Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 16. Aufgabe. Es soll die Projection eines Prisma gefunden werden, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist (Tafel 2 Fig. 34), wenn die senkrechte Ebene und das Prisma in der wagerechten ...

A B C D zusammen und Quadrat A B C D ist der gesuchte Grundriß des Cubus. (§. 5.)

Den Aufriß findet man, wenn man die Seiten A C und B D des Grundrisses senkrecht bis über die Grundlinie a b der senkrechten Ebene verlängert, A' C' und B' D' gleich A C und B D macht und C' D' zieht, so ist das Quadrat A' C' D' B' der gesuchte Aufriß. (§. 5 Anmerk. 1.)

Hier fallen ebenfalls die beiden senkrechten Ebenen zusammen in das Quadrat A' B' C' D' und die vier auf die senkrechte Ebene normalen Kanten des Würfels fallen in den Punkten A' C' D' B' zusammen.

Anmerkung 1. Sollte man von dem Würfel in Figur 30 einen senkrechten Durchschnitt zeichnen (§. 7), so verfahre man wie folgt.

Es sei (Fig. 30) die punktirte Linie E F im Grundriß die Richtung einer senkrechten Ebene, welche durch den Würfel liegt.

Trägt man die Länge der Linie E F in Fig. 31 auf der Linie a b von A nach B, so ist A B = E F. Da nun aber E F auch = A' B' ist, so ist A B die Grundlinie des Würfeldurchschnittes. Zieht man nun Fig. 31 die Senkrechten A C und B D und macht A C = A' C' und B D = B' D', so hat man die Kanten des Durchschnittes, verbindet man dann noch C mit D, so ist A B C D Fig. 31 die gesuchte Durchschnittsebene.

Anmerkung 2. Es sei der Würfel unter einem beliebigen Winkel gegen die wagerechte Ebene geneigt, man soll Grund- und Aufriß davon zeichnen, wenn der geneigte Würfel mit seiner vorderen Fläche parallel mit der senkrechten Ebene steht. (Tafel 2 Fig. 32.)

Das Quadrat A B C D wird der verlangte Aufriß sein, wenn man die Linie A B desselben unter dem vorgeschriebenen Winkel gegen die Linie a b geneigt hat.

Um den Grundriß zu finden, ziehe man von den Punkten A B C D des Aufrisses normale Linien abwärts und ziehe dann die wagerechte Linie B' C' D', nun mache man B' E', C' F' und D' G' gleich einer Seite des Würfels, so ist der Grundriß gefunden. Die Kante A' H' wird von der Fläche F' G' D' C' verdeckt und nicht sichtbar sein; eben so werden die unterhalb liegenden Flächen des Würfels, welche im Aufriß durch die Linien B A und A D dargestellt werden, im Grundriß nicht zu stehen kommen.

Anmerkung 3. Es sei (Tafel 2 Fig. 33) der Würfel schräg gegen die wagerechte Ebene geneigt, aber er stehe mit der senkrechten Ebene nicht parallel.

Fig. 33 sei auf der Grundlinie a b der senkrechten Ebene der Durchschnitt A B C D des Würfels unter dem vorgeschriebenen Neigungswinkel gezeichnet.

Um den Aufriß zu bekommen, ziehe man die beliebig langen Wagerechten C D' C' und B E' B', ferner trage man auf die Linie a b die Linie A' F' so lang auf, als eine Seite des Würfels ist, so hat man die Grundlinie des Aufrisses gefunden, nun ziehe man die Senkrechten A' B' C' und F' E' D', verbinde C' wagerecht mit D' und B' wagerecht mit E', so ist die Figur A' B' C' D' E' F' der gesuchte Aufriß.

Will man nun den Grundriß finden, so verfährt man wie folgt.

Von den Kanten des Durchschnittes B C D ziehe man die Senkrechten B E, C F, D G. Nun verlängere man die Seitenlinien des Aufrisses nach unten willkürlich lang und ziehe die

Wagerechte C'' D'', alsdann mache man C'' B'' und D'' E'' gleich lang mit E F und B'' A'' und E'' F'' gleich lang mit F G, verbinde dann B'' mit E'' und A'' mit F'', so ist die Figur A'' B'' C'' D'' E'' F'' der gesuchte Grundriß.

Anmerkung 4. Wäre der gegebene Körper anstatt eines Würfels, ein Prisma, mit quadratischer Ober- und Unterfläche, so würde die Aufsuchung seiner Grund- und Aufrisse so wie seines Durchschnittes ganz eben so erfolgen, wie wir es eben §. 15 für den Würfel gezeigt haben.

Zur Uebung kann man sich anstatt eines Würfels nun einen prismatischen Körper mit quadratischer Grundfläche in allen Lagen, wie vorher den Würfel zeichnen.

§. 16.

Aufgabe. Es soll die Projection eines Prisma gefunden werden, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist (Tafel 2 Fig. 34), wenn die senkrechte Achse des Prisma parallel mit der senkrechten Ebene und das Prisma in der wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Der Grundriß wird durch das regelmäßige Achteck A B C D E F G H dargestellt werden, denn die Projection der oberen achteckigen Fläche fällt mit der Projection der Grundfläche zusammen. (§. 5.) Eben so fallen die sämmtlichen senkrechten Kanten des Prisma mit den Punkten A B C ... zusammen. Es ist also das Achteck A B C D E F G H der gesuchte Grundriß.

Will man nun den Aufriß zeichnen, so ziehe man von den Eckpunkten des Grundrisses aufwärts beliebig lange Linien, so wird H' C' dem unteren Durchmesser des Achtecks gleich sein. Nimmt man ferner in den Zirkel das gegebene Maß der Höhe des Prisma und setzt dieses Maß von H' nach J', von A' nach K', von B' nach L', von C' nach M' und zieht die Linie J' K' L' M', so hat man den Aufriß gefunden.

Die Seitenflächen des Prisma, wovon H G, G F, F E, E D und D C im Grundriß die Projectionen sind, werden nicht sichtbar erscheinen, indem sie, wie man sich leicht durch den Augenschein überzeugen kann, im vorliegenden Falle durch die vorderen sichtbaren Flächen gedeckt werden.

Eben so sieht man von der oberen und unteren achteckigen Fläche nichts, als die geraden Linien im Aufrisse H' A' B' C' und J' K' L' M'. (§. 4 Anmerk. 5.)

Anmerkung 1. (Tafel 2 Fig. 35.) Wenn das achteckige Prisma mit der wagerechten Ebene einen bestimmten Winkel macht, die Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene liegt, so findet man den Aufriß folgendermaßen.

Man zeichne den Aufriß des Prisma aus Fig. 34 (wo derselbe aufrecht steht) in der geneigten Lage auf, wie er Fig. 35 unter dem angenommenen Winkel vorgestellt ist, so hat man den verlangten Aufriß.

Die Projectionspunkte A' H' G' F' des Aufrisses stimmen nun mit den Projectionspunkten des Grundrisses A H G F Fig. 34 überein. Die Punkte B' C' D' E' des Aufrisses fallen in ihrer Projection mit den Punkten A' H' G' F' zusammen und sind nicht sichtbar.

Zieht man im Grundriß die Parallelen H P, F K, E L, C Q so weit von einander wie sie im Aufrisse von einander abstehen, zieht dann von den Punkten F′ G′ H′ A′, O′ M′ Q′ K′ normale Linien nach dem Grundrisse und bemerkt die mit den Aufrißkanten übereinstimmenden Durchschnittspunkte A B D C E F H G ꝛc., so hat man, wenn man diese mit geraden Linien verbindet, den Grundriß gefunden.

Anmerkung 2. Es neige sich das Prisma unter demselben Winkel wie in Anmerk. 1 gegen die wagerechte Ebene, stehe aber mit der Projection seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene wie Tafel 2 Fig. 36, so findet man den Grundriß, wenn man den in Fig. 35 bereits gefundenen Grundriß in diejenige Lage zeichnet, wie er in Fig. 36 angegeben ist.

Zieht man nun aus den Aufrißkanten Fig. 35 die parallelen Hülfslinien O N, M J, O P, L K ꝛc. nach Fig. 36 herüber und eben so aus den Kanten des Grundrisses Fig. 36 die normalen Hülfslinien hinauf in den Aufriß, bemerkt die Durchschnittspunkte und verbindet diese im Aufriß durch die Linien O′ N′, N′ J′, J′ P′, P′ K′ ꝛc. ꝛc., so erhält man den Aufriß des Prisma in der vorgeschriebenen Lage.

Zur Bequemlichkeit sind im Grundriß und Aufriß gleiche Buchstaben zur Bezeichnung der Kantenpunkte gewählt worden, wodurch das Aufsuchen bedeutend erleichtert wird, besonders wenn man auf die einander entgegen stehenden Buchstaben Rücksicht nimmt, so steht z. B. dem A in Grund- und Aufriß das K entgegen, dem B das L (als Anfang und Ende der Seitenkanten des Prisma) dem D das Q ꝛc. ꝛc.

Zur Uebung kann man auch den Grundriß in einer schrägen Lage gezeichnet annehmen und dann den zugehörigen Aufriß suchen.

§. 17.

Aufgabe. Man soll einen Cylinder im Grund- und Aufriß zeichnen, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. So wie für diese Stellung der Grundriß eines Cubus ein Quadrat war, so wird (Tafel 2 Fig. 37) der Grundriß des Cylinders ein Kreis sein. Denn wenn man sich einen Cylinder in der wagerechten Ebene senkrecht stehend denkt, so werden alle in seinem Mantel gedachten senkrechten Linien in ihren Projectionen in einzelnen Punkten zusammenfallen, und wenn man diese Projectionspunkte dann durch eine krumme Linie verbindet, so wird ein Kreis entstehen, welcher der verlangte Grundriß ist. (§. 3 u. §. 4.)

Um den Aufriß zu finden, ziehe man die Linien A A′ F′, E C D E′ D, B B′ G′ willkürlich lang, setze von A′ nach F′, von E′ nach D′ und von B′ nach G′ die gegebene Höhe des Cylinders, so ist die Figur A′ F′ D′ G′ B′ E′ der gesuchte Aufriß, denn die Normalen, welche man sich im Mantel des Cylinders als Hülfslinien denkt, erscheinen in der Aufrißprojection alle gleich lang und folglich erscheint die Hälfte des Mantels vom Cylinder hier im Aufriß als Rechteck, welches die Höhe des Cylinders zur Höhe und den Durchmesser des Cylinders zur Breite hat.

Anmerkung 1. Wäre (Tafel 2 Fig. 38) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, seine Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Den Aufriß findet man, wenn der Aufriß des Cylinders, wie er sich in Figur 37 dargestellt hatte, in Figur 38 eben so gezeichnet wird, nur mit dem Unterschiede, daß man ihn unter dem angenommenen Winkel gegen die Linie a b neigt.

Den Grundriß findet man, wenn man von dem Aufrisse aus den bezeichneten Punkten A B . . . die nöthigen Normalen abwärts zieht und die Achse des Cylinders im Grundrisse bestimmt. Macht man nun den Cylinder im Grundrisse eben so breit wie er im Aufrisse war und sucht mit Hülfe von §. 14 die obere und untere Kreisfläche, so ist der Grundriß für den geforderten Fall dargestellt.

Anmerkung 2. Es stünde (Tafel 2 Fig. 39) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, wie vorhin, er sei aber auch gegen die senkrechte Ebene geneigt, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Zuvörderst zeichne man sich den gegebenen Cylinder A B F G unter der gegebenen Neigung auf die Linie a b. Dann ziehe man die wagerechten Hülfslinien F F′, D H′ D′ J′ ꝛc. parallel mit a b, so wird der zu suchende Aufriß zwischen der Linie a b und F F′ liegen. Nun bestimme man zuerst die Achse des Aufrisses B′ . . F′ und ziehe damit parallel die Senkrechten K′ H′ und J′ L′, nachdem man D′ J′, D′ H′ gleich den Radien der Kreisflächen gemacht hat, bestimme alsdann die einzelnen Projectionspunkte der Kreise und verbinde sie mit einer krummen Linie, so ist der Aufriß dargestellt.

Je mehr Punkte im Umkreise man (§. 14) bestimmt, um so genauer wird die Figur.

Um nun den Grundriß zu finden, ziehe man in dem Hülfsaufrisse A B F G die Normalen A Q, C P, F M, D N, G O, ferner ziehe man von dem bereits gefundenen Aufrisse die Normalen H′ H″, G′ G″, J′ J″ willkürlich lang.

Nun bestimme man den Mittelpunkt C″ willkürlich, alsdann suche man die Projection des zugehörigen Kreises, darin ist B″ C″ = B P, C″ A″ = P Q, C″ K″ = C′ K′ und C″ L″ = C′ L′.

Ferner suche man die Projection der Achse des Grundrisses C″ D″ = P N. Hierdurch ist auch der Mittelpunkt D″ des zugehörigen Kreises bestimmt. Zu diesem Mittelpunkte D″ suche man wie vorhin den zugehörigen Kreis, so ist darin F″ D″ = M N, D″ G″ = N O, D″ H″ = D′ H und D″ J″ = D′ J′.

Je mehr Punkte dieser Kreise man nach §. 14 sucht, um so genauer wird die Figur, wenn man die gefundenen einzelnen Projectionspunkte der Kreise durch krumme Linien verbindet.

§. 18.

Aufgabe. Es soll der Grund- und Aufriß eines Kegels gefunden werden, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Höhenachse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. Der Grundriß desselben (Tafel 2 Fig. 40) wird ein Kreis sein, eben so groß, wie der Kreis, welcher die Grundfläche des Kegels bildet. (§. 5 u. §. 14.)

Den Aufriß findet man, wenn man von C aus die Normale C C′ D′ willkürlich lang zieht und von C′ nach D′ die gegebene Höhe des Kegels mit dem Zirkel aufträgt. Dann zieht man die Linien A′ D′ und D′ B′, so ist A′ D′ B′ der Kegel im Aufriß; denn die Linie A′ B′ ist die Projection der Grundfläche und das Dreieck A′ D′ B′ ist die Projection der Hälfte des Kegelmantels.