Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 4. Aufgabe. Es soll die Projection einer gegebenen Fläche auf einer ebenfalls gegebenen wagerechten Ebene gefunden werden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

Anmerkung 1. Da die einzeln aufgesuchten Projectionspunkte der außerhalb der gegebenen Ebene a b c d liegenden geraden Linie in der Ebene wieder eine gerade Linie A B bilden, so hätte man nur nöthig gehabt, die Projectionen der beiden Endpunkte zu suchen und diese durch eine gerade Linie A B zu verbinden, welches Verfahren die Projection viel kürzer dargestellt hätte, als wenn man sich die gegebene Linie aus vielen einzelnen Punkten bestehend denkt und diese vielen Punkte einzeln sucht, um die Linie zu finden. Deshalb braucht man nur die Projectionen der Endpunkte einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche zu suchen und die gefundenen Projectionen dieser Endpunkte durch eine gerade Linie zu verbinden, wenn man die Projection der ganzen Linie zeichnen will.

Anmerkung 2. Da die außerhalb der Ebene gegebene Linie mit der Ebene a b c d gleichlaufend ist, so wird die Projection dieser Linie, nämlich die Linie A B, genau eben so groß sein, als die außerhalb gegebene Linie selbst ist; denn denkt man sich diese außerhalb der Ebene befindliche Linie so, daß sie sich, in immer gleicher Lage, der Ebene so lange nähert, bis sie in dieselbe zu liegen kommt, so wird ihre Projection genau so groß sein als die Linie selbst ist.

Anmerkung 3. Aus 2 folgt, daß die Projection einer geraden Linie, welche **gleichlaufend** (parallel) mit einer gegebenen Ebene liegt, **genau so groß ist,** als die Linie selbst.

Anmerkung 4. Wenn die gegebene Ebene Fig. 2 a b c d nicht wagerecht, sondern senkrecht stehend gedacht wird, und die gegebene Linie, deren Projection man finden soll, ebenfalls wagerecht und gleichlaufend (parallel) vor derselben liegt, so findet man ihre Projection wieder wie vorhin (Anmerk. 1), wenn man von den Endpunkten der Linie Normalen nach der Ebene gezogen denkt und die Durchschnittspunkte mit der Ebene bei A B durch eine gerade Linie verbindet, wo alsdann eben diese Linie A B die Projection der gegebenen ist.

Anmerkung 5. Denkt man sich Tafel 1 Fig. 3 eine wagerechte Ebene a b c d, so können gerade Linien gegen dieselbe entweder gleichlaufend oder schräg geneigt, oder lothrecht sein.

Liegt die Linie A B gleichlaufend mit der Ebene, so wird die Projection derselben bei A′ B′ in der Ebene eine gerade Linie bilden, welche eben so groß ist, als die gegebene Linie A B war. Liegt die Linie C D schräg geneigt gegen die Ebene a b c d, so findet man ihre Projection, wenn man die Normalen C C′ und D D′ gezogen denkt und die Punkte C′ D′ durch eine gerade Linie verbindet.

Es wird in diesem Falle die Projection C′ D′ kleiner werden als die Linie C D selbst war.

Die Projection C′ D′ wird auch immer kleiner werden, je mehr der Winkel, welchen die Linie C D mit der Ebene a b c d bildet, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht eine Linie Fig. 3 E F senkrecht über der wagerechten Ebene a b c d, so wird ihre Projection bei E′ F′ nur ein Punkt sein. Denn wenn man von allen Punkten der Linie E F normale Linien nach der Ebene a b c d zieht, so werden diese Normalen alle in eine einzige lothrechte Linie zusammenfallen und diese wird die Ebene a b c d nur in einem Punkte zwischen E′ F′ schneiden, welcher Punkt, alsdann die Projection der gegebenen Linie E F sein wird.

Anmerkung 6. Aus der Anmerkung 5 folgt, daß die Projection einer geraden Linie auf einer wagerechten Fläche die folgenden Gestalten je nach der Lage der Linien annehmen kann.

Liegt die gegebene Linie gleichlaufend mit der gegebenen Ebene, so wird ihre Projection A′ B′ eben so groß wie die gegebene Linie.

Liegt die gegebene Linie schräg gegen die gegebene Ebene, so wird ihre Projection C′ D′ kleiner wie die gegebene Linie, und zwar um so kleiner, je mehr der Winkel, welchen die gegebene Linie gegen die Ebene macht, sich einem rechten Winkel nähert.

Steht die gegebene Linie senkrecht über der gegebenen Ebene, so ist ihre Projection wie hier zwischen E′ F′ ein Punkt.

Anmerkung 7. Denkt man sich die Ebene a b c d (Tafel 1, Fig. 3) nicht wagerecht, sondern senkrecht und die Lagen der Linien A B — C D — E F — in ähnlicher Weise davor (oder dahinter), so werden die Projectionen dieser Linien ganz gleich mit den Projectionen erscheinen, wie wir sie bei der wagerechten Ebene gesehen haben.

Anmerkung 8. Aus den vorhergehenden Anmerkungen folgt: daß die Projection einer geraden Linie auf einer ebenen Fläche, entweder mit der gegebenen Linie **gleich groß** oder **kleiner** oder ein **einzelner Punkt** werden kann, je nach der Lage der gegebenen Linie gegen die gegebene Ebene.

§. 3.

Aufgabe. Es soll die Projection einer krummen Linie auf einer ebenen Fläche gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Tafel 1 Fig. 4) die wagerechte Ebene a b c d gegeben; über dieser befinde sich die beliebig gekrümmte Linie A B . . F.

Man findet ihre Projection, wenn man in der gegebenen Linie die beliebigen Punkte B C D E annimmt, von diesen Punkte aus die Normalen A A′, B B′ . . . . F F′ zieht und die in der wagerechten Ebene gefundenen Durchschnittspunkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ mit einander durch eine krumme Linie verbindet, welche alsdann die gesuchte Projection der über der Ebene a b c d befindlichen krummen Linie A B C D sein wird.

Anmerkung 1. Befände sich eine krumme Linie (Tafel 1 Fig. 5) vor einer senkrechten Ebene a b c d und man sollte die Projection dieser Linie auf der Ebene zeichnen, so verfährt man ganz wie bei der wagerechten Ebene. Man nimmt beliebige Punkte B C D ... in der krummen Linie an, zieht von diesen aus normale Linien nach der senkrechten Ebene, bemerkt die Durchschnittpunkte A′ B′ C′ D′ E′, verbindet diese Durchschnittspunkte durch eine Linie, so ist diese die Projection der außerhalb der senkrechten Ebene befindlichen Linie A B C D E.

Anmerkung 2. Es ist leicht einzusehen, daß die gegebene Linie jede beliebige Krümmung haben kann. Man theilt sie immer wieder durch willkürlich gewählte Punkte in beliebig große Stücken und sucht alsdann die Projectionen dieser einzelnen Punkte und Stücken wie eben gelehrt wurde.

§. 4.

Aufgabe. Es soll die Projection einer gegebenen Fläche auf einer ebenfalls gegebenen wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 6) die wagerechte Ebene **a b c d** gegeben, über ihr befinde sich das Dreieck **A B C**. Die Projection desselben findet man, wenn man von den Endpunkten **A B C** des Dreiecks normale Linien **A A'**, **B B'**, **C C'** nach der Ebene zieht, und wo diese die Ebene schneiden die Durchschnittspunkte **A' B' C'** durch gerade Linien verbindet, wo alsdann das Dreieck **A' B' C'** entstehen wird, welches die Projection des gegebenen Dreiecks außerhalb der wagerechten Ebene sein wird.

Anmerkung 1. Liegt das gegebene Dreieck mit der gegebenen Ebene gleichlaufend (parallel), so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß sein, als das Dreieck selbst war.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 7.) Es liege das gegebene Dreieck **A B C** mit der gegebenen wagerechten Ebene nicht parallel, sondern schief gegen diese Ebene, so wird das Projectionsdreieck **A' B' C'** kleiner erscheinen als das gegebene, und zwar um so kleiner, je mehr die Neigung des außerhalb der Ebene gegebenen Dreiecks sich einem rechten Winkel nähert, wie aus Tafel 1 Fig. 8 zu sehen, wo das Projectionsdreieck **A' B' C'** viel kleiner erscheint als in Fig. 7.

Anmerkung 3. Stünde das gegebene Dreieck **A B C** lothrecht (Taf. 1 Fig. 9) über der wagerechten Ebene **a b c d** und man zieht die Projectionslinien **A A'**, **B B'**, **C C'**, so wird die Linie **A B** und auch die Linie **B C** in eine gerade Linie **A' B' C'** fallen und die Projection des ganzen Dreiecks nur aus einer einzigen geraden Linie **A' B' C'** bestehen, welche in dem vorliegenden Falle eben so groß wie die Grundlinie des gegebenen Dreiecks **A B C** sein wird.

Anmerkung 4. Befände sich das gegebene Dreieck nicht über einer wagerechten Ebene, sondern vor einer senkrechten, wie Taf. 1 Fig. 10 das Dreieck **A B C** vor der senkrechten Ebene **a b c d**, so wird die Projection des gegebenen Dreiecks eben so groß wie das gegebene Dreieck selbst sein, wenn das gegebene Dreieck **A B C** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene **a b c d** ist.

Stände das gegebene Dreieck schräg gegen die senkrechte Ebene geneigt, so würde die Projection desselben kleiner werden als das gegebene Dreieck, wie wir es eben (Anmerk. 2 §. 4) bei der wagerechten Ebene gezeigt haben.

Stände das gegebene Dreieck normal gegen die senkrechte Ebene, so würde seine Projection eine gerade Linie werden, wie es (§. 4 Anmerk. 3) auch bei der wagerechten Ebene der Fall war.

Anmerkung 5. Es ergiebt sich aus dem Vorangegangenen Folgendes:

1) Die Projection eines Dreiecks auf einer ebenen Fläche kann **eben so groß** sein als das gegebene Dreieck, oder **kleiner**, oder auch **nur eine Linie**.

2) Was für die Figur eines **Dreiecks** gilt, muß auch für alle **möglichen Figuren** gelten, die eine ebene Fläche bilden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Körpers auf einer wagerechten Ebene gefunden werden.

Auflösung. Es stehe (Tafel 1 Figur 11) der Cubus **A B C D E F G H** über der wagerechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß die Grundfläche des Cubus, **E F G H**, gleichlaufend (parallel) mit der wagerechten Ebene **a b c d** liege, so werden die Seitenkanten des Cubus lothrecht auf der Ebene stehen und ihre Projectionen werden (§. 2 Anmerk. 5) die Punkte zwischen **A' F'**, **B' G'**, **C' H**, **D' E'** sein. Eben so wird die Projection der Oberfläche des Cubus **A B C D** mit der Projection der Unterfläche **E F G H** zusammenfallen und die Projection des ganzen Cubus in der Ebene **a b c d** wird das Quadrat **A' F'**, **B G'**, **C H'**, **D' E'** sein.

Anmerkung 1. Befände sich derselbe Cubus (Taf. 1 Fig. 12) vor der senkrechten Ebene **a b c d**, und zwar so, daß seine eine Fläche **B C H E** gleichlaufend (parallel) mit der senkrechten Ebene liegt, so wird die Projection des ganzen Körpers in das Quadrat **B' C' E' H'** auf der Ebene **a b c d** fallen. Denn da die eine Fläche **B C E H** gleichlaufend mit der Ebene **a b c d** steht, so stehen die Kanten des Körpers, **A B**, **D C**, **G H**, **F E**, normal auf der senkrechten Ebene, und ihre Projectionen fallen in die vier Punkte **B' C' E' H'**. Da ferner die Ebene des Körpers **A D F G** mit der Ebene desselben Körpers **B C E H** zusammenfällt, so wird die Projection des ganzen Cubus hier durch das Quadrat **B' C' E' H'** in der Ebene **a b c d** dargestellt sein.

Anmerkung 2. (Taf. 1 Fig. 13.) Stände der Cubus schief gegen die gegebene wagerechte Ebene **a b c d**, so würde seine Projection wieder eine Figur bilden, welche entsteht, wenn man von den Kanten des Cubus normale Linien auf die wagerechte Ebene zieht und die Durchschnittspunkte **G' H' E' F'** durch gerade Linien verbindet.

Dasselbe würde der Fall sein, wenn der Cubus schräg vor einer senkrechten Ebene läge, wie leicht zu übersehen.

Anmerkung 3. Es folgt aus dem Gesagten: daß die Projection eines Körpers auf einer ebenen Fläche ebenfalls eine **Fläche** bildet.

§. 6.

Folgerung aus den bisherigen Paragraphen.

1) Die Projection eines Punktes ist immer wieder ein Punkt. (§. 1.)

2) Die Projection einer geraden Linie ist
   a) entweder eine gerade Linie, welche eben so groß ist, als die gegebene (§. 2 Anmerk. 3),
   b) oder sie ist kleiner als die gegebene Linie (§. 2 Anm. 5),
   c) oder die gegebene Linie erscheint in ihrer Projection als ein Punkt (§. 2 Anmerk. 4).

3) Die Projection einer Fläche ist
   a) entweder eine Fläche, eben so groß wie die gegebene (§. 4 Anmerk. 1),
   b) oder kleiner als die gegebene Fläche (§. 4 Anmerk. 2),
   c) oder eine bloße Linie (§. 4 Anmerk. 3).

4) Die Projection eines Körpers ist immer eine Fläche. (§. 5.)

§. 7.

Erklärung. Der Maßstab. Um die Projectionen von Linien, Flächen und Körpern auftragen zu können, bedient man sich eines Maßstabes, des gewöhnlichen Duodecimal-Fußstockes, wo ein Fuß in zwölf Zoll getheilt ist.

Des Maßstabes in natürlicher Größe bedient man sich auf den Bauplätzen selbst, und zwar der Zimmermann, indem er aus