Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 2. Aufgabe. Es soll die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

Erste Abtheilung.

Projectionslehre.

Erklärung 1. Unter Projectionslehre versteht man diejenige Lehre, welche darthut, wie man in dem freien Raume befindliche Punkte (Linien, Flächen, Körper) auf einer gegebenen Fläche so aufzeichnen kann, daß sie meßbar sind.

Erklärung 2. Die Projection eines einzelnen Punktes entsteht, wenn man von einem im Raume beliebig gegebenen Punkte eine rechtwinklige Linie nach einer gegebenen Fläche zieht und den Durchschnittspunkt der Linie mit der Fläche bemerkt. Dieser Durchschnittspunkt ist die gesuchte Projection des im Raume gegebenen Punktes. *Es ist hiernach die Projection eines Punktes das* **Bild** *desselben, welches entsteht, wenn man von diesem Punkte eine rechtwinklige Linie auf eine gegebene Fläche zieht und den Durchschnittspunkt bemerkt, welcher letztere das* **Bild** *oder die* **Projection** *des gegebenen Punktes genannt wird.*

Erklärung 3. Jede *rechtwinklige* Linie auf einer *wagerechten* (horizontalen — mit dem stillstehenden Wasser gleichlaufenden) ebenen Fläche, heißt bekanntlich eine perpendiculare Linie oder *lothrecht*.

Jede rechtwinklige Linie auf einer *nicht* wagerechten Ebene heißt eine *normale*. Es ist demnach zwar jede lothrechte Linie eine normale, aber nicht jede normale eine lothrechte. Wenn im Verfolge also von einer *normalen* Linie die Rede ist, so wird überhaupt eine Linie darunter verstanden, welche auf eine gegebene Ebene oder Fläche rechtwinklig gezogen ist, oder gezogen gedacht wird.

§. 1.

Aufgabe. Es soll die Projection eines gegebenen Punktes gefunden werden.

Auflösung. Man denke sich Tafel **1** Fig. **1** über der gegebenen *wagerechten* Ebene **a b c d** einen Punkt. Ferner denke man sich von diesem Punkte eine normale Linie nach der Ebene gezogen, welche Linie die Ebene in **A** schneidet; bemerkt man den Durchschnittspunkt bei **A** mit einem Punkte, so ist dieser die Projection des oberhalb liegend gedachten Punktes.

Anmerkung 1. Da die gegebene Ebene hier wagerecht angenommen ist, so wird die von dem gegebenen Punkte nach **A** gezogen gedachte normale Linie in dem vorliegenden Falle zugleich eine lothrechte sein.

Anmerkung 2. Wäre die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** nicht wagerecht, sondern *senkrecht* gestellt gedacht und man sollte die Projection eines davor liegenden Punktes finden, so denkt man sich von diesem Punkte wieder eine normale Linie nach der Ebene zu, und es wird der Durchschnittspunkt in **A** die Projection des vor der Ebene befindlichen Punktes sein.

In diesem Falle wird die normale Linie keine lothrechte, sondern eine wagerechte sein.

Anmerkung 3. Denkt man sich die gegebene Ebene Fig. **1 a b c d** *schräg* aufgestellt und über oder vor derselben einen Punkt, dessen Projection man finden will, so denke man sich wieder von diesem gegebenen Punkte eine rechtwinklige (normale) Linie nach der Ebene gezogen; auch hier wird in dem Durchschnittspunkte bei **A** die Projection des außerhalb der Ebene gegebenen Punktes erscheinen.

In diesem Falle wird die von dem gegebenen Punkte außerhalb nach der Ebene **a b c d** gezogen gedachte Linie (die Normale) weder lothrecht noch wagerecht sein, sie wird gegen eine wagerecht oder lothrecht gedachte Ebene *schräg* stehen, obgleich sie rechtwinklig auf der schiefgedachten Ebene **a b c d** steht.

Anmerkung 4. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, *daß das Bild (die Projection) eines* **Punktes** *immer wieder ein* **Punkt** *werden wird, da die von einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Ebene gezogene Linie diese Ebene nur immer in einem einzigen Punkte schneiden kann.*

§. 2.

Aufgabe. Es soll die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei Tafel **1** Fig. **2** eine wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, *über* dieser Ebene und mit ihr *gleichlaufend* (parallel) befinde sich eine gerade Linie **A B**, so findet man die Projection dieser Linie, wenn man von allen Punkten derselben normale Linien nach der Ebene **a b c d** gezogen denkt (siehe §. 1) und diese Punkte bemerkt. Zieht man alsdann durch diese gefundenen Punkte die gerade Linie **A B**, so ist diese die Projection der über der Ebene gedachten geraden Linie. Man hat nämlich dadurch, daß man die einzelnen Punkte der außerhalb der Ebene liegenden Punkte in ihrer Projection gesucht und gefunden hat, auch dadurch die Projection der ganzen Linie gefunden.

Anmerkung 1. Da die einzeln aufgesuchten Projectionspunkte der außerhalb der gegebenen Ebene a b c d liegenden geraden Linie in der Ebene wieder eine gerade Linie A B bilden, so hätte man nur nöthig gehabt, die Projectionen der beiden Endpunkte zu suchen und diese durch eine gerade Linie A B zu verbinden, welches Verfahren die Projection viel kürzer dargestellt hätte, als wenn man sich die gegebene Linie aus vielen einzelnen Punkten bestehend denkt und diese vielen Punkte einzeln sucht, um die Linie zu finden. Deshalb braucht man nur die Projectionen der Endpunkte einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche zu suchen und die gefundenen Projectionen dieser Endpunkte durch eine gerade Linie zu verbinden, wenn man die Projection der ganzen Linie zeichnen will.

Anmerkung 2. Da die außerhalb der Ebene gegebene Linie mit der Ebene a b c d gleichlaufend ist, so wird die Projection dieser Linie, nämlich die Linie A B, genau eben so groß sein, als die außerhalb gegebene Linie selbst ist; denn denkt man sich diese außerhalb der Ebene befindliche Linie so, daß sie sich, in immer gleicher Lage, der Ebene so lange nähert, bis sie in dieselbe zu liegen kommt, so wird ihre Projection genau so groß sein als die Linie selbst ist.

Anmerkung 3. Aus 2 folgt, daß die Projection einer geraden Linie, welche **gleichlaufend** (parallel) mit einer gegebenen Ebene liegt, **genau so groß ist**, als die Linie selbst.

Anmerkung 4. Wenn die gegebene Ebene Fig. 2 a b c d nicht wagerecht, sondern senkrecht stehend gedacht wird, und die gegebene Linie, deren Projection man finden soll, ebenfalls wagerecht und gleichlaufend (parallel) vor derselben liegt, so findet man ihre Projection wieder wie vorhin (Anmerk. 1), wenn man von den Endpunkten der Linie Normalen nach der Ebene gezogen denkt und die Durchschnittspunkte mit der Ebene bei A B durch eine gerade Linie verbindet, wo alsdann eben diese Linie A B die Projection der gegebenen ist.

Anmerkung 5. Denkt man sich Tafel 1 Fig. 3 eine wagerechte Ebene a b c d, so können gerade Linien gegen dieselbe entweder gleichlaufend oder schräg geneigt, oder lothrecht sein.

Liegt die Linie A B gleichlaufend mit der Ebene, so wird die Projection derselben bei A′ B′ in der Ebene eine gerade Linie bilden, welche eben so groß ist, als die gegebene Linie A B war. Liegt die Linie C D schräg geneigt gegen die Ebene a b c d, so findet man ihre Projection, wenn man die Normalen C C′ und D D′ gezogen denkt und die Punkte C′ D′ durch eine gerade Linie verbindet.

Es wird in diesem Falle die Projection C′ D′ kleiner werden als die Linie C D selbst war.

Die Projection C′ D′ wird auch immer kleiner werden, je mehr der Winkel, welchen die Linie C D mit der Ebene a b c d bildet, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht eine Linie Fig. 3 E F senkrecht über der wagerechten Ebene a b c d, so wird ihre Projection bei E′ F′ nur ein Punkt sein. Denn wenn man von allen Punkten der Linie E F normale Linien nach der Ebene a b c d zieht, so werden diese Normalen alle in eine einzige lothrechte Linie zusammenfallen und diese wird die Ebene a b c d nur in einem Punkte zwischen E′ F′ schneiden, welcher Punkt, alsdann die Projection der gegebenen Linie E F sein wird.

Anmerkung 6. Aus der Anmerkung 5 folgt, daß die Projection einer geraden Linie auf einer wagerechten Fläche die folgenden Gestalten je nach der Lage der Linien annehmen kann.

Liegt die gegebene Linie gleichlaufend mit der gegebenen Ebene, so wird ihre Projection A′ B′ eben so groß wie die gegebene Linie.

Liegt die gegebene Linie schräg gegen die gegebene Ebene, so wird ihre Projection C′ D′ kleiner wie die gegebene Linie, und zwar um so kleiner, je mehr der Winkel, welchen die gegebene Linie gegen die Ebene macht, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht die gegebene Linie senkrecht über der gegebenen Ebene, so ist ihre Projection wie hier zwischen E′ F′ ein Punkt.

Anmerkung 7. Denkt man sich die Ebene a b c d (Tafel 1, Fig. 3) nicht wagerecht, sondern senkrecht und die Lagen der Linien A B — C D — E F — in ähnlicher Weise davor (oder dahinter), so werden die Projectionen dieser Linien ganz gleich mit den Projectionen erscheinen, wie wir sie bei der wagerechten Ebene gesehen haben.

Anmerkung 8. Aus den vorhergehenden Anmerkungen folgt: daß die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche, entweder mit der gegebenen Linie **gleich groß** oder **kleiner** oder ein **einzelner Punkt** werden kann, je nach der Lage der gegebenen Linie gegen die gegebene Ebene.

§. 3.

Aufgabe. Es soll die Projection einer krummen Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Tafel 1 Fig. 4) die wagerechte Ebene a b c d gegeben; über dieser befinde sich die beliebig gekrümmte Linie A B . . F.

Man findet ihre Projection, wenn man in der gegebenen Linie die beliebigen Punkte B C D E annimmt, von diesen Punkte aus die Normalen A A′, B B′ . . . . F F′ zieht und die in der wagerechten Ebene gefundenen Durchschnittspunkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ mit einander durch eine krumme Linie verbindet, welche alsdann die gesuchte Projection der über der Ebene a b c d befindlichen krummen Linie A B C D sein wird.

Anmerkung 1. Befände sich eine krumme Linie (Tafel 1 Fig. 5) vor einer senkrechten Ebene a b c d und man sollte die Projection dieser Linie auf der Ebene zeichnen, so verfährt man ganz wie bei der wagerechten Ebene. Man nimmt beliebige Punkte B C D ... in der krummen Linie an, zieht von diesen aus normale Linien nach der senkrechten Ebene, bemerkt die Durchschnittpunkte A′ B′ C′ D′ E′, verbindet diese Durchschnittspunkte durch eine Linie, so ist diese die Projection der außerhalb der senkrechten Ebene befindlichen Linie A B C D E.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß die gegebene Linie jede beliebige Krümmung haben kann. Man theilt sie immer wieder durch willkürlich gewählte Punkte in beliebig große Stücken und sucht alsdann die Projectionen dieser einzelnen Punkte und Stücken wie eben gelehrt wurde.

§. 4.

Aufgabe. Es soll die Projection einer gegebenen Fläche auf einer ebenfalls gegebenen wagerechten Ebene gefunden werden.