′ nach D′ und von B′ nach G′ die gegebene Höhe des Cylinders, so ist die Figur A′ F′ D′ G′ B′ E′ der gesuchte Aufriß, denn die Normalen, welche man sich im Mantel des Cylinders als Hülfslinien denkt, erscheinen in der Aufrißprojection alle gleich lang und folglich erscheint die Hälfte des Mantels vom Cylinder hier im Aufriß als Rechteck, welches die Höhe des Cylinders zur Höhe und den Durchmesser des Cylinders zur Breite hat.

Anmerkung 1. Wäre (Tafel 2 Fig. 38) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, seine Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Den Aufriß findet man, wenn der Aufriß des Cylinders,

wie er sich in Figur 37 dargestellt hatte, in Figur 38 eben so gezeichnet wird, nur mit dem Unterschiede, daß man ihn unter dem angenommenen Winkel gegen die Linie a b neigt.

Den Grundriß findet man, wenn man von dem Aufrisse aus den bezeichneten Punkten A B . . . die nöthigen Normalen abwärts zieht und die Achse des Cylinders im Grundrisse bestimmt. Macht man nun den Cylinder im Grundrisse eben so breit wie er im Aufrisse war und sucht mit Hülfe von §. 14 die obere und untere Kreisfläche, so ist der Grundriß für den geforderten Fall dargestellt.

Anmerkung 2. Es stünde (Tafel 2 Fig. 39) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, wie vorhin, er sei aber auch gegen die senkrechte Ebene geneigt, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Zuvörderst zeichne man sich den gegebenen Cylinder A B F G unter der gegebenen Neigung auf die Linie a b. Dann ziehe man die wagerechten Hülfslinien F F′, D H′ D′ J′ ꝛc. parallel mit a b, so wird der zu suchende Aufriß zwischen der Linie a b und F F′ liegen. Nun bestimme man zuerst die Achse des Aufrisses B′ . . F′ und ziehe damit parallel die Senkrechten K′ H′ und J′ L′, nachdem man D′ J′, D′ H′ gleich den Radien der Kreisflächen gemacht hat, bestimme alsdann die einzelnen Projectionspunkte der Kreise und verbinde sie mit einer krummen Linie, so ist der Aufriß dargestellt.

Je mehr Punkte im Umkreise man (§. 14) bestimmt, um so genauer wird die Figur.

Um nun den Grundriß zu finden, ziehe man in dem Hülfsaufrisse A B F G die Normalen A Q, C P, F M, D N, G O, ferner ziehe man von dem bereits gefundenen Aufrisse die Normalen H′ H″, G′ G″, J′ J″ willkürlich lang.

Nun bestimme man den Mittelpunkt C″ willkürlich, alsdann suche man die Projection des zugehörigen Kreises, darin ist B″ C″ = B P, C″ A″ = P Q, C″ K″ = C′ K′ und C″ L″ = C′ L″.

Ferner suche man die Projection der Achse des Grundrisses C″ D″ = P N. Hierdurch ist auch der Mittelpunkt D″ des zugehörigen Kreises bestimmt. Zu diesem Mittelpunkte D″ suche man wie vorhin den zugehörigen Kreis, so ist darin F″ D″ = M N, D″ G″ = N O, D″ H″ = D′ H und D″ J″ = D′ J′.

Je mehr Punkte dieser Kreise man nach §. 14 sucht, um so genauer wird die Figur, wenn man die gefundenen einzelnen Projectionspunkte der Kreise durch krumme Linien verbindet.

§. 18.

Aufgabe. Es soll der Grund- und Aufriß eines Kegels gefunden werden, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Höhenachse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. Der Grundriß desselben (Tafel 2 Fig. 40) wird ein Kreis sein, eben so groß, wie der Kreis, welcher die Grundfläche des Kegels bildet. (§. 5 u. §. 14.)

Den Aufriß findet man, wenn man von C aus die Normale C C′ D′ willkürlich lang zieht und von C′ nach D′ die gegebene Höhe des Kegels mit dem Zirkel aufträgt. Dann zieht man die Linien A′ D′ und D′ B′, so ist A′ D′ B′ der Kegel im Aufriß; denn die Linie A′ B′ ist die Projection der Grundfläche und das Dreieck A′ D′ B′ ist die Projection der Hälfte des Kegelmantels.

Anmerkung 1. Soll man mehr Punkte des Mantels im Grund- und Aufrisse finden, so bestimme man die Punkte, welche man finden will; z. B. man will den Punkt E′ zwischen A′ und D′ suchen.

Der Punkt E′ aber liegt in der Mitte zwischen A′ und D′, folglich liegt der Punkt E′ im Grundrisse in der Mitte des Radius A C, bei E, denn der Radius A C des Grundrisses ist zugleich die Projection der schrägen Linie A′ D′ im Aufrisse.

Eben so würde man die Projection des Punktes F′ im Aufrisse bei F im Grundrisse finden.

Sollte man den Punkt J des Grundrisses im Aufrisse bestimmen, so ziehe man C J G, trage die Projection von G nach G′ und ziehe G′ D′; trägt man nun die Projection von dem Punkte J des Grundrisses hinauf nach der Linie G′ D′ des Aufrisses, so findet man den Punkt J′ (wo sich die Projectionslinien schneiden), als den gesuchten Projectionspunkt von J.

Eben so würde man den Punkt K des Grundrisses bei K′ im Aufrisse finden.

Wäre umgekehrt der Punkt J′ im Aufrisse gegeben und man sollte aus ihm den Punkt J des Grundrisses bestimmen, so ziehe man erst die wagerechte Hülfslinie J′ E′, ferner die Normale E′ E bis zum Durchmesser des Kreises im Grundrisse (weil A′ D′ die Projection von A C ist).

Beschreibt man nun im Grundrisse mit dem Radius C E einen Kreis, so ist dieser die Projection der wagerechten Linie E′ F′ des Aufrisses und alle Punkte, welche in der Linie E′ F′ des Aufrisses liegen, werden in ihrer Projection in den Kreis E J K F im Grundrisse fallen; eben so wie alle Punkte der Linie A′ G′ C′ H′ B″ in dem Kreise A G L H B des Grundrisses liegen.

Will man nun den Punkt J′ des Aufrisses im Grundrisse bestimmen, so zieht man von J′ abwärts die Normale J′ J, alsdann ist J der gesuchte Punkt.

Eben so würde man aus dem Punkte K′ des Aufrisses den Punkt K des Grundrisses finden.

Man sieht hieraus, daß sich auf ähnliche Weise jeder beliebige Punkt des Grundrisses im Aufrisse und umgekehrt finden läßt.

Anmerkung 2. Läge der Kegel, wie in Tafel 2 Fig. 41, mit einer Seite in der wagerechten Ebene, so würde sein Aufriß das Dreieck D′ A′ B′ sein und C′ die Projection des Kreisdurchmessers, so wie auch dessen Mittelpunkt, und die Linie A′ C′ B′ würde die Projection der Kegelgrundfläche (des Kreises) darstellen.

Den Grundriß würde man finden, wenn man zuvörderst nach §. 14 Anmerk. 3 die Kreisfläche suchte. Sie bestimmt sich zunächst durch die Normalen B′ B, C′ C, A′ A und daraus, daß man C E = C′ B′ und C F = C′ A′ macht.

Zieht man dann von C im Grundrisse die Wagerechte C D und von D′ die Normale D′ D, so ist C D im Grundrisse die Achse des Kegels und wenn man noch D F und D E im Grundrisse zieht, hat man den ganzen verlangten Grundriß des Kegels gefunden.

Zur Uebung zeichne man sich noch den Kegel in mehreren andern Lagen, z. B. im Grundrisse auch schräg gegen die senkrechte Ebene gestellt, oder in bestimmten Lagen, über oder unter der wagerechten Ebene, oder hinter oder vor der senkrechten Ebene.

§. 19.

Aufgabe. Es soll eine Kugel im Grund- und Aufriß gezeichnet werden. (Tafel 2 Fig. 42.)

Auflösung. Die sämmtlichen Projectionspunkte einer Kugel, welche man sich vom Mantel derselben auf eine wagerechte Ebene gezogen denkt, werden einen Kreis darstellen, dessen Durchmesser gleich dem gegebenen Durchmesser der Kugel war.

Es ist also in Fig. 42 der Kreis mit dem Durchmesser A B die Projection der Kugel im Grundriß.

Eben so wird der Aufriß einer Kugel wieder ein Kreis sein, dessen Durchmesser dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich ist und es wird der Kreis mit dem Durchmesser A′ B der Aufriß der Kugel sein.

Anmerkung 1. Der Grundriß einer Halbkugel (Tafel 2 Fig. 43) ist aus obigen Gründen in der wagerechten Ebene wieder ein Kreis, wenn der Durchmesser der Kugel parallel mit der wagerechten Ebene liegt und der Aufriß der Halbkugel ist in diesem Falle ein halber Kreis mit dem Durchmesser der gegebenen Kugel.

Anmerkung 2. Will man bestimmte Punkte auf einer Halbkugel-Oberfläche finden, so verfährt man folgendermaßen.

Es sei (Tafel 2 Fig. 44) A′ B′ D′ der Aufriß, A C B der Durchmesser des Grundrißkreises.

Im Grundrisse sei der Punkt E gegeben, man soll seine Lage im Aufrisse bestimmen.

Man ziehe die Linie E C′ und mit diesem Radius beschreibe man den Kreisbogen E F.

Nun ziehe man von F im Grundrisse die Normale F F′, bis sie den Umkreis des Aufrisses in F′ schneidet, so ist F′ der Projectionspunkt von F.

Zieht man nun von F′ nach G′ eine Parallele mit A′ B′, so ist F′ G′ die Projection eines Kreises, welcher parallel mit der Grundfläche der Halbkugel herumläuft, und ist dieser Kreis zugleich die Projection eines Kreises, der im Grundrisse durch E F H G gelegt gedacht wird. In diesem Kreise liegt der gegebene Punkt E des Grundrisses, es muß also seine Projection im Aufrisse auch in der Projection des Kreises E F H G liegen. Die Projection dieses Kreises ist aber im Aufrisse die Linie F′ G′, folglich muß der Punkt E des Grundrisses in der Linie F′ G′ des Aufrisses liegen. Zieht man nun von E die Normale E bis E′, so ist E′ der gefundene Projectionspunkt (von E) des Grundrisses.

Es sei umgekehrt ein willkürlicher Punkt im Aufrisse gegeben, man soll seine Projection im Grundrisse finden. Es sei J′ dieser gegebene Punkt im Aufrisse.

Man ziehe durch J′ die Linie J′ K′ L′ parallel mit A′ B′, so ist diese Linie wieder die Projection eines Kreises, welcher um die Halbkugel herum parallel mit der Grundfläche der Halbkugel liegt. Nun ziehe man im Grundrisse mit dem Radius C K den Kreis K L M, so ist dieser Kreis die Projection der Linie L′ K′ des Aufrisses, in welcher der Punkt J′ liegt.

Fällt man nun die Normale J′ bis J, so ist der Punkt J des Grundrisses die verlangte Projection des willkürlich gegebenen Punktes J′ im Aufrisse.

Es leuchtet ein, daß man auf diese Weise jeden beliebigen Punkt, sowohl im Aufrisse als Grundrisse, geben kann, und auf eben angegebene Weise seine Projection zu finden sein wird. Was nun für die Halbkugel gegolten, gilt natürlich auch für eine, aus zwei Halbkugeln zusammengesetzte ganze Kugel ganz in derselben Weise.

§. 20.

Aufgabe. Eine Schraubenlinie zu finden, welche um einen Cylinder gewunden ist.

Auflösung. Es sei (Taf. 2 Fig. 45) das Rechteck D′ A′ B′ E′ die Projection des senkrecht stehenden Cylinders im Aufriß (§. 17). Der Kreis A N B M sei die Projection desselben Cylinders im Grundriß. Die Neigung des Schraubenganges sei gleich dem Winkel F′ A′ B′, man soll die Linie selbst finden.

Der Punkt A des Grundrisses liegt in seiner Projection im Punkte A′ des Aufrisses.

Der Punkt M des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen A und B, also auch in der Mitte der Höhe zwischen B′ und F′ bei O.

Der Punkt B des Grundrisses wird auch zugleich der Projectionspunkt für den Höhenpunkt F der ersten halben Windung des Schraubenganges sein, und die krumme Linie A′ O′ L′ wird die erste halbe Windung des Schraubenganges zeigen.

Der Punkt N des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen B und A (auf der Rückseite des Cylinders), also in der Mitte der senkrechten Höhe zwischen F′ und J′ des Aufrisses bei P′, und die krumme punktirte Linie F′ P′ J′ wird die andere Hälfte des ersten Schraubenganges auf der Rückseite des Cylinders zeigen. Um aber die Schraubenlinie mit mehr Gewißheit zu bestimmen, muß man noch Zwischenpunkte suchen, und je mehr man deren annimmt, um so genauer wird die Schraubenlinie gezeichnet werden können.

Zieht man im Grundrisse die Linien Q S und T R, so hat man vier Hülfspunkte.

Es liegen aber diese vier Punkte so, daß, wenn man auch die Linien T Q und S R zieht, der vordere Punkt Q zugleich die Projection des hinteren Punktes T ist. Eben so ist R die Projection von S.

Nun ziehe man die Linien Q Q′ und R R′ durch die ganze Höhe des Cylinders.

Es liegt aber Q im Grundrisse in der Mitte zwischen A und M, folglich wird Q im Aufrisse in der Mitte der Höhe zwischen dem senkrechten Abstande von A′ O′ des Aufrisses liegen.

Eben so wird R′ zwischen F′ und P′ ꝛc. liegen und man wird auf gleiche Weise den Schraubengang in beliebiger Höhe bestimmen können.

Nimmt man zwischen den Punkten des Grundrisses A Q M.... noch Zwischenpunkte an und verfährt in gleicher Weise, so wird man die Schraubenlinie noch genauer finden. Dies gilt für jede Höhe eines ganzen Umganges der Schraubenlinie, so daß, wenn man z. B. nur den Gang A′ Q′ O′ F′ R P′ J′ gefunden hat, man nach diesem alle übrigen höher liegenden leicht finden kann.

§. 21.

Aufgabe. Es soll eine Schneckenlinie (Spirale) gezeichnet werden. (Taf. 2 Fig. 46.)

Auflösung. Es sei im Aufrisse die Höhe des ersten halben Ganges der Spirale durch die Linie E′ F′ bezeichnet, so ist der Punkt J im Grundrisse die Projection des Punktes J′ im Aufrisse, denn der Punkt J liegt in der Mitte zwischen A und B′, und J′ wird in der Hälfte der Höhe zwischen A′ und E′ und C′ und K′ liegen. Es wird also der erste halbe Gang der Spirale, die krumme Linie A′ J′ F′ des Aufrisses sein. Um diese krumme Linie noch genauer zu finden, braucht man nur mehr Punkte anzunehmen, durch welche die krumme Linie gehen muß.

Man ziehe C L und C M im Grundriß und L′ D′, M′ D′ im Aufriß. Nun ziehe man im Aufriß O′ P′ in der Mitte der Höhe zwischen N′ J′ und A′ C′, ferner ziehe man L′ D′, so ist L″ der Projectionspunkt von L und eben so M″ von M.

Auf gleiche Weise findet man die übrigen Theile der Windungen, welche man zur Uebung aufsuchen kann.

Ein für allemal wird hierbei bemerkt: je größer man den Maßstab der Uebungsfiguren auf dem Papiere nimmt, um so deutlicher wird die Zeichnung, um so mehr Bestimmungspunkte ist man im Stande, mit Deutlichkeit zu finden, und um so größer und schneller wird man die Ueberzeugung aller derjenigen Lehren gewinnen, welche hier gegeben wurden.

§. 22.

Aufgabe. Den Aufriß und Grundriß eines körperlichen **Ringes** zu zeichnen. (Taf. 2 Fig. 47.)

Auflösung. Steht der Ring senkrecht in der wagerechten Ebene und parallel mit der senkrechten Ebene, so ist sein Grundriß durch die Figur A B ausgedrückt.

Im Aufrisse bildet er zwei concentrische Kreise. Die Figur E ist die Ansicht des Ringes, wenn er mit seiner wagerechten Achse normal auf der senkrechten Ebene steht.

Die Figur F zeigt den senkrechten Durchschnitt desselben Ringes.

Die Figur G im Grundrisse zeigt den wagerecht liegenden Ring in der Mitte durchschnitten.

Zur Uebung zeichne man an verschiedenen Stellen durchgelegte Kreisebenen, welche durch punktirte Linien in der Figur angegeben sind; nach §. 14 wird sich dies sehr leicht bestimmen lassen.

Zur weiteren Uebung kann man sich noch den Ring unter schräger Stellung, entweder gegen die wagerechte oder gegen die senkrechte Ebene oder gegen beide zugleich, denken, und wieder die Projectionen der verschiedenen Kreisebenen suchen, welche entstehen, wenn man sich in der Verlängerung der Kreisradien den Ring an beliebigen Stellen durchschnitten denkt.

§. 23.

Die am meisten vorkommenden Aufwickelungen der Umkreise verschiedener Flächen.

Aufgabe. Es soll die Aufwickelung der Umrißlinie einer gegebenen Fläche gezeichnet werden.

Auflösung. Unter Aufwickelung der Umrißlinie irgend einer beliebigen Fläche versteht man diejenige gerade Linie die man erhält, wenn man das Maß des Umrisses (Umfanges) der gegebenen Fläche auf eine gerade Linie aufträgt.

Anmerkung 1. Wollte man hiernach die Aufwickelung eines Dreiecks zeichnen, so trägt man die einzelnen Maße seiner drei Seiten unmittelbar neben einander auf eine gerade Linie auf, so daß die nunmehr entstehende gerade Linie so groß gemacht wird, als die Summe aller drei Seiten des Dreiecks zusammengenommen.

Anmerkung 2. Auf dieselbe Weise findet man die Aufwickelung eines Quadrats, wenn man die Länge einer Seite desselben viermal neben einander auf eine gerade Linie trägt.

Anmerkung 3. Die Aufwickelung jedes regelmäßigen Vielecks findet man demnach, wenn man z. B. bei einem Achteck eine Seite achtmal neben einander auf eine gerade Linie setzt ꝛc.

Anmerkung 4. Die Aufwickelung eines Kreises findet man in der Praxis am leichtesten, wenn man denselben als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, oder, was dasselbe ist, wenn man ihn entweder in der Natur mit einem möglichst genau umgelegten Faden abmißt und die gefundene Länge des Fadens dann auf eine gerade Linie abträgt; oder wenn man einen auf dem Papiere gezeichneten Kreis mit dem Zirkel in sehr kleine gleiche Theile zerlegt und die Summe dieser gleichen Theile auf eine gerade Linie trägt.

Soll aber die Abwickelung mathematische Genauigkeit haben, so ist es unter allen Umständen besser, die Längen der Abwickelung durch Rechnung zu bestimmen.

Bei geradlinigen Figuren hat dies gar keine Schwierigkeit, man addirt die in Fußen und Zollen gemessenen Seiten zusammen und setzt die so gefundene Summe der Maße auf eine gerade Linie. Auf dem Papiere berechnet man ebenfalls zuvor die Summe der Maße, nimmt diese Summe alsdann nach dem verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel ab und trägt sie auf eine gerade Linie.

Bei krummlinigen Figuren bestimmt nur die Rechnung genau die Abwickelung gegebener Figuren. So erhält man die Kreislinie nach mathematischer Bestimmung, wenn man erst den Halbmesser (Radius) doppelt nimmt und dann mit $\frac{3}{1400} = 3{,}14$ multiplicirt. Es sei der Radius 4 Fuß, so ist der Umkreis (oder die Abwickelung) $4 \times 2 \times 3{,}14 = 25{,}12$ Fuß $= 25\frac{12}{100} =$ circa 25 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll.

Anmerkung 5. Sollte man die Abwickelung einer Ellipse finden, so verfährt man ganz ähnlich wie bei dem Kreise; man legt nämlich für die Praxis einen Faden möglichst genau um eine gegebene Ellipse, was man am leichtesten dadurch erreicht, daß man kleine Nägel in den Umkreis sehr nahe an einander schlägt und darum den Faden zieht, womit man die Länge des Umkreises messen will.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß auf diese Art zwar ein Vieleck entsteht, welches sich aber der krummen Linie um so mehr nähert, je näher man die Nägel an einander geschlagen hat.

Ferner muß man sich hüten den Faden zu straff anzuziehen, weil er sich sonst bei dem Abnehmen und Uebertragen wieder zusammenzieht und man so eine zu kurze Abwickelung erhalten würde.

Sicherer ist hier wieder die Rechnung.

Man findet aber den Umfang einer Ellipse, wenn man die Quadratwurzel der halben Summe der Quadrate beider Achsen mit 3,14.... multiplizirt.

Es sei die große Achse 9 Fuß lang, die kleine 4 Fuß, so ist die Summe der Quadrate beider Achsen $81 + 16 = 97$; die halbe Summe davon ist $48\frac{1}{2}$; die Wurzel davon liegt zwischen 6,96.... und 6,97..... Nehmen wir 6,96.... und multipliciren dies mit 3,14...., so steht $6{,}96.... \times 3{,}14.... = 21{,}8544.... = 21\frac{1}{12}$ Fuß, welche Art zu rechnen für alle practische Fälle hinlänglich genau ist.

Dieses gefundene Maß trägt man nun entweder in wirklichem Fußmaße oder nach dem verjüngten Maßstabe auf eine gerade Linie, in der Natur oder auf dem Papiere gegeben, auf, so ist die gesuchte Aufwickelung der gegebenen Ellipse gefunden.

Anmerkung 6. Sollte man Abwickelungen von Kettenlinien, Parabeln ꝛc. zu suchen haben, so thut man für die Praxis wohl am besten, daß man die gegebenen Linien entweder in natürlicher Größe construirt und sie mit dem Faden mißt (wie bei der Ellipse) oder auf dem Papiere mit dem Zirkel die Länge der Abwickelung bestimmt, da Berechnungen dieser Linien für den Anfänger schon ziemlich schwierig sind.

Anmerkung 7. Wollte man die Abwickelung einer Schraubenlinie finden, so betrachte man (Taf. 2 Fig. 45) den Aufriß und Grundriß des Cylinders und der darauf gezeichneten Schraubenlinie.

Dieselbe folgt immer demselben Gesetze, wäre man demnach nur im Stande, die Länge eines bestimmten Theiles derselben zu ermitteln, so könnte man daraus die Länge der ganzen Linie finden.

Man suchte z. B. die Länge der Linie A′ O′ im Aufrisse, so findet man sie auf folgende Weise.

Die Projection der Linie A′ O′ des Aufrisses ist im Grundrisse der Quadrant A Q M. Nimmt man die Aufwickelung dieser Linie als Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, ferner C′ O′ als Länge der anderen Seite, welche rechtwinklig auf C′ O′ steht, und verbindet dann die Endpunkte O′ und A durch eine gerade Linie, so ist diese die Hypothenuse des Dreiecks und zugleich die gesuchte Aufwickelung von A′ O′ des Aufrisses. Es reicht aber die Länge dieser Linie gerade über $\frac{1}{4}$ des einen Schraubenumganges, nimmt man nun die Summe aller Viertel zusammen und trägt sie als gerade Linie auf, so hat man die Abwickelung der sämmtlichen Schraubengänge.

§. 24.

Verwandelung einiger bei Bauten oft vorkommenden Linien.

Aufgabe. Ein halber Kreis soll in eine krumme Linie verwandelt werden, welche länger als der halbe Kreis ist, deren Höhenpunkte aber mit einander übereinstimmen. (Taf. 2 Fig. 48.)

Auflösung. Es sei der Halbkreis A D B gegeben, man soll über der ebenfalls gegebenen Linie A′ B′, welche länger ist, als der Durchmesser des Halbkreises, eine krumme Linie A′ H′....B′ bilden, deren Höhenpunkte überall mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Diese Forderung kommt bei Anfertigung der sogenannten Lehrbogen der Gewölbe sehr oft vor. Man theile den Durchmesser des Halbkreises A B in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in sechs), alsdann ziehe man aus diesen Theilungspunkten die Normalen G H, E F, C D, J K und L M, bis sie den Umkreis berühren. Nun theile man die gegebene Linie A′ B′ in eben so viele gleiche Theile, als vorher den Halbkreis-Durchmesser (hier in sechs). Auf diesen Theilpunkten errichte man beliebig lang die Normalen G′ H′, E′ F′, C′ D′, J K′, L′ M′. Nun fasse man im Halbkreise mit dem Zirkel die Linie G H und trage sie auf der Linie A′ B′ von G′ nach H′. Eben so trage man E F von E′ nach F′, C D von C′ nach D′ u. s. w., so erhält man über der Linie A′ B′ die Höhenpunkte H′, F′, D′, K′, M′, welche mit den gleichnamigen Punkten des Halbkreises H, F, D, K, M gleich hoch liegen, weil man die Linien gleich gemacht hat. Verbindet man nun die Punkte A′, H′, F′,.... durch eine krumme Linie, so ist diese die gesuchte, welche mit dem Halbkreise gleiche Höhenpunkte hat.

Anmerkung 1. Es sei bei derselben Figur (Taf. 2 Fig. 48) eine Linie A″ B″ gegeben, welche kleiner als der Durchmesser des gegebenen Halbkreises ist, man soll über A″ B″ ebenfalls eine krumme Linie (einen sogenannten überhöhten Bogen) zeichnen, deren Höhenpunkte auch mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Nachdem man den Halbkreisdurchmesser wie vorhin getheilt und die Normalen G, H, E, F.... gezogen hat, theile man die gegebene Linie A″ B″ in eben so viele gleiche Theile wie den Halbkreisdurchmesser A B, ferner errichte man auf A″ B″ in den angenommenen Theilpunkten die Normalen G″ H″.... und mache sie gleich lang wie die Normalen des Halbkreises G H...., ziehe dann durch diese gefundenen Punkte die krumme Linie A″ H″ D″ B″, so ist diese die gesuchte krumme Linie, deren Höhenpunkte mit denen des gegebenen Halbkreises zusammenfallen.

Anmerkung 2. Aus den so eben im Vorigen gegebenen Beispielen ersieht man leicht Folgendes. Eben so gut, wie man aus dem Halbkreise eine längere und eine kürzere Linie mit gleichen Höhenpunkten bilden konnte, eben so gut kann man aus der gegebenen längeren Linie A′ H′.... auch einen Halbkreis bilden, welcher gleiche Höhenpunkte mit dieser gegebenen Linie gemeinschaftlich hat.

Setzt man nämlich die höchste Linie C′ D′ auf die Mitte der vorläufig willkürlich lang gezogenen Linie A B und macht C D = C′ D′, so ist C D ein Radius des Halbkreises; macht man nun A C = C D und C B auch = C D, so ist die Linie A B der Durchmesser des gesuchten Halbkreises.

Theilt man nun diesen in eben so viel gleiche Theile, als die Linie A′ B′, und errichtet auf den Theilpunkten die Normalen G H.... beliebig lang, so braucht man nur die Längen der normalen Linien G′ H′, E′ F′.... von G nach H, von E nach F.... zu setzen, um den Halbkreis zu erhalten, welcher gleiche Höhenpunkte mit der gegebenen Linie A′ H′ F′.... haben wird.

Da es aber ein Halbkreis werden mußte, hätte man nur nöthig gehabt, mit dem Radius C D den Halbkreis A D B zu ziehen, welcher alsdann die Punkte H F.... ebenfalls berührt haben würde. Auf ganz gleiche Weise kann man auch aus der gegebenen kürzeren Linie A″ H″ D″ B″ einen Halbkreis mit übereinstimmenden Höhenpunkten bilden, wenn man, wie vorhin, die Linie C″ D″ als Radius des Halbkreises betrachtet und eben so verfährt, wie vorhin gezeigt wurde.

Anmerkung 3. Es folgt ferner aus dem bisher Gesagten: eine Linie kann so lang oder so kurz sein, wie sie will, so ist man immer im Stande, über ihr irgend eine Bogenlinie zu beschreiben, welche mit einer anderen, bereits gegebenen gemeinschaftliche Höhenpunkte haben muß.

Es ist einleuchtend, daß in je mehr Theile man die Grundlinie des gegebenen Bogens theilt, und jemehr Punkte man demnach durch die gezogenen Normalen in seinem Umkreise bestimmt, um so genauer wird die gesuchte krumme Linie werden.

Anmerkung 4. Es sei (Taf. 2 Fig. 49) der Spitzbogen A D B gegeben, man soll daraus einen flacheren A′ D′ B′ oder einen steileren A″ D″ B″ gestalten, so verfährt man ganz nach den Auflösungen, welche für den Halbkreis in dem vorhergehenden Beispiele gegeben worden sind, man hat ebenfalls nur nöthig, die verschiedenen Längen der Normalen zu bestimmen.

Anmerkung 5. Es soll ein Halbkreis in einen sogenannten steigenden Bogen verwandelt werden. (Taf. 3 Fig. 50.) Es sei der Halbkreis A D B gegeben, so theile man seinen Durchmesser A B wieder in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ziehe die Normalen G H, E F, C D.... bis zum Umkreise.

Ferner setze man auf der wagerechten Linie A′ N′ die schräge Grundlinie des steigenden Bogens A′ B′ unter dem bestimmten Neigungswinkel an.

Nun verlängere man sämmtliche Normalen des Halbkreises willkürlich. Dann mache man G′ H′ = G H, ferner F″ E″ = F E, ferner C′ D′ = C D u. s. w., endlich verbinde man die gefundenen Punkte A′ H′ F′ D′ K′ M′ B′ durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte steigende Bogen, dessen Höhenpunkte mit dem des gegebenen Halbkreises übereinstimmen werden.

Anmerkung 6. Wäre der gegebene Bogen, den man in einen steigenden Bogen verwandeln soll, kein Halbkreis, sondern ein Spitzbogen (Taf. 3 Fig. 51), so verfahre man ganz eben so wie bei dem Halbkreise. Das Verfahren wird aus der Fig. 51 deutlich, da die sämmtlichen Bezeichnungen ganz wie bei dem Halbkreise (Anmerk. 5) gewählt sind.

Anmerkung 7. Man sieht leicht ein, daß man auf ganz gleiche Weise jedes beliebige Bogensystem in einen steigenden Bogen verwandeln kann, wie es auch in der Praxis bei den steigenden Treppengewölben immer vorkommt. Alsdann zeichnet man sich aber die zu verwandelnden Bögen nicht auf dem Papiere, sondern auf einem Bretterboden (dem sogenannten Reißboden) in natürlicher Größe auf und verfährt dabei ganz so, wie wir es hier auf dem Papiere gezeigt haben, nur mit dem Unterschiede, daß man die zu übertragenden Maße nicht mit dem Zirkel, sondern mit dem Fußmaßstabe nimmt.

§. 25.

Zeichnung einiger Netze von Oberflächen, die bei Bauten oft vorkommen.

Aufgabe. Das Netz eines Prisma zu zeichnen, dessen Grundfläche ein Dreieck ist.

Auflösung. (Taf. 3 Fig. 52.) Es sei A′ B′ C′ F′ G′ H′ das Prisma. Man zeichne das Rechteck A C H F, setze hieran die beiden Dreiecke F G H und A B C, alsdann verlängere man A C und H F willkürlich lang nach beiden Seiten und mache die Linien C D, F E, H J, K A gleich einer Seite der Dreiecke (wenn diese wie hier gleichschenklig sind), so hat man das verlangte Netz, und wenn man die Flächen gegen einander legt, erhält man das Prisma A′ B′ C′ H′ G′ F′.

Es stellt diese Figur die Gestalt eines gewöhnlichen Satteldaches dar.

Anmerkung 1. Das Netz eines Cubus oder Würfels wird gefunden, wenn man (Taf. 3 Fig. 53) das Grundquadrat O L H C zeichnet, an dieses setzt man die vier Seitenquadrate A B C O, L H J K, C D G H, L O N M und endlich das Quadrat D E F G, welches die obere Fläche des Cubus bilden wird, wenn man die Seitenflächen senkrecht aufklappt und das Quadrat D E F G wagerecht darüber legt.

Diese und die folgenden Netze kann man sehr leicht aus Papier oder Pappe schneiden und sich so das Verfahren verdeutlichen.

Anmerkung 2. Man soll das Netz eines Cylinders zeichnen. (Taf. 3 Fig. 54.) Der Kreis A ist die obere Fläche des Cylinders, der eben so große Kreis B die untere Fläche desselben. Die Linie HG zeigt die Höhe des Cylindermantels an.

Nun mache man HD, HC, GE und GF so lang als die Abwickelung des halben Umfanges eines der beiden Kreise (A oder B) nach §. 23 Anmerk. 4. Klappt man alsdann den Mantel CDEF senkrecht in die Höhe, legt ihn um den Umkreis des unteren Kreises B, und deckt endlich den oberen Kreis wagerecht darüber, so hat man den Cylinder.

Anmerkung 3. Man soll das Netz eines Bohlendaches zeichnen, das zugleich ein Satteldach ist. Es sei (Taf. 3 Fig. 55) das Dreieck ABC der gegebene Durchschnitt des Bohlendaches, so zeichne man sich erst das Rechteck A'B'F'E', welches den Grundriß des Daches nach seiner Länge und Breite darstellt.

Um die schmalen Seiten (Giebelseiten) dieses Rechteckes setze man die beiden Dreiecke A'B'D' und E'F'G', jedes eben so groß wie ABD. Alsdann zeichne man an das Rechteck auf der Seite A'E' ein Rechteck A'H'J'E', wovon die Seiten A'H' und J'E' so lang sind, als die Abwickelung DB (oder AD) des krummlinigen Dreiecks ABD; ferner ziehe man die Linie H'J', so ist das Rechteck A'H'J'E' die eine Seitendachfläche. Die andere Seitendachfläche B'K'L'F' findet man eben so, wie man A'H'J'E' gefunden hat.

Klappt man nun die beiden Giebeldreiecke senkrecht in die Höhe und die Seitenflächen so darüber hin, daß die Kanten der Seitenflächen K'L' und H'J' oben zusammenstoßen, so erhält man das verlangte Netz des Bohlendaches.

Anmerkung 4. Man soll das Netz einer vierseitigen Pyramide zeichnen. (Taf. 3 Fig. 56.)

Zuerst zeichne man die quadratische Grundfläche ABEG, dann setze man an die vier Seiten derselben die vier Dreiecke ACB, BDE, EFG, GHA, biege dieselben alsdann so zusammen, daß sie mit ihren Spitzen über dem Punkte J zusammentreffen, so hat man das verlangte Netz.

Man sieht, daß es zugleich das Netz eines sogenannten ganzen Walmdaches ist, an welchem man (wenn es nach einem bestimmten verjüngten Maßstabe aufgetragen ist) die Längen der Gradsparren und Schifter bequem zu finden im Stande ist.

Anmerkung 5. Man soll das Netz eines ganzen Walmdaches zeichnen, dessen Grundfläche und Höhe gegeben ist. (Taf. 3 Fig. 57.)

Es sei das Rechteck BGJO der Grundriß des Walmdaches nach verjüngtem Maßstabe. Zieht man in diesem Rechtecke die Mittellinie VW und macht auf dieser VS = VO = VB und RW = JW = GW, so sind S und R die Projectionen der oben darüber liegenden Anfallspunkte der Walme. Trägt man nun an die verlängerte Mittellinie VW die senkrechte Höhe des Daches VA und WH und vollendet die Dreiecke ABO und GHJ, so hat man die beiden Giebelwalmflächen gefunden. Nun verlängere man beliebig die Linien PT und QU (welche parallel mit den Linien OB und JG gezogen sind) nach oben und unten und mache MO = OA, BD = BA, ferner LJ = JH und HG = GE, so sind, wenn man endlich noch M mit L und D mit E verbindet, die beiden Trapeze OMLJ und BDEG die beiden Seitenflächen des Daches.

Klappt man nun die beiden Dreiecke so weit herüber, daß der Punkt A über S und H über R zu liegen kommt und daß die oberen Kanten der beiden Trapeze, DE und ML, einander oberhalb berühren, so hat man das Netz eines ganzen Walmdaches von sonst regelmäßiger Form.

Anmerkung 6. Man soll das Netz eines Giebeldaches zeichnen, wenn der Grundriß ein Trapez ist.

Es sei (Taf. 3 Fig. 58) das Trapez ABCD der gegebene Grundriß des Daches und EF die Mittellinie desselben. Man nimmt nun die Hälfte der Linie CB = CF und setzt diese als Grundlinie C'F' des Dreieckes (Z), setzt ferner auf diese Grundlinie die senkrechte Dachhöhe F'G' und zieht G'C', so ist G'C' die Höhe der Seitendachflächen; nimmt man nun die Länge der Linie C'G' und zieht mit dieser Entfernung die parallelen Linien JL und KM beliebig lang, so werden diese Linien auf beiden Seiten die Breiten der Dachflächen darstellen, da sie so breit sind, als die Sparrenlänge G'C' war. Will man nun noch die Kantenpunkte JLKM bestimmen, so zieht man durch E und F die Normalen KJ und LM, und die Durchschnittspunkte JLMK sind die gesuchten. Will man die Giebelflächen finden, so mache man GD = JD und AG = AK, und man hat in dem Dreieck AGD die eine Giebelfläche gefunden. Die andere findet man, wenn man LC = CN und BN = BM macht, so ist das Dreieck BCN die andere Giebelfläche.

Klappt man nun das Ganze so zusammen, daß oberhalb die Punkte KGJ und LMN zusammenfallen, so hat man das verlangte Netz gefunden.

Anmerkung 7. Man soll das Netz zu einem Dache wie Taf. 3 Fig. 59 finden, wenn dasselbe ganze Walme hat.

Es sei in dem Dreiecke Fig. (Z) C'F' die halbe Tiefe des Gebäudes, F'G' die senkrechte Höhe des Daches, so ist C'G' die Sparrenlänge der Seitenflächen.

Zieht man nun mit OJ die Parallele ML in der Entfernung = C'G', und eben so mit BG die Parallele DE in der Entfernung = C'G', so bestimmen die Räume zwischen beiden Parallelen die Höhen der Seitenflächen.

Zieht man nun durch die Anfallspunkte R und S die Normalen MD und LE, so sind die Punkte MLDE diejenigen, welche zusammengeklappt über R und S fallen. Da hier die Walme schief sind, so muß die Länge eines jeden Grades eine andere sein.

Die Gradlänge über OS findet man, wenn in dem Dreiecke (Z') O'S' (die Grundlinie) = OS gemacht wird; macht man nun SY = der senkrechten Dachhöhe und zieht O'Y, so ist O'Y die Gradlänge über OS. Beschreibt man nun mit der Länge O'Y aus O einen Kreisbogen, sucht dann die Gradlänge über BC auf gleiche Weise aus dem Dreieck (Z'') und beschreibt mit B''Y den andern Kreisbogen aus B, so ist das Dreieck BAO die gefundene Walmfläche. Die entgegengesetzte JHG findet man eben so.

Anmerkung 8. Sollte man ein eben solches Dach wie in Anmerk. 7, nur mit einer Wiederkehr, zeichnen (Taf. 3 Fig. 60), so verfährt man ganz wie in Anmerk. 7. Es tritt nur hier der Fall ein, daß die Seitenfläche NKLP über eine andere fortfällt. Will man demnach das Modell wirklich aus Pappe schneiden, so muß man dieses Stück besonders aufzeichnen, ausschneiden und ansetzen.

Anmerkung 9. Ist ein Gebäude auf einem Giebel breiter als auf dem andern, wie Taf. 3 Fig. 61, so theilt man die schmalste Giebelseite in zwei gleiche Theile, AM = MB; durch den Mittelpunkt M zieht man MN parallel mit BX, so ist MN die Projectionslinie des Dachfirstes. Nun suche man die Sparrenlänge, indem man in dem Dreiecke (Z′) M′B′ = MB, B′H′ = der senkrechten Dachhöhe macht. Dann ist M′H′ die Sparrenlänge, diese setze man von B nach P und von X nach O und ziehe OP, so ist XOPB die eine Dachfläche. Um die Dachfläche auf der schiefen Seite zu bestimmen, zieht man aus M eine Normale auf VA und setzt die Sparrenlänge M′H′ aus A nach Y. Eben so wird eine Normale aus V auf VA gezogen und die Sparrenlänge VZ aus V nach Z gesetzt. Diese Sparrenlänge findet man folgendermaßen. Man macht in dem Dreiecke (Z″) V′N′ = VN als Grundlinie, X′N′ = der bestimmten senkrechten Dachhöhe und zieht V′X′, so ist dies die gesuchte Sparrenlänge.

Anmerkung 10. Nach den bisher angegebenen Verfahrungsarten wird man leicht die Modelle auch für verwickelte Dachformen herausfinden, da sich dieselben in ihren einzelnen Stücken immer auf einen der angeführten Fälle werden zurückführen lassen; eben so wird man nun auch im Stande sein, alle Arten halber Walme zu finden, was man zur Uebung thun kann.

§. 26.

Aufgabe. Es soll der Grundriß, Aufriß und Durchschnitt einer hölzernen Fachwand gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 62.)

Auflösung. Denkt man sich, wie es in der Natur wirklich der Fall ist, die sämmtlichen Holzstücken, aus denen die Holzwand besteht, von gleicher Breite und Stärke, so sind sie sämmtlich prismatische Figuren, und es kommt demnach nur darauf an, diese Prismen je nach ihrer gegebenen Länge und ihrer Lage gegen und über einander nach dem verjüngten Maßstabe auf dem Papiere aufzutragen.

Das unterste Holz der Wand, die sogenannte Schwelle, ist ein wagerechtes Prisma, im Grund- und Aufriß mit AB bezeichnet.

Da es nun ein wagerechtes Prisma ist, so wird im Grundrisse die Projection seiner oberen Fläche ein längliches Viereck AB sein. (§. 15 Anmerk. 4.)

Aus demselben Grunde wird ihr Aufriß ebenfalls ein längliches Viereck A′B′ sein.

Die senkrechten Stiele CDEF im Grundrisse erscheinen im Grundrisse als Vierecke, die so groß sind, wie die obere oder untere Fläche der Prismen, die sie bilden. Die Stiele sind im Grundrisse durch CDEF bezeichnet. (§. 15 desgl.) Im Aufrisse erscheinen sie als längliche Vierecke (§. 15 desgl.) und sind mit C′D′E′F′ bezeichnet. Man erhält sie aus dem Grundrisse, wenn man die Seitenlinien der Stiele normal und beliebig lang über der Schwelle im Aufrisse in die Höhe zieht. Bestimmt man nun durch den verjüngten Maßstab die Höhe der Stiele, so hat man dieselben gefunden.

Quer über den Stielen, in gleicher Ebene mit der Schwelle liegt der sogenannte Rähm, im Aufrisse G′H′. Derselbe wird im Aufrisse ebenfalls als längliches Viereck erscheinen. Im Grundrisse würde derselbe unmittelbar über die Schwelle treffen und die Stiele verdecken. Man pflegt ihn daher im Grundrisse nur dann zu zeichnen, wenn (wie bei Balkenlagen) seine obere Ansicht sichtbar wird.

Es muß hier ein für allemal bemerkt werden, daß bei Bauzeichnungen viele solche Fälle vorkommen, wo die Projection eines Körpers die eines andern verdeckt; um nun die **wesentlichen** Projectionen sichtbar zu lassen (damit man sie messen kann), läßt man in allen diesen Fällen die **unwesentlichern** Projectionen fort, wie es z. B. hier mit dem Rähme im Grundrisse der Fall ist.

Man wird nun im Grundrisse bei J und K zwei schmale Vierecke bemerken, dies sind die Projectionen der Zapfenlöcher für die sogenannten Streben. Im Grundrisse werden diese Streben nicht weiter angedeutet. Im Aufrisse sind sie mit J′ und K′ bezeichnet. Ihre schräge Stellung erhält man, wenn man sie oben im Rähm und unten in der Schwelle um etwa 3—6 Zoll entfernt von den Stielen anfangen läßt.

Die Streben bilden zwei schräg gestellte Prismen, die mit ihren Zapfen (welche hier nicht sichtbar sind) in Schwelle und Rähm stehen und im Aufriß als längliche Vierecke erscheinen. Nun sind noch die Riegel L′M′N′O′P′ im Aufrisse zu sehen. Auch diese sind prismatische Hölzer von gleicher Stärke mit Schwellen und Stielen. Sie erscheinen deshalb im Aufrisse mit ihrer Seitenansicht, ebenfalls wie die übrigen Hölzer, als längliche Vierecke.

Im Grundrisse werden sie eben so wenig wie die Streben angegeben, da sie die Schwelle verdecken würden und diese als meßbarer Hauptttheil mit den Stielen sichtbar bleiben muß.

Wir haben demnach bis jetzt den Grund- und Aufriß einer hölzernen Wand gefunden, wovon die Abmessungen der einzelnen Holzstücken, so wie ihre Stellung als vorausbestimmt angenommen war.

Nun soll der Durchschnitt dieser Wand bestimmt werden. Zu diesem Zwecke denke man sich sowohl durch den Aufriß als durch den Grundriß eine senkrechte Ebene gelegt, deren Durchschnittslinie hier durch die punktirte Linie QR angedeutet ist. Im Grundrisse wird der Durchschnitt der Schwelle als ein Rechteck erscheinen, dessen Seiten so groß als die Breite und Höhe der Schwelle sind.

Im Aufrisse wird der Durchschnitt der Wand so breit werden, wie die Stärke der Stiele ist. Man trage demnach die Stärke der Stiele (oder die Breite der Schwelle, was hier einerlei ist) bei A″ hin und ziehe zwei senkrechte Linien, welche so weit von einander abstehen, als die Breite der Schwelle beträgt, so hat man die Breite des Durchschnittes der Wand.

Wenn man nun im Aufrisse die Höhen der Schwelle, der Riegel und des Rähmes herüber punktirt, so findet man bei A″ die Schwelle im Durchschnitt, bei C″ den Riegel im Durchschnitt und bei B″ den Rähm im Durchschnitt. Die senkrechten Linien des Durchschnittes aber zeigen die Länge und Breite desselben an. (§. 7 und §. 14.)

Man kann zur Uebung den Grundriß schräg stellen und dann den Aufriß und Durchschnitt suchen; man wird alsdann nicht nur die Breiten, sondern auch die Stärken der Hölzer in ihrer senkrechten Projection sehen.

§. 27.

Aufgabe. Ueber einem senkrecht stehenden Stiel liege ein wagerechter Rähm und quer über diesem ein ebenfalls wagerechter Balken, man soll davon den Grund- und Aufriß finden.

Auflösung. Es sei (Taf. 3 Fig. 63) A ein Stiel im Grundrisse, so wird er als Rechteck erscheinen. (§. 26.) Quer über diesem liege ein Rähm B C von unbestimmter Länge, aber eben so breit, wie der Stiel, so werden die beiden Linien bei B C seine Richtung, und ihre Entfernung dessen Breite anzeigen.

Quer über diesem Rähm liege der Balken D E, ebenfalls unbestimmt lang, durch die beiden parallelen Linien bei D und E seiner Breite nach begrenzt, so ist der Grundriß fertig.

Zeichnet man nun (§. 26) den Stiel bei A' im Aufrisse und giebt ihm nach dem verjüngten Maßstabe diejenige Länge, welche er haben soll, so kann man queer darüber den Rähm B' C' zeichnen. Der Balken D E des Grundrisses wird aber mit seiner vorderen Fläche in der Projection erscheinen, wie bei D' zu sehen.

Um nun den Rähm vom Stiele aus zu unterstützen, zeichne man die beiden Bänder F' und G', welche im Grundrisse nicht sichtbar sind, da sie vom Rähme B C verdeckt werden.

Ferner ist bei H' ein Zapfenloch angedeutet, welches einem Bande angehört, das vom Stiele aus nach dem Balken hinaufgeht. Dieses Band wird in seiner vorderen Ansicht nicht gezeichnet. Eben so wenig sieht man das ihm entgegenstehende Band auf der anderen Seite des Stieles, da der Stiel selbst es verdeckt.

Nun hat man den Aufriß von vorn gesehen gefunden; man soll aber noch den Aufriß von der Seite gesehen suchen.

Zu diesem Ende zeichnet man sich den Stiel A'' in der Seitenansicht, punktirt die Höhe des Rähmes B' C' aus der vorderen Ansicht herüber, so wird der Rähm hier nur in seiner vorderen Ansicht erscheinen, wie bei B'' gezeigt ist.

Nun punktire man aus der vorderen Ansicht die Höhe des Balkens D' herüber und ziehe E'' D'' und die dazu gehörige untere Parallele, so hat man die Seitenansicht des Balkens, welcher hier nach seiner Länge erscheint.

Punktirt man nun von H' herüber, so findet man die Anfänge der beiden Bänder J'' und K'', welche aus dem Stiele in den Balken gehen, und wovon man in der vorderen Ansicht nur das Zapfenloch H' zu sehen bekam.

Nun ziehe man von den Bändern F' und G' die punktirten Linien herüber, so findet man das Zapfenloch G''. Zur Uebung stelle man den Grundriß schräg und suche davon die Ansicht.

§. 28.

Aufgabe. Man soll Grundriß, Aufriß und Durchschnitt einer Fensteröffnung zeichnen, die in einer massiven Mauer liegt.

Auflösung. (Taf. 3 Fig. 64.) Es befinde sich unter der Grundlinie a b der senkrechten Ebene der Grundriß einer Fensteröffnung nach dem verjüngten Maßstabe in gegebenen Maßen gezeichnet; G D E H sei der Anschlag nach außen; H O E M die Breite der Fensterbrüstung, so weit sie voll gemauert wird, und der ganze Raum L F J H sei die innere Fenstervertiefung; man soll zuerst den über dieser Zeichnung befindlichen Durchschnitt zeichnen.

Zu dem Ende denke man sich durch die Mitte des Grundrisses eine senkrechte Durchschnittsebene gelegt, deren Grundlinie die punktirte Linie A C ist.

Nun ziehe man von den Punkten A B N C des Grundrisses über der Grundlinie normale Linien willkürlich lang und bestimme nach dem verjüngten Maßstabe zuerst die Höhe R' A = 3 Fuß, dann A' A'' = 7 Fuß, dann B'' P' = ½ Fuß, dann B' Q' abwärts = ½ Fuß, und ziehe die Wagerechten A' B', Q' N', A'' B'', P' F'', bestimme endlich die obere Schlußlinie V' W', so ist der Durchschnitt gefunden.

Den Aufriß findet man, wenn man von den Durchschnittspunkten wagerechte Linien beliebig lang zieht, dann aus dem Grundrisse von der Mittellinie rechts und links die entsprechenden Breiten einträgt und die gefundenen Punkte durch Linien verbindet, wie die Figur des Aufrisses hier zeigt. Die entsprechenden Punkte sind in allen drei Zeichnungen, dem Grundrisse, Aufrisse und Durchschnitte möglichst mit einerlei Buchstaben bezeichnet worden, um das Auffinden zu erleichtern.

Daß man bei Projectionszeichnungen nicht immer alle Punkte zeichnen kann, sieht man an dem vorliegenden Grundrisse recht deutlich; denn es ist in ihm nur der ganze untere Theil des Fensters angegeben. Die oberen Fensterpunkte fallen aber, da sie alle in normal auf den unteren Punkten stehenden Linien sich befinden, mit den unteren Punkten zusammen, so daß, wenn man diese erst gefunden hat, man auch leicht im Stande ist, die oberen Punkte zu finden.

§. 29.

Aufgabe. Es soll ein einzelner Stein aus einem Tonnengewölbe gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 65.)

Auflösung. Unter einem Tonnengewölbe versteht man bekanntlich ein Gewölbe, welches (gewöhnlich halbkreisförmig) über einen Raum geschlagen ist, dessen Mauern parallel mit einander in gerader Linie fortlaufen, wie aus dem Grundrisse der Fig. 65 ersichtlich.

Die Fugenschnitte der einzelnen Steine eines solchen Gewölbes gehen alle verlängert nach dem Mittelpunkte der Halbkreisebene, an welche diese Fugenschnitte stoßen. So ist im Aufrisse für den einzelnen Stein A' B' D' C' der Mittelpunkt J' zugleich derjenige Punkt, wonach die Lagerfugen A' C' und B' D' bestimmt werden. Die Stoßfugen werden durch normale Flächen gebildet, unter welchen jeder einzelne Stein des Gewölbes an den andern der Länge nach anstößt.

Es sei der Stein A' C' D' B' im Aufrisse gegeben, man soll seinen Grundriß finden.

Zu diesem Zwecke ziehe man von den Endpunkten des Steines abwärts die punktirten normalen Linien, so muß der Raum zwischen diesen die äußerste Breite der Projection des Steines bestimmen.

Die Länge des Steines im Grundrisse A E und H D ist nun nach dem verjüngten Maßstabe willkürlich festzusetzen. Es wird demnach die Figur A D H E des Grundrisses die Projection des gesuchten Steines sein. Die Buchstaben A C B D im Grundrisse stimmen mit denen des Aufrisses A' C' B' D' überein, woraus man die Lage der Punkte im Grundrisse genau zu übersehen im Stande ist. Neben dem Grundrisse ist der Stein A'' B'' F'' H'' D'' E'' G'' C'' einzeln ausgetragen, wobei die Buchstabenbezeichnung der einzelnen Punkte mit der des Grund- und Aufrisses wieder übereinstimmt.

Die Längen des Steines B″F″, D″H″, C″G″ werden aus dem Grundrisse entnommen und = BF, DH, CG gemacht.

Wäre die Aufgabe umgekehrt gestellt, daß man nämlich aus dem Grundrisse den Aufriß bestimmen soll, so muß die Größe des Steines AEHD im Grundrisse bestimmt sein. Alsdann zieht man von dessen Kanten nach oben normale Linien, bis diese den Durchschnitt des Gewölbes treffen, so findet man den Punkt A des Grundrisses in A′ des Aufrisses, C in C″ ꝛc. Aus dem Gesagten wird klar, daß man auf diese Weise jeden beliebigen Stein des Gewölbes, sowohl im Aufrisse als im Grundrisse, finden kann, je nachdem einer von beiden bestimmt wurde.

In dem vorliegenden Falle ist, wie sich wohl von selbst versteht, von einem Schnittsteingewölbe die Rede, und nicht von einem solchen, welches mit gewöhnlichen Mauersteinen gewölbt wird, da bei diesem die Mauersteine nur nothdürftig in die Form der Gewölbsteine gehauen werden und die Ausfüllung der Fugen mit Mörtel alsdann das beste zur Erreichung der vorgeschriebenen Form und der Haltbarkeit thun muß.

Gewöhnlich sind dergleichen Schnittsteingewölbe der größeren Leichtigkeit wegen im Scheitel dünner als unten, wo sie anfangen, hier aber ist das Gewölbe überall gleich stark angenommen, um das Aufsuchen der Steine noch mehr zu erleichtern.

§. 30.

Aufgabe. Es soll ein sogenannter Drehling (Taf. 3 Fig. 66) im Grund- und Aufriß gezeichnet werden.

Auflösung. Unter einem Drehlinge versteht man bekanntlich einen Maschinentheil, welcher aus einer Welle besteht, um welche zwei kreisrunde Scheiben in einiger Entfernung von einander liegen, die durch eine bestimmte Anzahl cylindrischer Stäbe verbunden sind.

Betrachtet man den Grundriß, so ist der größte Kreis CD der Grundriß der Scheibe C′D′ des Aufrisses. E ist die Welle und die einzelnen kleinen Stäbe sind durch die kleinen Kreise am Rande des großen angedeutet. Da im Aufrisse alle einzelnen Theile Cylinder sind, so sind die Grundrisse davon überall Kreise. (§. 17.)

Es tritt hier wieder ein solcher Fall ein, daß man, um den Grundriß meßbar und deutlich zu erhalten, nicht Alles hinein zeichnen kann. Denkt man sich die Projection des Drehlings genau, so müßte man eigentlich die Projection des oberen Cylinders AB zeichnen, welche alsdann nichts weiter sein würde, als ein Kreis von dem Durchmesser A′B′. Die einzelnen kleinen Stäbe würden alsdann verdeckt sein; da aber eben diese ein Haupttheil des Drehlings sind, so denkt man sich durch den Aufriß bei G′H′ eine wagerechte Ebene gelegt und auf diese sämmtliche Projectionen genommen, wo alsdann der Grundriß in seiner jetzigen Gestalt erscheinen wird.

Hat man den Grundriß und will daraus den Aufriß finden, so zeichne man zuerst die Welle, dann bestimme man den Abstand der beiden Scheiben A′B′ und C′D′ nach dem verjüngten Maßstabe, eben so ihre Stärke, und ziehe alsdann aus dem Grundrisse die normalen Projectionslinien der einzelnen Stäbe, von den kleinen Kreisen aufwärts.

Von diesen Stäben wird man nur die vordere Hälfte sehen, da die hinteren Stäbe durch die vorderen verdeckt werden. In seknrechter Stellung hat die Zeichnung keine Schwierigkeit.

Anmerkung 1. Liegt der Drehling mit seiner Wellenachse wagerecht, so werden Grund und Aufriß gleiche Ansichten gewähren. (Taf. 3 Fig. 67.)

Anmerkung 2. Zur Uebung kann man wie in Taf. 3 Fig. 68 den Drehling in schräger Lage gezeichnet annehmen. Der Aufriß ist alsdann ganz leicht, man bringt nur den Aufriß aus Fig. 67 oder 66 in diejenige schräge Lage, welche der Drehling haben soll, und sucht dann nach §. 17 die Grundrisse sämmtlicher Cylinder, der Welle, der Scheiben, der Stäbe, einzeln.

Anmerkung 3. Zur weiteren Uebung kann man noch annehmen, daß der Cylinder nicht bloß im Aufrisse eine bestimmte Neigung gegen die wagerechte Ebene habe, sondern daß auch die Achse des Grundrisses unter einem beliebigen Winkel gegen die senkrechte Ebene stehe, wodurch die Aufgabe schon bedeutend zusammengesetzter wird und hauptsächlich nach §. 14 Anmerk. 4 und §. 17 Anmerk. 2 zu lösen ist.

Es muß hier nochmals auf das dringendste empfohlen werden, die Figuren auf einem besonderen Brette nicht blos abzuzeichnen, sondern Punkt für Punkt zu suchen, weil man durch die bloße Anschauung der Figuren, wenn man auch Alles vollkommen verstanden hat, doch niemals im Stande sein wird, die allergeringste Aufsuchung einer gegebenen Projection zu finden.

Auch wird sehr empfohlen, die Aufgaben selbst beliebig zu verändern oder auch sich selbst neu erfundene zu geben und diese zu lösen.

§. 31.

Aufgabe. Es soll ein Schornstein im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden, wie er über die schräge Dachfläche hinausreicht. (Taf. 3 Fig. 69.)

Auflösung. Es sei im Grundrisse der Schornstein ABCD gegeben, so ziehe man von seinen Seitenkanten die Normalen BB′, AA′ beliebig lang über die oben in der Ansicht gezeichnete schräge Giebelfläche hinauf; alsdann setze man nach dem verjüngten Maßstabe von A′ und B′ im Aufrisse die bestimmte Höhe des Schornsteins aufwärts, ziehe die wagerechten Bekrönungsglieder, so ist die Aufgabe gelöst.

Dasselbe gilt für den an der Seite der Dachfläche herauskommenden Schornstein, welcher im Grundrisse mit EFHG bezeichnet ist.

Anmerkung 1. Soll man die Seitenansicht dieser Schornsteine zeichnen, so verlängere man sämmtliche wagerechte Linien der gefundenen Schornsteine beliebig lang seitwärts, bestimme die Stellung des Schornsteines ABCD, welcher auf dem First sich befindet, trage seine Breite von B″ nach C″ und ziehe von diesen Punkten senkrechte Linien, so hat man den gesuchten Schornstein gefunden.

Wollte man nun auch den andern Schornstein suchen, welcher mit EFHG bezeichnet ist, so verfahre man im Aufrisse ganz eben so, trage die Breite des Schornsteins von H″ nach F″ und ziehe von diesen Punkten aufwärts wieder senkrechte Linien, so ist die Aufgabe gelöst.

Zur Uebung kann man den Grundriß schräg stellen und alsdann die Giebel, Seitendachflächen und Schornsteine suchen.

§. 32.

Aufgabe. In einer halbkreisförmigen Nische (Taf. 3 Fig. 70) sollen Linien auf der gebogenen Fläche gezeichnet werden, welche vom untern Anfange der Krümmung bis zum Scheitel hinaufsteigen.

Auflösung. Es sei die Nische im Grundrisse gegeben, so zeichne man sich darüber den Aufriß und neben diesem den Durchschnitt wie in Fig. 70 angegeben. Um nun die gesuchten Linien zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Es leuchtet ein, daß wenn man im Stande ist, eine dieser Linien zu finden, man sie alle finden kann, da sie alle einerlei Gesetz folgen. Zur Bequemlichkeit sind wieder die Buchstaben zur Bezeichnung der Punkte in den Zeichnungen gleichlautend angenommen worden.

Es soll nun zuvörderst die Linie **F S T U C** gefunden werden.

Man theile den Quadranten des Durchschnittes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, **G″ J″, J″ K″, K″ L″, L″ M″**, und ziehe von diesen Punkten aus wagerechte Linien **R′ L′** 2c. durch die vordere Ansicht der Nische, so kann man sich diese Linien auch als die Projectionen von solchen Halbkreisebenen denken, welche die hohle Fläche der Nische nach den Richtungen **R′ L′, O′ K′** 2c. berühren. Oder, was dasselbe ist, man kann sich diese geraden Linien als die Projection derjenigen krummen Linien denken, welche wagerecht an der Krümmung der Nische hinlaufen.

Nimmt man nun im Aufrisse den Radius **V′ R′** und beschreibt damit im Grundrisse den Halbkreis **R U V L** aus dem Mittelpunkte C, so ist dieser Halbkreis die Projection der geraden Linie **R′ V′ L′** im Aufrisse.

Eben so findet man den Halbkreis **O T W K** im Grundrisse als Projection der geraden Linie **O′ K′** des Aufrisses.

Eben so den Halbkreis **P S Z J** als Projection der geraden Linie **P′ J′** des Aufrisses, und eben so ist endlich der Halbkreis **B F G H D** die Projection der Grundlinie **O′ N′** des Halbkreises im Aufrisse. Nun wird ferner jeder beliebige Punkt, welcher im Grundrisse, z. B. in dem Halbkreise **R U V L** liegt, im Aufrisse in die Linie **R′ L′** fallen. Es sei im Grundrisse der Punkt **U** im Halbkreise **R U V L** gegeben, man soll seine Projection im Aufrisse finden, so ziehe man die Normale **U U′**, so ist **U′** der gesuchte Punkt.

Eben so findet man die Projection des Punktes **T** in **T′**, des Punktes **S** in **S′**, des Punktes **F** in **F′**. Verbindet man nun die gefundenen Punkte im Aufrisse durch eine krumme Linie **F′ S′ T′ U′ M′**, so ist diese Linie die Projection der Linie **F S T U C** im Grundrisse.

Eben so wie man diese einzelne Linie gefunden hat, kann man jede beliebige andere finden. Die Linie **G Z W V C** im Grundrisse z. B. wird, wenn man sie im Aufrisse sucht, keine krumme, sondern eine senkrechte, gerade werden, da die Projectionspunkte, wenn man die Normalen von den einzelnen Punkten zieht, alle in einer senkrechten Linie zusammenfallen.

Eben so findet man die Projection der Linie **H C** des Grundrisses im Aufrisse als die krumme Linie **H′ M′**, welche mit der entgegengesetzt gekrümmten **F′ S′ T′ U′ M′** ganz gleich gekrümmt ist.

Je mehr Halbkreise man im Grundrisse annimmt und in je mehr Theile man folglich den Quadranten des Durchschnittes theilt, um so genauer findet man die gekrümmten Linien des Aufrisses.

Zur Uebung kann man den Grundriß schräg stellen und dann den Aufriß suchen.

§. 33.

Aufgabe. Es sollen an einem kreisrunden Thurme Thüre und Fenster im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden. (Taf. 3 Fig. 71.)

Auflösung. Wenn der Thurm kreisrund ist und senkrecht in der wagerechten Ebene steht, so wird sein Grundriß aus zwei concentrischen Kreisen bestehen, deren Abstand von einander die Stärke der Thurmmauer anzeigt.

Es sei diese Thurmmauer im Grundrisse zur Hälfte gezeichnet.

Der Radius **C A** sei die Mittellinie der Thüre, die Radien **C B** und **C D** seien die Mittellinien der Fenster. Thüren und Fenster sollen mit halbkreisförmigen Bögen zugewölbt sein und man soll diese Wölbungen im Aufrisse suchen. Betrachtet man das Fenster, wozu der Radius **C D** die Mittellinie bildet, im Grundrisse, so ist seine äußere Umrißlinie eine gebogene. Diese Umrißlinie ist aber zugleich der Durchmesser des Halbkreises, welcher die Wölbung des Fenstersturzes ausmachen soll; es wird also der Halbkreis eine doppelt gekrümmte Linie sein, einmal hat er die Krümmung des Halbkreises selbst, dann aber auch noch die Krümmung der äußeren Umrißlinie des Thurmes.

Um nun die Projection davon zu finden zeichne man sich auf die Linie **a b** die Aufwickelung der äußeren Fensterbreite (§. 23 Anmerk. 4), so ist diese der Durchmesser der darüber beschriebenen Halbkreisöffnung. Zieht man in diesem Halbkreise mehrere normale Linien vom Durchmesser bis zum Umkreise und in gleich weiten Abständen vom Mittelpunkte, so erhält man am Umkreise des Halbkreises mehrere bestimmte Höhenpunkte desselben.

Setzt man nun diesen Halbkreis über **a b** im Aufrisse auf diejenige Linie **g a b**, welche die Grundlinie für die Anfänge der Halbkreisbögen ist, und zieht von den Höhenpunkten des Halbkreises wagerechte Linien herüber, so werden durch dieselben die Höhenpunkte für die Projection der Fensterwölbung bestimmt.

Nun ziehe man aus dem Grundrisse die Normalen von dem Eck- und Mittelpunkte der äußeren Fensteröffnung hinauf, so erhält man die Breite der Projection der Wölbung und ihre höchste Höhe. Um nun auch die andern Höhenpunkte zu finden, theile man in der Grundrißlinie von deren Mittelpunkte rechts und links die Oeffnungslinie in eben so viele gleiche Theile, als den Durchmesser **a b** des Halbkreises (hier in zwei). Nun ziehe man von diesen Theilpunkten normale Linien bis in den Aufriß hinauf, wo sie die wagerechten, vom Halbkreise aus gezogenen Linien treffen werden, dort sind die Projectionspunkte des Gewölbebogens. Je mehr Höhenpunkte man im Umrisse des Halbkreises annehmen wird, um so genauer findet man die Wölbungslinie.

Eben so wie man den vordersten Halbkreis gefunden hat, eben so findet man den zweiten dahinter liegenden; eben so auch den dritten, der die innere Kreislinie des Grundrisses überwölbt, nur mit dem Unterschiede, daß für diese Wölbung eine besondere Aufwickelung und ein besonderer Halbkreis gesucht werden muß, da die Wölbung breiter und höher wird.

So wie man nun eine dieser Gewölbeprojectionen gefunden hat, findet man nach und nach alle. Diejenigen Projectionen, welche von der Mittellinie gleich weit abstehen, sind einander gleich, wie hier die Fenster, und wenn man eine dieser Projectionen gefunden hat, kann man die andere darnach copiren, ohne sie erst zu suchen.

§. 34.

Aufgabe. Es sollen zwei in einander steckende Cylinder gezeichnet werden. (Taf. 4 Fig. 72.)

Auflösung. Es stecke der kleine Cylinder A B D C so in dem größern, daß die Achsen derselben normal auf einander stehen und zugleich in einer wagerechten Ebene liegen, so wird, wenn der große Cylinder mit seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene steht, die Achse des kleineren Cylinders parallel mit der senkrechten Ebene liegen, wie die Zeichnung des Aufrisses zeigt.

Setzt man nun neben den Aufriß die Durchschnittsfläche als Kreis und theilt den Quadranten g h desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so erhält man verschiedene Höhenpunkte dieses Quadranten; zieht man von diesen aus wagerechte Linien nach dem großen Cylinder hinüber (wie in der Zeichnung angegeben), so erhält man auf dem großen Cylinder diejenigen Punkte, wo die Höhenpunkte des kleinen Cylinders in dem großen Cylinder einschneiden.

Zieht man nun von diesen Einschneidungspunkten lothrechte Linien bis zur Achse des kleinen Cylinders im Grundrisse, so erhält man diejenigen Linien, in welchen die Einschnittspunkte des kleinen Cylinders in den großen liegen müssen.

Man hat z. B. aus dem kleinen Kreise den obersten Punkt h nach A′ hin angeschnitten, so wird h im Grundrisse derjenige Punkt sein, wo der kleine Cylinder am tiefsten in den großen einschneidet. Nun trage man auf der Linie C A des Grundrisses die Stücken c d, d e, e f auf, welche eben so groß sind als die Stücken c d, d e, e f auf dem Radius c g des kleinen Kreises neben dem Aufrisse, alsdann ziehe man aus den Punkten des Grundrisses c d e f wagerechte Linien, bis sie die von oben herabkommenden senkrechten Linien treffen, und bezeichne die erhaltenen Durchschnittspunkte. Ist dies geschehen, so verbinde man aus freier Hand diese verschiedenen Durchschnittspunkte durch die Linie A h, so wird man den einen sichtbaren Quadranten gefunden haben, womit der kleine Cylinder in den großen einschneidet. Die andere Hälfte h C im Grundrisse wird ganz eben so gefunden, und man braucht die gefundene Linie A h im Grundrisse nur von h nach C hinzutragen, so ist die ganze Aufgabe gelöst.

Anmerkung 1. Haben beide Cylinder gleichgroße Querdurchmesser und stecken in gleicher Art, wie vorhin, in einander, daß ihre Achsen normal auf einander stehen, so wird der Punkt h bis in die Mitte des großen Cylinderkreises rücken und die Linien A h, h C im Grundrisse werden gerade Linien.

Zur Uebung kann man die Achsen der Cylinder schräg stellen, wodurch die Aufgabe schon ziemlich verwickelt wird.

Anmerkung 2. (Taf. 4 Fig. 73.) Stände der große Cylinder senkrecht und der kleinere durchschnitte ihn normal, so würde A′ der große, B′ der kleinere in der vorderen Ansicht sein, und A der große, B der kleinere Cylinder im Grundrisse.

Man muß hierbei bemerken, daß die Projection des kleinen Cylinders auf dem großen im Aufrisse zwar als Kreis erscheint, die Figur aber, welche durch die Berührungspunkte des kleinen Cylinders auf dem großen gebildet wird, ist durchaus kein Kreis, sondern eine ganz andere Linie.

Dies Ineinandergreifen von Cylindern kommt namentlich bei Röhrenwerken der Maschinen sehr häufig vor.

Anmerkung 3. Betrachtet man den Grundriß (Taf. 4 Fig. 72) und denkt sich den großen Cylinder (anstatt daß er hier wagerecht liegt) senkrecht stehend und den kleineren wagerecht darin eingreifend, so wird man die Eingriffslinie A h C des kleinen Cylinders in den großen eben so finden, wie vorhin gezeigt wurde.

§. 35.

Aufgabe. Es sei durch einen Kegel (Taf. 4 Fig. 74) eine Ebene A′C′ so gelegt, daß sie mit der einen Seite des Kegels (hier D′B′) parallel liegt und die Grundfläche schneidet, man soll im Grundrisse diejenige Linie bestimmen, welche auf der Oberfläche des Kegels durch den Schnitt der Ebene entsteht.

Auflösung. Man theile die Linie C′A′ des Aufrisses, welche die Durchschnittslinie der durch den Kegel gelegten Ebene ist, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, C′a′ = a′b′, = b′d′, = d′A′. Es ist hier aber die Entfernung d′A′ noch einmal halbirt in e′, um einen Theilpunkt mehr zu haben, welcher, wie man weiter unten sehen wird, die Auffindung der gesuchten Linie erleichtert. Die Punkte a′b′d′e′ in der Linie C′A′ sind alle Mittelpunkte von wagerechten Linien, welche man sich in der durch den Kegel gelegten Ebene A′C′ gezogen denken kann. Denkt man sich ferner diese wagerechten Linien so weit nach beiden Seiten verlängert, bis sie den Mantel des Kegels treffen, so hat man nur diese sämmtlichen Durchschnittspunkte aufzusuchen, um die zu suchende Linie im Grundrisse zu bestimmen.

Nimmt man z. B. in der Linie A′C′ den Punkt a′ an und zieht die Wagerechte K′a′o′, so wird der Punkt o′ den Abstand von a′ bezeichnen, wenn man die Länge a′o′ durch den Punkt a′ normal auf C′A′ nach beiden Seiten so weit verlängert denkt, bis diese Linie den Mantel des Kegels auf beiden Seiten schneidet. Beschreibt man nun mit dem Radius K′O′ = C′O′ im Grundrisse den Kreis P O Q, so wird in diesem Kreisbogen die Projection desjenigen Punktes liegen, wo die durch a′ gezogene Wagerechte den Mantel des Kegels schneidet. (Vergleiche §. 18, besonders Anmerk. 1.)

Fällt man aus a′ die Normale $a' a^2 a^3$, so sind die beiden Punkte a^2 und a^3 die gesuchten im Grundrisse. Eben so findet man durch die Normale $b' b^2 b^3$ die beiden Punkte $b^2 b^3$ im Grundrisse.

Ferner durch die Normale $d' d^2 d^3$ die Punkte $d^2 d^3$; sodann durch die Normale $e' e^2 e^3$ die Punkte $e^2 e^3$, und endlich liegt der Punkt A′ im Grundrisse in A. Zieht man nun aus freier Hand im Grundrisse die Linie $P a^2 \ldots A e^3 \ldots Q$, so hat man die gesuchte Linie gefunden.

Es braucht wohl nicht erst erinnert zu werden, daß man eben so, wie man für den Punkt a′ den Kreis C O gefunden hat, man für den Punkt b′ des Aufrisses den Kreis C N u. s. w. zieht, um die Lage der Durchschnittspunkte an dem Mantel des Kreises zu bestimmen. Eben so ist einleuchtend, daß, je mehr man Punkte im Aufrisse in der Linie C′A′ annimmt, man auch mehr Kreise im Grundrisse und demnach mehr Bestimmungspunkte erhält, wodurch die Linie P A Q im Grundrisse immer genauer gefunden werden kann.

Anmerkung 1. Nachdem man nun die gesuchte Linie im Grundrisse gefunden hat, soll man die ganze Durchschnittsebene, wovon C′ A′ die Mittellinie ist, im Aufrisse zeichnen, und zwar so, daß die ganze Ebene senkrecht steht (Taf. 4 Fig. 75). Zu diesem Zwecke trage man aus Fig. 74 den Radius C′ E′ nach Fig. 75 von C″ nach E″ und von C″ nach D″, so ist D″ E″ die Grundlinie der Ebene, und weil die durch den Kegel gelegte Ebene unten bis an die Mittellinie des Kreises reicht, so ist in diesem Falle in Fig. 75 D″ E″ gleich dem Durchmesser des Grundkreises des Kegels.

Setzt man dann, Fig. 75, in C″ die Normale C″ A″ beliebig lang auf, so ist diese die Mittellinie der Durchschnittsebene.

Nimmt man dann aus Fig. 74 mit dem Zirkel die Länge der Linie C′ A′ im Aufrisse und trägt sie in Fig. 75 von C″ nach A″, so ist A″ der höchste Punkt der Durchschnittsebene.

Man hat demnach bis jetzt die Breite und Höhe der Durchschnittsebene bestimmt.

Um nun die übrigen Punkte zu finden, verfahre man wie folgt.

Man trage aus Fig. 74 die Punkte a′ b′ d′ e′ auf der Linie C′ A′ nach Fig. 75 von C″ aus nach a″ b″ d″ e″. Durch diese Punkte ziehe man parallele Linien mit D″ E″ beliebig lang.

Nun nehme man im Grundrisse Fig. 74 die Linie $a\,a^2$ und trage sie in Fig. 75 von a″ aus nach beiden Seiten auf die wagerechte Linie auf, so sind die Durchschnittspunkte die gesuchten.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $b\,b^2$ nach Fig. 75 von b″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $d\,d^2$ nach Fig. 75 von d″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Zuletzt trage man noch aus dem Grundrisse die Länge $e\,e^2$ in Fig. 75 von e″ nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Verbindet man nun alle diese in Fig. 75 gefundenen Durchschnittspunkte durch eine krumme Linie, so hat man in der Ebene D″ A″ E″ diejenige Ebene gefunden, welche die Durchschnittsebene des Kegels im Aufrisse Fig. 74 war.

Man nennt die krumme Begrenzungslinie, welche auf die in der gegebenen Aufgabe §. 35 erwähnte Art entsteht, eine Parabel und die ganze Fläche eine parabolische Ebene.

Anmerkung 2. Man kann aber jede parabolische Linie, deren Breite und Höhe gegeben ist, auch noch auf eine andere leichtere Art finden, was namentlich in der Praxis bei Zeichnung von Leerbogen parabolischer Gewölbelinien sehr bequem ist.

Es sei (Taf. 4 Fig. 75) D″ E″ die Grundlinie der parabolischen Ebene gegeben, eben so C″ A″ die Höhe derselben, man soll die parabolische Umrißlinie finden.

Zu diesem Zwecke verlängere man C″ A″ willkürlich und setze die Entfernung C″ A″ noch einmal von A″ nach (8), so daß C″ (8) doppelt so lang wird wie C″ A″ war.

Nun ziehe man D″ (8) und E″ (8), theile diese beiden Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile 1, 2, 3.... Eine Theilung von 8 oder 16 Theilen ist bequem, weil man nur zu halbiren braucht.

Dann bezeichne man die Theilpunkte, wie in der Zeichnung angegeben, auf beiden Seiten verschieden. Ist dies geschehen, so ziehe man Linien von 1 nach 1, von 2 nach 2, von 3 nach 3,.... Wo diese Linien sich durchschneiden, bemerke man die Durchschnittspunkte und verbinde diese durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese die gesuchte Parabel. Man wird finden, daß die auf die zuletzt angegebene Art gefundene Linie ganz mit der zusammenfällt, welche man vorhin (Anmerk. 1) auf ganz andere Art gefunden hat.

§. 36.

Aufgabe. In einer halbkugelförmigen Kuppel sollen sogenannte Casseturen gezeichnet werden.

Auflösung. Es sei Taf. 4 Fig. 76 im Aufrisse und Grundrisse die Hälfte einer solchen Kuppel gegeben. Die Casseturen (Vertiefungen im Gewölbe) seien ebenfalls im Durchschnitte des Gewölbes eingezeichnet, wie im Aufrisse auf der linken Seite zu sehen, so findet man diese Casseturen auf der gekrümmten Fläche sowohl im Aufrisse als im Grundrisse, wenn man folgendes Verfahren beobachtet.

Zuerst theile man sich im Grundrisse die sämmtlichen Mittellinien der Vertiefungen ein. Beiläufig gesagt nimmt man eines guten Verhältnisses wegen mindestens 16 und höchstens 20 Vertiefungen in einer Reihe rings herum an. Ferner sind in dem vorliegenden Beispiele zwar alle Vertiefungen von gleicher Höhe angenommen, um die Zeichnung deutlicher erscheinen zu lassen; dies thut man aber in der Ausführung nicht, dann werden die Höhen der Cassetten nach oben immer kleiner, und zwar so, daß man sie in jeder Reihe so hoch wie breit macht. Sind nun die Mittellinien eingetheilt, so kann man dieselben leicht finden. Im Grundrisse zieht man nur von dem Theilpunkte am Umkreise Radien bis nach dem Mittelpunkte C; wie der Radius A C, so sind diese Radien die Projectionen der in der hohlen Wölbung des Aufrisses laufenden Linien. (§. 32.)

Ferner ziehe man im Aufrisse aus allen Eckpunkten der Vertiefungen, wie sie in der Gewölbstärke links eingezeichnet sind, wagerechte Linien durch die Breite der Kuppel, so hat man durch diese wagerechten Linien die Projectionen von eben so vielen wagerechten Kreislinien erhalten, welche ebenfalls wagerecht an der Krümmungsfläche herumlaufen. Es seien dies im Aufrisse die am mittleren Radius mit 1, 2, 3, 4.... bezeichneten Linien.

Zieht man nun auch von den Eckpunkten der Casseturen in der Gewölbstärke normale Linien nach dem Durchmesser des Grundrisses herunter, so hat man diejenigen Punkte im Grundrisse erhalten, welche die Projectionen der Cassettenbreiten angeben. Zieht man nun aus allen diesen Punkten concentrische Kreise 1, 2, 3, 4...., so liegen zwischen diesen Kreisen sowohl die Breiten der Cassetten als der Steege.

Will man nun die einzelnen Umrisse der Zeichnung bestimmen, so verfährt man bei allen Linien, wie wir es jetzt gleich für die einzelne Linie A C im Grund- und Aufrisse zeigen werden.

Der Punkt A am innern Umkreise der Kuppel liegt im Aufrisse in einer Kreisebene, welche die Projection des Umkreises ist, also im untern Durchmesser der Halbkugel bei A′.

Aus denselben Gründen liegt der Punkt 6 der Linie AC im Grundrisse in der wagerechten Linie 6 des Aufrisses, der Punkt 5 des Grundrisses in 5 des Aufrisses, der Punkt 4 des Grundrisses in 4 des Aufrisses u. s. w. bis zum Punkte C hinauf. Hat man nun eine solche Linie gefunden, so ist man auch im Stande, alle Linien eine nach der andern auf gleiche Weise zu finden.

Nachdem man sich nunmehr von den Mittellinien aus die Breite der Cassetten und der neben ihnen befindlichen Steege am Umkreise des Grundrisses eingetheilt hat, zieht man von diesen Theilpunkten Radien nach dem Mittelpunkte C, wodurch sowohl die Breiten der Cassetten als der Steege bestimmt werden. Durch die im Grundrisse gezogenen concentrischen Kreise werden nun die Höhen der Cassetten bestimmt. Will man nun die einzelnen Cassetten im Aufrisse finden, so braucht man nur aus dem Grundrisse die Eckpunkte jeder einzelnen Cassettenreihe in diejenigen wagerechten Linien des Aufrisses zu tragen, welche mit den Kreisen des Grundrisses übereinstimmen.

Es liegt z. B. die Cassettenreihe, welche im Grundrisse sich zwischen den Kreisen 3 und 4 befindet, im Aufrisse zwischen den wagerechten Linien 3 und 4 u. s. w.

Es bilden aber die Cassetten nicht blos Flächen, sondern sie haben eine bestimmte Tiefe, wie aus den Cassetten hervorgeht, deren Durchschnitt in der Gewölbestärke eingezeichnet ist. Um nun diese Vertiefungen zu finden, braucht man sich blos eine zweite Halbkugel mit der ersteren concentrisch zu denken und für diese ebenfalls die Vertiefungspunkte der Cassetten eben so zu suchen, wie man es bei der ersten Halbkugelfläche gethan. Man wollte z. B. die Vertiefung der Cassette bei B im Grundrisse und B′ im Aufrisse finden.

Im Grundrisse ziehe man von den beiden Vertiefungspunkten Radien nach C, so geben diese die nach oben abnehmende Breite für alle Cassetten der Höhe nach an, also auch für B.

Will man nun die obere und untere Ansicht der Vertiefung in B haben, so ziehe man im Aufrisse in der mittelsten Cassettenreihe, worin B′ liegt, vom Durchschnitte aus wagerechte Linien **FD**, **GE**. Diese geben die Höhenansichten der Vertiefung.

Sucht man nun noch aus dem Grundrisse herauf die Linien in B′, welche die Breiten der Ansichten bestimmen, so findet man nach und nach den ganzen Umriß einer einzelnen Cassetur.

Wie man eine gefunden hat, so findet man auf demselben Wege nach und nach alle, und bei weiterem Verfolg sieht man zugleich, daß sich das Aufsuchen ungemein vereinfacht, da die Radien und Kreise im Grundrisse immer die Breiten und Höhen bestimmen, so wie die wagerechten Linien im Aufrisse ebenfalls alle Höhen angeben und man demnach überhaupt nur die gekrümmten Linien des Aufrisses eine nach der andern aus dem Grundrisse zu suchen braucht.