Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 18. Aufgabe. Es soll der Grund- und Aufriß eines Kegels gefunden werden, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Höhenachse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

zieht dann von den Punkten F′ G′ H′ A′, O′ M′ Q′ K′ normale Linien nach dem Grundrisse und bemerkt die mit den Aufrißkanten übereinstimmenden Durchschnittspunkte A B D C E F H G 2c., so hat man, wenn man diese mit geraden Linien verbindet, den Grundriß gefunden.

Anmerkung 2. Es neige sich das Prisma unter demselben Winkel wie in Anmerk. 1 gegen die wagerechte Ebene, stehe aber mit der Projection seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene wie Tafel 2 Fig. 36, so findet man den Grundriß, wenn man den in Fig. 35 bereits gefundenen Grundriß in diejenige Lage zeichnet, wie er in Fig. 36 angegeben ist.

Zieht man nun aus den Aufrißkanten Fig. 35 die parallelen Hülfslinien O N, M J, O P, L K 2c. nach Fig. 36 herüber und eben so aus den Kanten des Grundrisses Fig. 36 die normalen Hülfslinien hinauf in den Aufriß, bemerkt die Durchschnittspunkte und verbindet diese im Aufriß durch die Linien O′ N′, N′ J′, J′ P′, P′ K′ 2c. 2c., so erhält man den Aufriß des Prisma in der vorgeschriebenen Lage.

Zur Bequemlichkeit sind im Grundriß und Aufriß gleiche Buchstaben zur Bezeichnung der Kantenpunkte gewählt worden, wodurch das Aufsuchen bedeutend erleichtert wird, besonders wenn man auf die einander entgegen stehenden Buchstaben Rücksicht nimmt, so steht z. B. dem A in Grund- und Aufriß das K entgegen, dem B das L (als Anfang und Ende der Seitenkanten des Prisma) dem D das Q 2c. 2c.

Zur Uebung kann man auch den Grundriß in einer schrägen Lage gezeichnet annehmen und dann den zugehörigen Aufriß suchen.

§. 17.

Aufgabe. Man soll einen Cylinder im Grund- und Aufriß zeichnen, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Achse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. So wie für diese Stellung der Grundriß eines Cubus ein Quadrat war, so wird (Tafel 2 Fig. 37) der Grundriß des Cylinders ein Kreis sein. Denn wenn man sich einen Cylinder in der wagerechten Ebene senkrecht stehend denkt, so werden alle in seinem Mantel gedachten senkrechten Linien in ihren Projectionen in einzelnen Punkten zusammenfallen, und wenn man diese Projectionspunkte dann durch eine krumme Linie verbindet, so wird ein Kreis entstehen, welcher der verlangte Grundriß ist. (§. 3 u. §. 4.)

Um den Aufriß zu finden, ziehe man die Linien A A′ F′, E C D E′ D, B B′ G′ willkürlich lang, setze von A′ nach F′, von E′ nach D′ und von B′ nach G′ die gegebene Höhe des Cylinders, so ist die Figur A′ F′ D′ G′ B′ E′ der gesuchte Aufriß, denn die Normalen, welche man sich im Mantel des Cylinders als Hülfslinien denkt, erscheinen in der Aufrißprojection alle gleich lang und folglich erscheint die Hälfte des Mantels vom Cylinder hier im Aufriß als Rechteck, welches die Höhe des Cylinders zur Höhe und den Durchmesser des Cylinders zur Breite hat.

Anmerkung 1. Wäre (Tafel 2 Fig. 38) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, seine Achse aber parallel mit der senkrechten Ebene, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Den Aufriß findet man, wenn der Aufriß des Cylinders, wie er sich in Figur 37 dargestellt hatte, in Figur 38 eben so gezeichnet wird, nur mit dem Unterschiede, daß man ihn unter dem angenommenen Winkel gegen die Linie a b neigt.

Den Grundriß findet man, wenn man von dem Aufrisse aus den bezeichneten Punkten A B . . . die nöthigen Normalen abwärts zieht und die Achse des Cylinders im Grundrisse bestimmt. Macht man nun den Cylinder im Grundrisse eben so breit wie er im Aufrisse war und sucht mit Hülfe von §. 14 die obere und untere Kreisfläche, so ist der Grundriß für den geforderten Fall dargestellt.

Anmerkung 2. Es stünde (Tafel 2 Fig. 39) der Cylinder gegen die wagerechte Ebene geneigt, wie vorhin, er sei aber auch gegen die senkrechte Ebene geneigt, so findet man Aufriß und Grundriß wie folgt.

Zuvörderst zeichne man sich den gegebenen Cylinder A B F G unter der gegebenen Neigung auf die Linie a b. Dann ziehe man die wagerechten Hülfslinien F F′, D H′ D′ J′ 2c. parallel mit a b, so wird der zu suchende Aufriß zwischen der Linie a b und F F′ liegen. Nun bestimme man zuerst die Achse des Aufrisses B′ . . F′ und ziehe damit parallel die Senkrechten K′ H′ und J′ L′, nachdem man D′ J′, D′ H′ gleich den Radien der Kreisflächen gemacht hat, bestimme alsdann die einzelnen Projectionspunkte der Kreise und verbinde sie mit einer krummen Linie, so ist der Aufriß dargestellt.

Je mehr Punkte im Umkreise man (§. 14) bestimmt, um so genauer wird die Figur.

Um nun den Grundriß zu finden, ziehe man in dem Hülfsaufrisse A B F G die Normalen A Q, C P, F M, D N, G O, ferner ziehe man von dem bereits gefundenen Aufrisse die Normalen H′ H″, G′ G″, J′ J″ willkürlich lang.

Nun bestimme man den Mittelpunkt C″ willkürlich, alsdann suche man die Projection des zugehörigen Kreises, darin ist B″ C″ = B P, C″ A″ = P Q, C″ K″ = C′ K′ und C″ L″ = C′ L″.

Ferner suche man die Projection der Achse des Grundrisses C″ D″ = P N. Hierdurch ist auch der Mittelpunkt D″ des zugehörigen Kreises bestimmt. Zu diesem Mittelpunkte D″ suche man wie vorhin den zugehörigen Kreis, so ist darin F″ D″ = M N, D″ G″ = N O, D″ H″ = D′ H und D″ J″ = D′ J′.

Je mehr Punkte dieser Kreise man nach §. 14 sucht, um so genauer wird die Figur, wenn man die gefundenen einzelnen Projectionspunkte der Kreise durch krumme Linien verbindet.

§. 18.

Aufgabe. Es soll der Grund- und Aufriß eines Kegels gefunden werden, wenn derselbe in der wagerechten Ebene steht und seine Höhenachse parallel mit der senkrechten Ebene ist.

Auflösung. Der Grundriß desselben (Tafel 2 Fig. 40) wird ein Kreis sein, eben so groß, wie der Kreis, welcher die Grundfläche des Kegels bildet. (§. 5 u. §. 14.)

Den Aufriß findet man, wenn man von C aus die Normale C C′ D′ willkürlich lang zieht und von C′ nach D′ die gegebene Höhe des Kegels mit dem Zirkel aufträgt. Dann zieht man die Linien A′ D′ und D′ B′, so ist A′ D′ B′ der Kegel im Aufriß; denn die Linie A′ B′ ist die Projection der Grundfläche und das Dreieck A′ D′ B′ ist die Projection der Hälfte des Kegelmantels.

Anmerkung 1. Soll man mehr Punkte des Mantels im Grund- und Aufrisse finden, so bestimme man die Punkte, welche man finden will; z. B. man will den Punkt E' zwischen A' und D' suchen.

Der Punkt E' aber liegt in der Mitte zwischen A' und D', folglich liegt der Punkt E' im Grundrisse in der Mitte des Radius A C, bei E, denn der Radius A C des Grundrisses ist zugleich die Projection der schrägen Linie A' D' im Aufrisse.

Eben so würde man die Projection des Punktes F' im Aufrisse bei F im Grundrisse finden.

Sollte man den Punkt J des Grundrisses im Aufrisse bestimmen, so ziehe man CJG, trage die Projection von G nach G' und ziehe G' D'; trägt man nun die Projection von dem Punkte J des Grundrisses hinauf nach der Linie G'D' des Aufrisses, so findet man den Punkt J' (wo sich die Projectionslinien schneiden), als den gesuchten Projectionspunkt von J.

Eben so würde man den Punkt K des Grundrisses bei K' im Aufrisse finden.

Wäre umgekehrt der Punkt J' im Aufrisse gegeben und man sollte aus ihm den Punkt J des Grundrisses bestimmen, so ziehe man erst die wagerechte Hülfslinie J' E', ferner die Normale E'E bis zum Durchmesser des Kreises im Grundrisse (weil A' D' die Projection von A C ist).

Beschreibt man nun im Grundrisse mit dem Radius C E einen Kreis, so ist dieser die Projection der wagerechten Linie E' F' des Aufrisses und alle Punkte, welche in der Linie E' F' des Aufrisses liegen, werden in ihrer Projection in den Kreis E J K F im Grundrisse fallen; eben so wie alle Punkte der Linie A' G' C' H' B'' in dem Kreise A G L H B des Grundrisses liegen.

Will man nun den Punkt J' des Aufrisses im Grundrisse bestimmen, so zieht man von J' abwärts die Normale J' J, alsdann ist J der gesuchte Punkt.

Eben so würde man aus dem Punkte K' des Aufrisses den Punkt K des Grundrisses finden.

Man sieht hieraus, daß sich auf ähnliche Weise jeder beliebige Punkt des Grundrisses im Aufrisse und umgekehrt finden läßt.

Anmerkung 2. Läge der Kegel, wie in Tafel 2 Fig. 41, mit einer Seite in der wagerechten Ebene, so würde sein Aufriß das Dreieck D' A' B' sein und C' die Projection des Kreisdurchmessers, so wie auch dessen Mittelpunkt, und die Linie A' C' B' würde die Projection der Kegelgrundfläche (des Kreises) darstellen.

Den Grundriß würde man finden, wenn man zuvörderst nach §. 14 Anmerk. 3 die Kreisfläche suchte. Sie bestimmt sich zunächst durch die Normalen B' B, C' C, A' A und daraus, daß man C E = C' B' und C F = C' A' macht.

Zieht man dann von C im Grundrisse die Wagerechte C D und von D' die Normale D' D, so ist C D im Grundrisse die Achse des Kegels und wenn man noch D F und D E im Grundrisse zieht, hat man den ganzen verlangten Grundriß des Kegels gefunden.

Zur Uebung zeichne man sich noch den Kegel in mehreren andern Lagen, z. B. im Grundrisse auch schräg gegen die senkrechte Ebene gestellt, oder in bestimmten Lagen, über oder unter der wagerechten Ebene, oder hinter oder vor der senkrechten Ebene.

§. 19.

Aufgabe. Es soll eine Kugel im Grund- und Aufriß gezeichnet werden. (Tafel 2 Fig. 42.)

Auflösung. Die sämmtlichen Projectionspunkte einer Kugel, welche man sich vom Mantel derselben auf eine wagerechte Ebene gezogen denkt, werden einen Kreis darstellen, dessen Durchmesser gleich dem gegebenen Durchmesser der Kugel war.

Es ist also in Fig. 42 der Kreis mit dem Durchmesser A B die Projection der Kugel im Grundriß.

Eben so wird der Aufriß einer Kugel wieder ein Kreis sein, dessen Durchmesser dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich ist und es wird der Kreis mit dem Durchmesser A' B der Aufriß der Kugel sein.

Anmerkung 1. Der Grundriß einer Halbkugel (Tafel 2 Fig. 43) ist aus obigen Gründen in der wagerechten Ebene wieder ein Kreis, wenn der Durchmesser der Kugel parallel mit der wagerechten Ebene liegt und der Aufriß der Halbkugel ist in diesem Falle ein halber Kreis mit dem Durchmesser der gegebenen Kugel.

Anmerkung 2. Will man bestimmte Punkte auf einer Halbkugel-Oberfläche finden, so verfährt man folgendermaßen.

Es sei (Tafel 2 Fig. 44) A' B' D' der Aufriß, A C B der Durchmesser des Grundrißkreises.

Im Grundrisse sei der Punkt E gegeben, man soll seine Lage im Aufrisse bestimmen.

Man ziehe die Linie E C' und mit diesem Radius beschreibe man den Kreisbogen E F.

Nun ziehe man von F im Grundrisse die Normale F F', bis sie den Umkreis des Aufrisses in F' schneidet, so ist F' der Projectionspunkt von F.

Zieht man nun von F' nach G' eine Parallele mit A' B', so ist F' G' die Projection eines Kreises, welcher parallel mit der Grundfläche der Halbkugel herumläuft, und ist dieser Kreis zugleich die Projection eines Kreises, der im Grundrisse durch E F H G gelegt gedacht wird. In diesem Kreise liegt der gegebene Punkt E des Grundrisses, es muß also seine Projection im Aufrisse auch in der Projection des Kreises E F H G liegen. Die Projection dieses Kreises ist aber im Aufrisse die Linie F' G', folglich muß der Punkt E des Grundrisses in der Linie F' G' des Aufrisses liegen. Zieht man nun von E die Normale E bis E', so ist E' der gefundene Projectionspunkt (von E) des Grundrisses.

Es sei umgekehrt ein willkürlicher Punkt im Aufrisse gegeben, man soll seine Projection im Grundrisse finden. Es sei J' dieser gegebene Punkt im Aufrisse.

Man ziehe durch J' die Linie J' K' L' parallel mit A' B', so ist diese Linie wieder die Projection eines Kreises, welcher um die Halbkugel herum parallel mit der Grundfläche der Halbkugel liegt. Nun ziehe man im Grundrisse mit dem Radius C K den Kreis K L M, so ist dieser Kreis die Projection der Linie L' K' des Aufrisses, in welcher der Punkt J' liegt.

Fällt man nun die Normale J' bis J, so ist der Punkt J des Grundrisses die verlangte Projection des willkürlich gegebenen Punktes J' im Aufrisse.

Es leuchtet ein, daß man auf diese Weise jeden beliebigen Punkt, sowohl im Aufrisse als Grundrisse, geben kann, und auf