



Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 13. Aufgabe. Die Projection der Fläche eines Quadrats zu zeichnen, welches mit der senkrechten Ebene parallel und mit seiner Grundlinie in der wagerechten Ebene steht.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-66132](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-66132)

Diesen Durchmesser (oder die Länge der Projection des Grundrisses vom Halbkreise) trage man mittelst des Zirkels von A' nach B' unter demjenigen Winkel auf (hier 45 Grad), welcher gegeben ist. Nun ist die Linie $A'B'$ die Projection des Grundrisses und C' der Mittelpunkt des Halbkreises, aber auch zugleich die Projection des Radius CD in dem punktirten Halbkreise.

Will man nun den Aufsriß finden, so zieht man erst mit der Grundlinie ab parallel die willkürlich lange punktirte Linie $DD''G$. Eben so verlängert man den Durchmesser AB des Halbkreises punktirte willkürlich lang. Der Raum zwischen diesen beiden punktirten Linien zeigt nun die Höhe an, welche der Aufsriß des zu suchenden Halbkreises einnehmen muß.

Nun ziehe man vom Grundriß aufwärts die senkrechten punktirten Linien $A'A''$, $C'C''D''$, $B'B''$ und ziehe durch die Punkte A'' , D'' , B'' eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte Aufsriß des Halbkreises.

Will man den Aufsriß genauer bestimmen, so nehme man in dem punktirten Halbkreise noch die Punkte E und F an, suche ihre Projection auf der Grundlinie ab in E' und F' , trage diese Punkte mit dem Zirkel in E'' und F'' auf die Projectionslinie des Grundrisses $A'B'$ und ziehe dann die beliebig langen punktirten Linien $E'E''$ und $F'F''$. Wenn dies geschehen, nehme man mit dem Zirkel in dem punktirten Halbkreise, vom Durchmesser aufwärts, die Linie EE' und trage sie im Aufsriß, wo die Linie $E'E''$ den Durchmesser $A''B''$ schneidet, nach E''' , eben so verfähre man bei F , ziehe dann aus freier Hand die Linie $A''E'''D'''F'''B''$, so ist diese der gesuchte Aufsriß des Halbkreises.

Anmerkung 1. Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise jede beliebig gekrümmte Linie, welche schräg gegen die senkrechte Ebene mit ihrer Grundlinie steht, finden könne.

Anmerkung 2. Je mehr Punkte man in der krummen Linie, wie EDF , annimmt und ihre Projection bestimmt, um so richtiger wird natürlich auch die aus freier Hand gezeichnete Linie $A''E'''D'''F'''B''$ werden.

Am besten thut man, den Durchmesser in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, von diesen Theilungspunkten zieht man alsdann lothrechte Linien bis zum Umkreise, wie hier EDF , und sucht für diese Umkreispunkte die Projectionen des Aufsrißes.

Anmerkung 3. Hätte eine krumme Linie (Taf. 1 Fig. 19) $A'B'$ im Aufsriß eine ganz unregelmäßige Gestalt, so würde ihr Grundriß ebenfalls eine gerade Linie sein, welche man findet, indem man beliebig viele Punkte CDE in der krummen Linie annimmt und ihre Projectionen im Grundriß sucht, welche Grundrißlinie dann eine gerade Linie $ACDE$ sein wird, wenn die krumme Linie in einer senkrechten Ebene liegt, die mit der gegebenen Aufsrißebene parallel ist.

§. 13.

Aufgabe. Die Projection der Fläche eines Quadrats zu zeichnen, welches mit der senkrechten Ebene parallel und mit seiner Grundlinie in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Es sei (Taf. 1 Fig. 20) die Linie ab die Grundlinie der senkrechten Ebene, der Raum unterhalb ab sei die Projection der wagerechten Ebene.

Bestimmt man in ab die Länge der Linie $A'B'$ als die

Grundlinie des Quadrats, so wird die Linie $C'A$ senkrecht auf $A'B'$ und gleich lang mit $A'B'$ die eine Seite des Quadrats sein.

Eben so wird die Linie $D'B'$, eben so lang wie $A'C'$ gezeichnet, die andere Seite des Quadrats sein, und wenn man die Punkte C' und D' durch die gerade Linie $C'D'$ verbindet, so wird das Quadrat $A'C'D'B'$ die gesuchte Projection sein; denn da das gegebene Quadrat parallel mit der senkrechten Ebene angenommen war, so werden auch alle Umrißlinien desselben in gleicher Größe erscheinen, wie sie wirklich sind (§. 2), folglich auch die ganze Figur des Quadrats.

Soll man nun den Grundriß desselben Quadrats zeichnen, so wird er durch die gerade Linie AB dargestellt, denn die sämtlichen Projectionen der Linie $C'A$ fallen in dem Punkte des Grundrisses A zusammen, eben so die Projectionen der Linie $D'B'$ in dem Punkte des Grundrisses B , und endlich fällt die Projection der Linie $C'D'$ mit der Linie des Grundrisses AB zusammen.

Es wird also der Grundriß des Quadrats $A'C'D'B$ die gerade Linie AB sein.

Anmerkung 1. Stände das Quadrat schräg gegen die senkrechte Ebene (Taf. 1 Fig. 21), wie der Grundriß AB zeigt, so findet man die schräg gestellte Ebene im Aufsriß, wenn man die willkürlich langen Linien $A'A''C''$ und $B'B''D''$ lothrecht hinauf zieht.

Setzt man alsdann von A' nach C' und von B' nach D' das Maß einer Seite des Quadrats und zieht die Linie $C'D'$, so ist die gesuchte Projection des schräg stehenden Quadrats im Aufsriß gefunden.

Anmerkung 2. Es sei das Quadrat schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt (Taf. 1 Fig. 22), man soll Grundriß und Aufsriß derselben finden.

Wenn man die punktirte Linie $A''B''$ unter dem gegebenen Neigungswinkel $B''A''E''$ zieht und die Länge der Seite des Quadrats von A'' nach B'' setzt, so ist die Linie $A''B''$ die Projection der Seitenansicht des Quadrats.

Bestimmt man nun die Grundlinie $A'B'$ des Quadrats in der Grundlinie der senkrechten Ebene ab und zieht man die willkürlich lange Linie $B''D''C''$ parallel mit ab , so zeigt der Raum zwischen der Linie $B''D''C''$ und der Grundlinie ab die Höhe an, zwischen welcher das geneigte Quadrat liegen muß. Zieht man nun die Lothrechten $A'C'$ und $B'D'$ und verbindet diese beiden durch die Linie $C'D'$, so hat man die Projection des Aufsrißes des schräg gegen die wagerechte Ebene geneigten Quadrats gefunden.

Den Grundriß würde man auf folgende Weise finden.

Man ziehe die Lothrechten $C'A'CA$ und $D'B'DB$ abwärts willkürlich lang, so giebt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Länge des zu suchenden Grundrisses, zieht man die wagerechte Linie AB als Grundlinie des Quadrats, so ist diese eben so lang als $A'B'$, weil beide Linien Parallelen zwischen Parallelen sind.

Nun betrachte man das Dreieck $A''B''E''$; in diesem ist die Linie $A''E''$ die Projection der Linie $A'B'$, $A''B''$ aber ist die Länge des Quadrats, folglich ist $A''E''$ die Projection der Länge des Quadrats. Trägt man nun die Länge der Linie $A''E''$ mit dem Zirkel von A nach C und von B nach D und zieht von C nach D eine gerade Linie CD , so ist die Figur $ACDB$ der gesuchte Grundriß des Quadrats.

Anmerkung 3. Wäre die quadratische Ebene unter einem

gegebenen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt (wie vorhin), die Grundlinie des Quadrats neige sich aber ebenfalls unter einem beliebigen Winkel gegen die Grundlinie $a b$ der senkrechten Ebene (Taf. 1 Fig. 23), so findet man Grund- und Aufsriß des Quadrats wie folgt.

Die punktirte Linie $A''B''$ giebt die Neigung des Quadrats gegen die wagerechte Ebene an. Zieht man die willkürlich lange Linie $B'D'C'$ parallel mit $aA'b$, so zeigt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Höhe an, welche der Aufsriß einnehmen wird.

Zeichnet man sich nun den Grundriß $ABCD$ (wie in Anmerkung 2) in diejenige schräge Lage, wovon die Neigung gegeben ist, so kann man aus diesem gefundenen Grundriß nunmehr den Aufsriß bestimmen.

Zieht man nämlich die lothrechten Linien AA' und BB' , so ist $A'B'$ die Grundlinie des Aufsrißes in ihrer Projection.

Zieht man ferner CC' und DD' , so ist die Linie $C'D'$ die obere Grenzlinie des Quadrats.

Zieht man nun noch $A'C'$ und $B'D'$, so ist die Figur $A'C'D'B'$ die gesuchte Projection des Aufsrißes. Man kann sich zur Uebung in jeder der geraden Linien mehrere Projectionen annehmen und diese nach und nach bestimmen, wodurch man sich von der Wahrheit noch mehr überzeugen wird. Hier sind immer nur die Endpunkte der Linien gesucht und bestimmt worden, da die etwa in den geraden Linien angenommenen Zwischenpunkte doch mit diesen Endpunkten in ihren Projectionen immer wieder zusammenfallen. Auch kann man zur Uebung die Neigungswinkel willkürlich verändern, woraus immer andere Figuren im Grund- und Aufsriß entstehen werden.

Anmerkung 4. Denkt man sich das Quadrat senkrecht in der wagerechten Ebene stehend und zugleich unter einem rechten Winkel gegen die Grundlinie $a b$ (Taf. 1 Fig. 24) der senkrechten Ebene geneigt, wie der Grundriß in der Linie AB zeigt, so erhält man den Aufsriß, wenn man die lothrechte Linie $A'B'$ zieht und $A'B''$ so lang macht wie eine Seite des Quadrats, $= AB$. Es fällt alsdann die Ebene des Quadrats sowohl bei dem Grundriße, als bei dem Aufsriße, in einzelne gerade Linien zusammen, nämlich in die Linie AB für den Grundriß und in die Linie $A'B'$ für den Aufsriß. (§. 4 Anmerk. 3.)

Aufgabe. Es soll die Projection eines Kreises im Grund- und Aufsriß gezeichnet werden, wenn die Kreisfläche parallel mit der senkrechten Ebene steht und der senkrechte Durchmesser des Kreises normal auf die wagerechte Ebene gerichtet ist.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 25.) Denkt man sich die mit der senkrechten Ebene parallele Kreisfläche dieser senkrechten Ebene so nahe gerückt, daß der Kreis in die Ebene zu liegen kommt, so wird der Kreis $A'D'B'E'$ in seiner Projection wieder als Kreis erscheinen, und zwar von derselben Größe wie der gegebene war. Es ist demnach der Kreis $A'D'B'E'$ die gesuchte Projection. (§. 3 Anmerk. 1 u. 2.) Will man nun den Grundriß finden, so ziehe man die lothrechten Linien $A'A$, $D'D$, $C'C$, $E'E$, $B'B$, und dann die wagerechte Linie ACB , so ist dieselbe der gesuchte Grundriß, denn die sämtlichen Projectionenpunkte der

Kreisfläche, so viele man ihrer auch im Umkreise annehmen mag, fallen alle in die gerade und wagerechte Linie AB .

So liegen z. B. die Projectionen der drei Punkte des Durchmessers $D'C'E'$ alle in dem einzigen Punkte C der Linie ACB .

Anmerkung 1. Es siehe (Taf. 1 Fig. 26) der gegebene Kreis senkrecht in der wagerechten Ebene, man soll den Grundriß und Aufsriß dieses Kreises finden.

Zu diesem Zwecke zeichne man sich erst nach dem gegebenen Durchmesser den punktirten Kreis $A''D''B''J''$ auf die Linie $a b$.

Man theile ferner den Durchmesser dieses Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in vier, und ziehe durch die Theilungspunkte die senkrechten Linien $F'G'$, $D'E'$, $H'J'$, so hat man die nöthigen Hülfsmittel, um den Aufsriß zu ermitteln.

In je mehr Theile man den Durchmesser $A'B'$ theilt, um so mehr entstehen senkrechte Linien, und um so genauer ist man im Stande, die Aufsrißlinie zu finden, wie wir später sehen werden.

Um den Grundriß zu bestimmen, ziehe man die Linien $A'M$ und $B'N$, so wird die Linie MN die Projection des Kreises im Grundriße sein.

Diese Linie trage man nach ihrer Länge mit dem Zirkel von A nach B , so daß die Linie AB denjenigen Neigungswinkel macht, welchen man bestimmt hat, so ist die Linie AB der Grundriß des Kreises.

Um nun den Aufsriß zu finden ziehe man zuvörderst die punktirte Linie $D'D''$ willkürlich lang parallel mit $a b$; eben so verlängere man den Durchmesser $A'B'$ des Kreises willkürlich lang. Nun trage man aus dem punktirten Kreise die Punkte des Durchmessers $K'C'L'$ mit dem Zirkel in den Grundriß AB bei KCL . Hierauf ziehe man die Senkrechten AA'' , $CEC'D''$ und BB'' , so hat man die äußersten Punkte des Aufsrißes und den Mittelpunkt C'' gefunden. Um nun auch die zwischenliegenden Punkte zu finden, ziehe man die senkrechten $KG''K''F''$ und $LJ''L''H''$, alsdann nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie $K'F' = K'G'$ und trage sie auf dem Durchmesser $A''B''$ von K'' nach F'' und abwärts nach G'' .

Eben so nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie $L'H' = L'J'$ und trage sie auf dem Durchmesser $A''B''$, von L'' nach H'' und abwärts nach J'' . Verbindet man nun aus freier Hand die gefundenen Projectionenpunkte $A''F''D''H''B''J''E''$ durch eine krumme Linie, so hat man die verlangte Projection des Kreises gefunden.

Anmerkung 2. Stände der Kreis (Taf. 1 Fig. 27) senkrecht in der horizontalen Ebene und der wagerechte Durchmesser des Kreises normal gegen die senkrechte Ebene, so würde der Grundriß des Kreises die Linie AB und der Aufsriß die Linie $A'B'$ sein, denn die sämtlichen Projectionenpunkte der Kreisfläche werden bei der angenommenen Stellung sowohl im Aufsriß als im Grundriß in eine bloße gerade Linie zusammenfallen.

Anmerkung 3. Wäre die Kreisfläche (Taf. 1 Fig. 28) gegen die wagerechte Fläche unter einem bestimmten Winkel geneigt, so würde man Grund- und Aufsriß derselben auf folgende Weise finden.

Es sei MON der Durchmesser des Kreises, O der Mittelpunkt desselben und der Winkel NMP der Neigungswinkel gegen die wagerechte Ebene. Ferner sei der punktirte Kreis $A'D'B'E'$ die Projection des Kreises, welche parallel mit der senkrechten Ebene steht, so sind diese beiden Figuren die Hülfsmittel, um den