Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 14. Aufgabe. Es soll die Projection eines Kreises im Grund- und Aufriß gezeichnet werden, wenn die Kreisfläche parallel mit der senkrechten Ebene steht und der senkrechte Durchmesser des Kreises ...

gegebenen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt (wie vorhin), die Grundlinie des Quadrats neige sich aber ebenfalls unter einem beliebigen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene (Taf. 1 Fig. 23), so findet man Grund- und Aufriß des Quadrats wie folgt.

Die punktirte Linie A'' B'' giebt die Neigung des Quadrats gegen die wagerechte Ebene an. Zieht man die willkürlich lange Linie B' D' C' parallel mit a A' B' b, so zeigt der Raum zwischen diesen beiden Linien die Höhe an, welche der Aufriß einnehmen wird.

Zeichnet man sich nun den Grundriß A B C D (wie in Anmerkung 2) in diejenige schräge Lage, wovon die Neigung gegeben ist, so kann man aus diesem gefundenen Grundriß nunmehr den Aufriß bestimmen.

Zieht man nämlich die lothrechten Linien A A' und B B', so ist A' B' die Grundlinie des Aufrisses in ihrer Projection.

Zieht man ferner C C' und D D', so ist die Linie C' D' die obere Grenzlinie des Quadrats.

Zieht man nun noch A' C' und B' D', so ist die Figur A' C' D' B' die gesuchte Projection des Aufrisses. Man kann sich zur Uebung in jeder der geraden Linien mehrere Projectionspunkte annehmen und diese nach und nach bestimmen, wodurch man sich von der Wahrheit noch mehr überzeugen wird. Hier sind immer nur die Endpunkte der Linien gesucht und bestimmt worden, da die etwa in den geraden Linien angenommenen Zwischenpunkte doch mit diesen Endpunkten in ihren Projectionen immer wieder zusammenfallen. Auch kann man zur Uebung die Neigungswinkel willkürlich verändern, woraus immer andere Figuren im Grund und Aufriß entstehen werden.

Anmerkung 4. Denkt man sich das Quadrat senkrecht in der wagerechten Ebene stehend und zugleich unter einem rechten Winkel gegen die Grundlinie a b (Taf. 1 Fig. 24) der senkrechten Ebene geneigt, wie der Grundriß in der Linie A B zeigt, so erhält man den Aufriß, wenn man die lothrechte Linie A' B' zieht und A' B'' so lang macht wie eine Seite des Quadrats, = A B. Es fällt alsdann die Ebene des Quadrats sowohl bei dem Grundrisse, als bei dem Aufrisse, in einzelne gerade Linien zusammen, nämlich in die Linie A B für den Grundriß und in die Linie A' B' für den Aufriß. (§. 4 Anmerk. 3.)

§. 14.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Kreises im Grund- und Aufriß gezeichnet werden, wenn die Kreisfläche parallel mit der senkrechten Ebene steht und der senkrechte Durchmesser des Kreises normal auf die wagerechte Ebene gerichtet ist.

Auflösung. (Taf. 1 Fig. 25.) Denkt man sich die mit der senkrechten Ebene parallele Kreisfläche dieser senkrechten Ebene so nahe gerückt, daß der Kreis in die Ebene zu liegen kommt, so wird der Kreis A' D' B' E' in seiner Projection wieder als Kreis erscheinen, und zwar von derselben Größe wie der gegebene war. Es ist demnach der Kreis A' D' B' E' die gesuchte Projection. (§. 3 Anmerk. 1 u. 2.) Will man nun den Grundriß finden, so ziehe man die lothrechten Linien A' A, D' C' E' C, B' B, und dann die wagerechte Linie A C B, so ist dieselbe der gesuchte Grundriß, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der

Kreisfläche, so viele man ihrer auch im Umkreise annehmen mag, fallen alle in die gerade und wagerechte Linie A B.

So liegen z. B. die Projectionen der drei Punkte des Durchmessers D' C' E' alle in dem einzigen Punkte C der Linie A C B.

Anmerkung 1. Es stehe (Taf. 1 Fig. 26) der gegebene Kreis senkrecht in der wagerechten Ebene, aber schräg gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene, man soll den Grundriß und Aufriß dieses Kreises finden.

Zu diesem Zwecke zeichne man sich erst nach dem gegebenen Durchmesser den punktirten Kreis A'' D'' B'' J'' auf die Linie a b.

Man theile ferner den Durchmesser dieses Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier in vier, und ziehe durch die Theilungspunkte die senkrechten Linien F' G', D' E', H' J', so hat man die nöthigen Hülfsmittel, um den Aufriß zu ermitteln.

In je mehr Theile man den Durchmesser A' B' theilt, um so mehr entstehen senkrechte Linien, und um so genauer ist man im Stande, die Aufrißlinie zu finden, wie wir später sehen werden.

Um den Grundriß zu bestimmen, ziehe man die Linien A' M und B' N, so wird die Linie M N die Projection des Kreises im Grundrisse sein.

Diese Linie trage man nach ihrer Länge mit dem Zirkel von A nach B, so daß die Linie A B denjenigen Neigungswinkel macht, welchen man bestimmt hat, so ist die Linie A B der Grundriß des Kreises.

Um nun den Aufriß zu finden ziehe man zuvörderst die punktirte Linie D' D'' willkürlich lang parallel mit a b; eben so verlängere man den Durchmesser A' B' des Kreises willkürlich lang. Nun trage man aus dem punktirten Kreise die Punkte des Durchmessers K' C'' L' mit dem Zirkel in den Grundriß A B bei K C L. Hierauf ziehe man die Senkrechten A A'', C E C'' D'' und B B'', so hat man die äußersten Punkte des Aufrisses und den Mittelpunkt C'' gefunden. Um nun auch die zwischenliegenden Punkte zu finden, ziehe man die senkrechten K G'' K'' F'' und L J'' L'' H'', alsdann nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie K' F' = K' G' und trage sie auf dem Durchmesser A'' B'' von K'' nach F'' und abwärts nach G''.

Eben so nehme man mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie L' H' = L' J' und trage sie auf dem Durchmesser A'' B'', von L'' nach H'' und abwärts nach J''. Verbindet man nun aus freier Hand die gefundenen Projectionspunkte A' F' D' H' B' J' E' durch eine krumme Linie, so hat man die verlangte Projection des Kreises gefunden.

Anmerkung 2. Stände der Kreis (Taf. 1 Fig. 27) senkrecht in der horizontalen Ebene und der wagerechte Durchmesser des Kreises normal gegen die senkrechte Ebene, so würde der Grundriß des Kreises die Linie A B und der Aufriß die Linie A' B' sein, denn die sämmtlichen Projectionspunkte der Kreisfläche werden bei der angenommenen Stellung sowohl im Aufriß als im Grundriß in eine bloße gerade Linie zusammenfallen.

Anmerkung 3. Wäre die Kreisfläche (Taf. 1 Fig. 28) gegen die wagerechte Fläche unter einem bestimmten Winkel geneigt, so würde man Grund- und Aufriß derselben auf folgende Weise finden.

Es sei M O N der Durchmesser des Kreises, O der Mittelpunkt desselben und der Winkel N M P der Neigungswinkel gegen die wagerechte Ebene. Ferner sei der punktirte Kreis A' D' B' E' die Projection des Kreises, welche parallel mit der senkrechten Ebene steht, so sind diese beiden Figuren die Hülfsmittel, um den geforderten Grundriß und Aufriß zu finden. Zuerst wollen wir den Aufriß aufsuchen.

Die Linie N P ist die senkrechte Projection des Kreisdurchmessers M N. Nimmt man nun die Linie N P in den Zirkel und setzt sie von E″ nach D″, so hat man den Höhendurchmesser des Kreises, und wenn man die Höhe P U von E″ nach C″ trägt, so ist C″ der Mittelpunkt des Projectionskreises. Zieht man durch den Punkt C″ die Wagerechte A″ B″ willkürlich lang, so wird in dieser Linie der Breitendurchmesser des Kreises liegen.

Trägt man nun mit dem Zirkel aus dem punktirten Kreise die Linie A′ C′ von C″ nach A″ und die Linie C′ B′ von C″ nach B″, so hat man in den Punkten A″ D″ B″ E″ die vier äußersten Punkte der Kreisfläche gefunden.

Um nun noch die Zwischenpunkte zu finden, verfahre man folgendermaßen.

Man trage aus dem Durchmesser des punktirten Kreises die Entfernung C′ K′ auf der Linie M N, von O nach X und die Entfernung C′ L′ von O nach W. Ferner ziehe man die Wagerechten X T und W V, so sind T und V die Höhenprojectionen von X und W. Trägt man nun die Entfernung U T von C″ nach K″ und die Entfernung U W von C″ nach L″, so sind K″ und L″ die Projectionen der Punkte T und V. Zieht man durch K″ und L″ wagerechte Linien beliebig lang und setzt aus dem punktirten Kreise die Entfernung K′ F mit dem Zirkel von K″ nach F″ und die Entfernung K′ G′ von K″ nach G″; ferner trägt man die Entfernung H′ L von L″ nach H″ und die Entfernung L′ J′ von L″ nach J″, so hat man die Zwischenpunkte F″ G″ J″ H″ gefunden. Verbindet man nun aus freier Hand die Punkte E″ H″ A″ F″ D″ G″ B″ J″ durch eine krumme Linie, so erhält man die Projection der gesuchten Kreisfläche im Aufriß.

Will man nun den Grundriß dazu finden, so verfährt man wie folgt.

Man ziehe die willkürlich lange Mittellinie A B und verlängere die Mittellinie D″ E″ des oberen Kreises nach unten willkürlich lang, so ist C der Mittelpunkt des Grundrisses.

Die Linie M P in dem Dreieck M N P ist die Projection der Linie M N, oder, was dasselbe ist, M P ist der Durchmesser des Kreises in der Grundrißprojection. Setzt man nun die Entfernung R P von C nach D und die Entfernung R M von C nach E, so hat man in D und E die äußersten Punkte des Breitendurchmessers gefunden; trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Länge C′ A′ von C nach A und die Länge C′ B′ von C nach B, so hat man in A und B die äußersten Punkte des Längendurchmessers gefunden.

Um die Zwischenpunkte zu finden verfahre man wie folgt.

Man ziehe in dem Dreieck M N P die Senkrechten W S, O R und X Q, so erhält man in den Punkten S R Q die Projectionen der Punkte W O X. Trägt man nun die Entfernung R Q von C nach K und die Entfernung R S von C nach L, so sind K und L diejenigen Projectionspunkte, welche mit S und Q, mit W und X und im punktirten Kreise mit K′ und L′ übereinstimmen.

Trägt man nun aus dem punktirten Kreise die Entfernung K′ G′ von K nach G und die Entfernung K′ F′ von K nach F, so hat man die oberen Zwischenpunkte gefunden.

Trägt man ferner aus dem punktirten Kreise die Entfernung L′ J′ von L nach J und die Entfernung L′ K′ von L nach K, so hat man die beiden unteren Zwischenpunkte gefunden.

Verbindet man nun die sämmtlichen Projectionspunkte A F D G B J E durch eine krumme Linie, so hat man die gesuchte Projection der Kreisfläche im Grundriß.

Es ist von selbst einleuchtend, daß, jemehr Punkte des Umkreises man in ihrer Projection sucht, um so genauer findet man die Projection der ganzen Kreislinie.

NB. Es sind nicht immer alle Hülfslinien genannt worden, welche gezogen werden müssen und die man schon in der Zeichnung von selbst sieht, um den Text dadurch nicht ohne Noth zu weitläufig und mithin schwerer verständlich zu machen.

Anmerkung 4. (Taf. 1 Fig. 29.) Es sei derselbe Kreis wie in Anmerk. 3 gegeben. Der Kreis neige sich unter gleichem Winkel wie dort gegen die wagerechte Ebene, sein Grundriß stehe aber gleichzeitig unter einem gegebenen Winkel gegen die Grundlinie a b der senkrechten Ebene geneigt; man soll Grundriß und Aufriß finden.

Zuvörderst vergegenwärtige man sich alles das genau, was in der vorigen Anmerk. 3 über das Auffinden des Grund- und Aufrisses gesagt wurde.

Man denke sich nun den Grundriß der vorigen Figur (28) in Fig. 29 gezeichnet, aber so, daß seine Achse A B mit der Grundlinie a b der senkrechten Ebene den vorgeschriebenen Winkel mache, so ist der gesuchte Grundriß gefunden. (Wären andere Winkel für die Neigungen der Kreisfläche gegeben als in der vorigen Fig. 28, so bliebe nichts weiter übrig, als den Grundriß in gleicher Weise wie in Anmerk. 3 zu suchen, aber für die schräg geneigten Durchmesser A B und E D.)

Den Aufriß findet man, wie folgt.

Man bestimme erst aus dem gegebenen Durchmesser und der gegebenen Neigung desselben die Abstände der parallelen Linien N D″, X F″, O A″, W H″. Nun ziehe man vom Grundrisse aus aufrecht die Normalen D D″, C C″, E E″, A A″, B B″, so hat man die Projectionen der Durchmesser und des Mittelpunktes gefunden.

Auf gleiche Weise bestimmt man die Punkte F″ G″ J″ H″, und der gesuchte Aufriß ist gefunden.

Anmerkung 5. Sollte eine elliptische Fläche oder ein regelmäßiges Vieleck, ein Achteck, Sechseck 2c. gezeichnet werden, so würde in allen Fällen ganz in ähnlicher Weise Grund- und Aufriß dafür gefunden werden, wie wir es in dem vorliegenden §. 14 und den zugehörigen vier Anmerkungen gesehen haben.

Zur Uebung kann man sich diese Aufgaben selbst stellen und lösen. Ob man falsch gezeichnet hat, wird man sogleich sehen, wenn man die gesuchten Punkte nicht auffinden kann.

§. 15.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Würfels (Cubus) im Grund- und Aufrisse gezeichnet werden, wenn der Würfel in der wagerechten Ebene steht und seine senkrechte Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist. (Tafel 2 Fig. 30.)

Auflösung. Wenn der in der wagerechten Ebene stehende Würfel im Grundriß gezeichnet werden soll, so giebt er das Quadrat A B C D, denn die obere Fläche fällt mit der unteren zusammen, weil sie parallel mit derselben ist. Eben so fallen die vier Kanten des Würfels in ihrer Projection in den vier Punkten