Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 23. Die am meisten vorkommenden Aufwickelungen der Umkreise verschiedener Flächen.

eben angegebene Weise seine Projection zu finden sein wird. Was nun für die Halbkugel gegolten, gilt natürlich auch für eine, aus zwei Halbkugeln zusammengesetzte ganze Kugel ganz in derselben Weise.

§. 20.

Aufgabe. Eine Schraubenlinie zu finden, welche um einen Cylinder gewunden ist.

Auflösung. Es sei (Taf. 2 Fig. 45) das Rechteck D′A′B′E′ die Projection des senkrecht stehenden Cylinders im Aufriß (§. 17). Der Kreis A N B M sei die Projection desselben Cylinders im Grundriß. Die Neigung des Schraubenganges sei gleich dem Winkel F′A′B′, man soll die Linie selbst finden.

Der Punkt A des Grundrisses liegt in seiner Projection im Punkte A′ des Aufrisses.

Der Punkt M des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen A und B, also auch in der Mitte der Höhe zwischen B′ und F′ bei O.

Der Punkt B des Grundrisses wird auch zugleich der Projectionspunkt für den Höhenpunkt F der ersten halben Windung des Schraubenganges sein, und die krumme Linie A′O′L′ wird die erste halbe Windung des Schraubenganges zeigen.

Der Punkt N des Grundrisses liegt in der Mitte zwischen B und A (auf der Rückseite des Cylinders), also in der Mitte der senkrechten Höhe zwischen F′ und J′ des Aufrisses bei P′, und die krumme punktirte Linie F′P′J′ wird die andere Hälfte des ersten Schraubenganges auf der Rückseite des Cylinders zeigen. Um aber die Schraubenlinie mit mehr Gewißheit zu bestimmen, muß man noch Zwischenpunkte suchen, und je mehr man deren annimmt, um so genauer wird die Schraubenlinie gezeichnet werden können.

Zieht man im Grundrisse die Linien Q S und T R, so hat man vier Hülfspunkte.

Es liegen aber diese vier Punkte so, daß, wenn man auch die Linien T Q und S R zieht, der vordere Punkt Q zugleich die Projection des hinteren Punktes T ist. Eben so ist R die Projection von S.

Nun ziehe man die Linien Q Q′ und R R′ durch die ganze Höhe des Cylinders.

Es liegt aber Q im Grundrisse in der Mitte zwischen A und M, folglich wird Q im Aufrisse in der Mitte der Höhe zwischen dem senkrechten Abstande von A′O′ des Aufrisses liegen.

Eben so wird R′ zwischen F′ und P′ ꝛc. liegen und man wird auf gleiche Weise den Schraubengang in beliebiger Höhe bestimmen können.

Nimmt man zwischen den Punkten des Grundrisses A Q M.... noch Zwischenpunkte an und verfährt in gleicher Weise, so wird man die Schraubenlinie noch genauer finden. Dies gilt für jede Höhe eines ganzen Umganges der Schraubenlinie, so daß, wenn man z. B. nur den Gang A′Q′O′F′R P′J′ gefunden hat, man nach diesem alle übrigen höher liegenden leicht finden kann.

§. 21.

Aufgabe. Es soll eine Schneckenlinie (Spirale) gezeichnet werden. (Taf. 2 Fig. 46.)

Auflösung. Es sei im Aufrisse die Höhe des ersten halben Ganges der Spirale durch die Linie E′F′ bezeichnet, so ist der Punkt J im Grundrisse die Projection des Punktes J′ im Aufrisse, denn der Punkt J liegt in der Mitte zwischen A und B′, und J′ wird in der Hälfte der Höhe zwischen A′ und E′ und C′ und K′ liegen. Es wird also der erste halbe Gang der Spirale, die krumme Linie A′J′F′ des Aufrisses sein. Um diese krumme Linie noch genauer zu finden, braucht man nur mehr Punkte anzunehmen, durch welche die krumme Linie gehen muß.

Man ziehe C L und C M im Grundriß und L′D′, M′D′ im Aufriß. Nun ziehe man im Aufriß O′P′ in der Mitte der Höhe zwischen N′J′ und A′C′, ferner ziehe man L′D′, so ist L″ der Projectionspunkt von L und eben so M″ von M.

Auf gleiche Weise findet man die übrigen Theile der Windungen, welche man zur Uebung aufsuchen kann.

Ein für allemal wird hierbei bemerkt: je größer man den Maßstab der Uebungsfiguren auf dem Papiere nimmt, um so deutlicher wird die Zeichnung, um so mehr Bestimmungspunkte ist man im Stande, mit Deutlichkeit zu finden, und um so größer und schneller wird man die Ueberzeugung aller derjenigen Lehren gewinnen, welche hier gegeben wurden.

§. 22.

Aufgabe. Den Aufriß und Grundriß eines körperlichen **Ringes** zu zeichnen. (Taf. 2 Fig. 47.)

Auflösung. Steht der Ring senkrecht in der wagerechten Ebene und parallel mit der senkrechten Ebene, so ist sein Grundriß durch die Figur A B ausgedrückt.

Im Aufrisse bildet er zwei concentrische Kreise. Die Figur E ist die Ansicht des Ringes, wenn er mit seiner wagerechten Achse normal auf der senkrechten Ebene steht.

Die Figur F zeigt den senkrechten Durchschnitt desselben Ringes.

Die Figur G im Grundrisse zeigt den wagerecht liegenden Ring in der Mitte durchschnitten.

Zur Uebung zeichne man an verschiedenen Stellen durchgelegte Kreisebenen, welche durch punktirte Linien in der Figur angegeben sind; nach §. 14 wird sich dies sehr leicht bestimmen lassen.

Zur weiteren Uebung kann man sich noch den Ring unter schräger Stellung, entweder gegen die wagerechte oder gegen die senkrechte Ebene oder gegen beide zugleich, denken, und wieder die Projectionen der verschiedenen Kreisebenen suchen, welche entstehen, wenn man sich in der Verlängerung der Kreisradien den Ring an beliebigen Stellen durchschnitten denkt.

§. 23.

Die am meisten vorkommenden Aufwickelungen der Umkreise verschiedener Flächen.

Aufgabe. Es soll die Aufwickelung der Umrißlinie einer gegebenen Fläche gezeichnet werden.

Auflösung. Unter Aufwickelung der Umrißlinie irgend einer beliebigen Fläche versteht man diejenige gerade Linie die man erhält, wenn man das Maß des Umrisses (Umfanges) der gegebenen Fläche auf eine gerade Linie aufträgt.

Anmerkung 1. Wollte man hiernach die Aufwickelung eines Dreiecks zeichnen, so trägt man die einzelnen Maße seiner drei Seiten unmittelbar neben einander auf eine gerade Linie auf, so daß die nunmehr entstehende gerade Linie so groß gemacht wird, als die Summe aller drei Seiten des Dreiecks zusammengenommen.

Anmerkung 2. Auf dieselbe Weise findet man die Aufwickelung eines Quadrats, wenn man die Länge einer Seite desselben viermal neben einander auf eine gerade Linie trägt.

Anmerkung 3. Die Aufwickelung jedes regelmäßigen Vielecks findet man demnach, wenn man z. B. bei einem Achteck eine Seite achtmal neben einander auf eine gerade Linie setzt 2c.

Anmerkung 4. Die Aufwickelung eines Kreises findet man in der Praxis am leichtesten, wenn man denselben als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, oder, was dasselbe ist, wenn man ihn entweder in der Natur mit einem möglichst genau umgelegten Faden abmißt und die gefundene Länge des Fadens dann auf eine gerade Linie abträgt; oder wenn man einen auf dem Papiere gezeichneten Kreis mit dem Zirkel in sehr kleine gleiche Theile zerlegt und die Summe dieser gleichen Theile auf eine gerade Linie trägt.

Soll aber die Abwickelung mathematische Genauigkeit haben, so ist es unter allen Umständen besser, die Längen der Abwickelung durch Rechnung zu bestimmen.

Bei geradlinigen Figuren hat dies gar keine Schwierigkeit, man addirt die in Fußen und Zollen gemessenen Seiten zusammen und setzt die so gefundene Summe der Maße auf eine gerade Linie. Auf dem Papiere berechnet man ebenfalls zuvor die Summe der Maße, nimmt diese Summe alsdann nach dem verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel ab und trägt sie auf eine gerade Linie.

Bei krummlinigen Figuren bestimmt nur die Rechnung genau die Abwickelung gegebener Figuren. So erhält man die Kreislinie nach mathematischer Bestimmung, wenn man erst den Halbmesser (Radius) doppelt nimmt und dann mit $\frac{3}{1400} = 3{,}14$ multiplicirt. Es sei der Radius 4 Fuß, so ist der Umkreis (oder die Abwickelung) $4 \times 2 \times 3{,}14 = 25{,}12$ Fuß $= 25\frac{12}{100} =$ circa 25 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll.

Anmerkung 5. Sollte man die Abwickelung einer Ellipse finden, so verfährt man ganz ähnlich wie bei dem Kreise; man legt nämlich für die Praxis einen Faden möglichst genau um eine gegebene Ellipse, was man am leichtesten dadurch erreicht, daß man kleine Nägel in den Umkreis sehr nahe an einander schlägt und darum den Faden zieht, womit man die Länge des Umkreises messen will.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß auf diese Art zwar ein Vieleck entsteht, welches sich aber der krummen Linie um so mehr nähert, je näher man die Nägel an einander geschlagen hat.

Ferner muß man sich hüten den Faden zu straff anzuziehen, weil er sich sonst bei dem Abnehmen und Uebertragen wieder zusammenzieht und man so eine zu kurze Abwickelung erhalten würde.

Sicherer ist hier wieder die Rechnung.

Man findet aber den Umfang einer Ellipse, wenn man die Quadratwurzel der halben Summe der Quadrate beider Achsen mit 3,14.... multiplizirt.

Es sei die große Achse 9 Fuß lang, die kleine 4 Fuß, so ist die Summe der Quadrate beider Achsen $81 + 16 = 97$; die halbe Summe davon ist $48\frac{1}{2}$; die Wurzel davon liegt zwischen 6,96.... und 6,97..... Nehmen wir 6,96.... und multipliciren dies mit 3,14...., so steht $6{,}96\ldots \times 3{,}14\ldots = 21{,}8544\ldots = 21\frac{1}{12}$ Fuß, welche Art zu rechnen für alle practische Fälle hinlänglich genau ist.

Dieses gefundene Maß trägt man nun entweder in wirklichem Fußmaße oder nach dem verjüngten Maßstabe auf eine gerade Linie, in der Natur oder auf dem Papiere gegeben, auf, so ist die gesuchte Aufwickelung der gegebenen Ellipse gefunden.

Anmerkung 6. Sollte man Abwickelungen von Kettenlinien, Parabeln 2c. zu suchen haben, so thut man für die Praxis wohl am besten, daß man die gegebenen Linien entweder in natürlicher Größe construirt und sie mit dem Faden mißt (wie bei der Ellipse) oder auf dem Papiere mit dem Zirkel die Länge der Abwickelung bestimmt, da Berechnungen dieser Linien für den Anfänger schon ziemlich schwierig sind.

Anmerkung 7. Wollte man die Abwickelung einer Schraubenlinie finden, so betrachte man (Taf. 2 Fig. 45) den Aufriß und Grundriß des Cylinders und der darauf gezeichneten Schraubenlinie.

Dieselbe folgt immer demselben Gesetze, wäre man demnach nur im Stande, die Länge eines bestimmten Theiles derselben zu ermitteln, so könnte man daraus die Länge der ganzen Linie finden.

Man suchte z. B. die Länge der Linie **A′ O′** im Aufrisse, so findet man sie auf folgende Weise.

Die Projection der Linie **A′ O′** des Aufrisses ist im Grundrisse der Quadrant **A Q M**. Nimmt man die Aufwickelung dieser Linie als Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, ferner **C′ O′** als Länge der anderen Seite, welche rechtwinklig auf **C′ O′** steht, und verbindet dann die Endpunkte **O′** und **A** durch eine gerade Linie, so ist diese die Hypothenuse des Dreiecks und zugleich die gesuchte Aufwickelung von **A′ O′** des Aufrisses. Es reicht aber die Länge dieser Linie gerade über $\frac{1}{4}$ des einen Schraubenumganges, nimmt man nun die Summe aller Viertel zusammen und trägt sie als gerade Linie auf, so hat man die Abwickelung der sämmtlichen Schraubengänge.

§. 24.

Verwandelung einiger bei Bauten oft vorkommenden Linien.

Aufgabe. Ein halber Kreis soll in eine krumme Linie verwandelt werden, welche länger als der halbe Kreis ist, deren Höhenpunkte aber mit einander übereinstimmen. (Taf. 2 Fig. 48.)

Auflösung. Es sei der Halbkreis **A D B** gegeben, man soll über der ebenfalls gegebenen Linie **A′ B′**, welche länger ist, als der Durchmesser des Halbkreises, eine krumme Linie **A′ H′....B′** bilden, deren Höhenpunkte überall mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Diese Forderung kommt bei Anfertigung der sogenannten Lehrbogen der Gewölbe sehr oft vor. Man theile den Durchmesser des Halbkreises **A B** in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in sechs), alsdann ziehe man aus diesen Theilungspunkten die Normalen **G H**, **E F**, **C D**, **J K** und **L M**, bis sie den Umkreis berühren. Nun theile man die gegebene Linie **A′ B′** in eben so viele gleiche Theile, als vorher den Halbkreis-Durchmesser (hier in sechs). Auf diesen Theilpunkten errichte man beliebig lang die Normalen **G′ H′**, **E′ F′**, **C′ D′**, **J K′**, **L′ M′**. Nun fasse man im Halbkreise mit dem Zirkel die Linie **G H** und trage sie auf der Linie **A′ B′** von **G′** nach **H′**. Eben so trage man **E F** von **E′** nach **F′**, **C D** von **C′** nach **D′** u. s. w., so erhält man über der Linie **A′ B′** die Höhenpunkte **H′, F′, D′, K′, M′**, welche mit den gleichnamigen Punkten des Halbkreises **H, F, D, K, M** gleich hoch liegen, weil man die Linien gleich gemacht hat. Verbindet man nun die Punkte **A′, H′, F′,....** durch eine