Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 24. Verwandelung einiger bei Bauten oft vorkommenden Linien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

Anmerkung 2. Auf dieselbe Weise findet man die Aufwickelung eines Quadrats, wenn man die Länge einer Seite desselben viermal neben einander auf eine gerade Linie trägt.

Anmerkung 3. Die Aufwickelung jedes regelmäßigen Vielecks findet man demnach, wenn man z. B. bei einem Achteck eine Seite achtmal neben einander auf eine gerade Linie setzt 2c.

Anmerkung 4. Die Aufwickelung eines Kreises findet man in der Praxis am leichtesten, wenn man denselben als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, oder, was dasselbe ist, wenn man ihn entweder in der Natur mit einem möglichst genau umgelegten Faden abmißt und die gefundene Länge des Fadens dann auf eine gerade Linie abträgt; oder wenn man einen auf dem Papiere gezeichneten Kreis mit dem Zirkel in sehr kleine gleiche Theile zerlegt und die Summe dieser gleichen Theile auf eine gerade Linie trägt.

Soll aber die Abwickelung mathematische Genauigkeit haben, so ist es unter allen Umständen besser, die Längen der Abwickelung durch Rechnung zu bestimmen.

Bei geradlinigen Figuren hat dies gar keine Schwierigkeit, man addirt die in Fußen und Zollen gemessenen Seiten zusammen und setzt die so gefundene Summe der Maße auf eine gerade Linie. Auf dem Papiere berechnet man ebenfalls zuvor die Summe der Maße, nimmt diese Summe alsdann nach dem verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel ab und trägt sie auf eine gerade Linie.

Bei krummlinigen Figuren bestimmt nur die Rechnung genau die Abwickelung gegebener Figuren. So erhält man die Kreislinie nach mathematischer Bestimmung, wenn man erst den Halbmesser (Radius) doppelt nimmt und dann mit $\frac{3}{1400} = 3{,}14$ multiplicirt. Es sei der Radius 4 Fuß, so ist der Umkreis (oder die Abwickelung) $4 \times 2 \times 3{,}14 = 25{,}12$ Fuß $= 25\frac{12}{100} =$ circa 25 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll.

Anmerkung 5. Sollte man die Abwickelung einer Ellipse finden, so verfährt man ganz ähnlich wie bei dem Kreise; man legt nämlich für die Praxis einen Faden möglichst genau um eine gegebene Ellipse, was man am leichtesten dadurch erreicht, daß man kleine Nägel in den Umkreis sehr nahe an einander schlägt und darum den Faden zieht, womit man die Länge des Umkreises messen will.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß auf diese Art zwar ein Vieleck entsteht, welches sich aber der krummen Linie um so mehr nähert, je näher man die Nägel an einander geschlagen hat.

Ferner muß man sich hüten den Faden zu straff anzuziehen, weil er sich sonst bei dem Abnehmen und Uebertragen wieder zusammenzieht und man so eine zu kurze Abwickelung erhalten würde.

Sicherer ist hier wieder die Rechnung.

Man findet aber den Umfang einer Ellipse, wenn man die Quadratwurzel der halben Summe der Quadrate beider Achsen mit 3,14.... multiplizirt.

Es sei die große Achse 9 Fuß lang, die kleine 4 Fuß, so ist die Summe der Quadrate beider Achsen $81 + 16 = 97$; die halbe Summe davon ist $48\frac{1}{2}$; die Wurzel davon liegt zwischen 6,96.... und 6,97..... Nehmen wir 6,96.... und multipliciren dies mit 3,14...., so steht $6{,}96.... \times 3{,}14.... = 21{,}8544.... = 21\frac{1}{12}$ Fuß, welche Art zu rechnen für alle practische Fälle hinlänglich genau ist.

Dieses gefundene Maß trägt man nun entweder in wirklichem Fußmaße oder nach dem verjüngten Maßstabe auf eine gerade Linie, in der Natur oder auf dem Papiere gegeben, auf, so ist die gesuchte Aufwickelung der gegebenen Ellipse gefunden.

Anmerkung 6. Sollte man Abwickelungen von Kettenlinien, Parabeln 2c. zu suchen haben, so thut man für die Praxis wohl am besten, daß man die gegebenen Linien entweder in natürlicher Größe construirt und sie mit dem Faden mißt (wie bei der Ellipse) oder auf dem Papiere mit dem Zirkel die Länge der Abwickelung bestimmt, da Berechnungen dieser Linien für den Anfänger schon ziemlich schwierig sind.

Anmerkung 7. Wollte man die Abwickelung einer Schraubenlinie finden, so betrachte man (Taf. 2 Fig. 45) den Aufriß und Grundriß des Cylinders und der darauf gezeichneten Schraubenlinie.

Dieselbe folgt immer demselben Gesetze, wäre man demnach nur im Stande, die Länge eines bestimmten Theiles derselben zu ermitteln, so könnte man daraus die Länge der ganzen Linie finden.

Man suchte z. B. die Länge der Linie A′ O′ im Aufrisse, so findet man sie auf folgende Weise.

Die Projection der Linie A′ O′ des Aufrisses ist im Grundrisse der Quadrant A Q M. Nimmt man die Aufwickelung dieser Linie als Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, ferner C′ O′ als Länge der anderen Seite, welche rechtwinklig auf C′ O′ steht, und verbindet dann die Endpunkte O′ und A durch eine gerade Linie, so ist diese die Hypothenuse des Dreiecks und zugleich die gesuchte Aufwickelung von A′ O′ des Aufrisses. Es reicht aber die Länge dieser Linie gerade über $\frac{1}{4}$ des einen Schraubenumganges, nimmt man nun die Summe aller Viertel zusammen und trägt sie als gerade Linie auf, so hat man die Abwickelung der sämmtlichen Schraubengänge.

§. 24.

Verwandelung einiger bei Bauten oft vorkommenden Linien.

Aufgabe. Ein halber Kreis soll in eine krumme Linie verwandelt werden, welche länger als der halbe Kreis ist, deren Höhenpunkte aber mit einander übereinstimmen. (Taf. 2 Fig. 48.)

Auflösung. Es sei der Halbkreis A D B gegeben, man soll über der ebenfalls gegebenen Linie A′ B′, welche länger ist, als der Durchmesser des Halbkreises, eine krumme Linie A′ H′....B′ bilden, deren Höhenpunkte überall mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Diese Forderung kommt bei Anfertigung der sogenannten Lehrbogen der Gewölbe sehr oft vor. Man theile den Durchmesser des Halbkreises A B in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in sechs), alsdann ziehe man aus diesen Theilungspunkten die Normalen G H, E F, C D, J K und L M, bis sie den Umkreis berühren. Nun theile man die gegebene Linie A′ B′ in eben so viele gleiche Theile, als vorher den Halbkreis-Durchmesser (hier in sechs). Auf diesen Theilpunkten errichte man beliebig lang die Normalen G′ H′, E′ F′, C′ D′, J K′, L′ M′. Nun fasse man im Halbkreise mit dem Zirkel die Linie G H und trage sie auf der Linie A′ B′ von G′ nach H′. Eben so trage man E F von E′ nach F′, C D von C′ nach D′ u. s. w., so erhält man über der Linie A′ B′ die Höhenpunkte H′, F′, D′, K′, M′, welche mit den gleichnamigen Punkten des Halbkreises H, F, D, K, M gleich hoch liegen, weil man die Linien gleich gemacht hat. Verbindet man nun die Punkte A′, H′, F′,.... durch eine krumme Linie, so ist diese die gesuchte, welche mit dem Halbkreise gleiche Höhenpunkte hat.

Anmerkung 1. Es sei bei derselben Figur (Taf. 2 Fig. 48) eine Linie A'' B'' gegeben, welche kleiner als der Durchmesser des gegebenen Halbkreises ist, man soll über A'' B'' ebenfalls eine krumme Linie (einen sogenannten überhöhten Bogen) zeichnen, deren Höhenpunkte auch mit den Höhenpunkten des Halbkreises zusammenfallen.

Nachdem man den Halbkreisdurchmesser wie vorhin getheilt und die Normalen G, H, E, F.... gezogen hat, theile man die gegebene Linie A'' B'' in eben so viele gleiche Theile wie den Halbkreisdurchmesser A B, ferner errichte man auf A'' B'' in den angenommenen Theilpunkten die Normalen G'' H''.... und mache sie gleich lang wie die Normalen des Halbkreises G H...., ziehe dann durch diese gefundenen Punkte die krumme Linie A'' H'' D'' B'', so ist diese die gesuchte krumme Linie, deren Höhenpunkte mit denen des gegebenen Halbkreises zusammenfallen.

Anmerkung 2. Aus den so eben im Vorigen gegebenen Beispielen ersieht man leicht Folgendes. Eben so gut, wie man aus dem Halbkreise eine längere und eine kürzere Linie mit gleichen Höhenpunkten bilden konnte, eben so gut kann man aus der gegebenen längeren Linie A' H'.... auch einen Halbkreis bilden, welcher gleiche Höhenpunkte mit dieser gegebenen Linie gemeinschaftlich hat.

Setzt man nämlich die höchste Linie C' D' auf die Mitte der vorläufig willkürlich lang gezogenen Linie A B und macht C D = C' D', so ist C D ein Radius des Halbkreises; macht man nun A C = C D und C B auch = C D, so ist die Linie A B der Durchmesser des gesuchten Halbkreises.

Theilt man nun diesen in eben so viel gleiche Theile, als die Linie A' B', und errichtet auf den Theilpunkten die Normalen G H.... beliebig lang, so braucht man nur die Längen der normalen Linien G' H', E' F'.... von G nach H, von E nach F.... zu setzen, um den Halbkreis zu erhalten, welcher gleiche Höhenpunkte mit der gegebenen Linie A' H' F'.... haben wird.

Da es aber ein Halbkreis werden mußte, hätte man nur nöthig gehabt, mit dem Radius C D den Halbkreis A D B zu ziehen, welcher alsdann die Punkte H F.... ebenfalls berührt haben würde. Auf ganz gleiche Weise kann man auch aus der gegebenen kürzeren Linie A'' H'' D'' B'' einen Halbkreis mit übereinstimmenden Höhenpunkten bilden, wenn man, wie vorhin, die Linie C'' D'' als Radius des Halbkreises betrachtet und eben so verfährt, wie vorhin gezeigt wurde.

Anmerkung 3. Es folgt ferner aus dem bisher Gesagten: eine Linie kann so lang oder so kurz sein, wie sie will, so ist man immer im Stande, über ihr irgend eine Bogenlinie zu beschreiben, welche mit einer anderen, bereits gegebenen gemeinschaftliche Höhenpunkte haben muß.

Es ist einleuchtend, daß in je mehr Theile man die Grundlinie des gegebenen Bogens theilt, und jemehr Punkte man demnach durch die gezogenen Normalen in seinem Umkreise bestimmt, um so genauer wird die gesuchte krumme Linie werden.

Anmerkung 4. Es sei (Taf. 2 Fig. 49) der Spitzbogen A D B gegeben, man soll daraus einen flacheren A' D' B' oder einen steileren A'' D'' B'' gestalten, so verfährt man ganz nach den Auflösungen, welche für den Halbkreis in dem vorhergehenden Beispiele gegeben worden sind, man hat ebenfalls nur nöthig, die verschiedenen Längen der Normalen zu bestimmen.

Anmerkung 5. Es soll ein Halbkreis in einen sogenannten steigenden Bogen verwandelt werden. (Taf. 3 Fig. 50.) Es sei der Halbkreis A D B gegeben, so theile man seinen Durchmesser A B wieder in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und ziehe die Normalen G H, E F, C D.... bis zum Umkreise.

Ferner setze man auf der wagerechten Linie A' N' die schräge Grundlinie des steigenden Bogens A' B' unter dem bestimmten Neigungswinkel an.

Nun verlängere man sämmtliche Normalen des Halbkreises willkürlich. Dann mache man G' H' = G H, ferner F'' E'' = F E, ferner C' D' = C D u. s. w., endlich verbinde man die gefundenen Punkte A' H' F' D' K' M' B' durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese der gesuchte steigende Bogen, dessen Höhenpunkte mit dem des gegebenen Halbkreises übereinstimmen werden.

Anmerkung 6. Wäre der gegebene Bogen, den man in einen steigenden Bogen verwandeln soll, kein Halbkreis, sondern ein Spitzbogen (Taf. 3 Fig. 51), so verfahre man ganz eben so wie bei dem Halbkreise. Das Verfahren wird aus der Fig. 51 deutlich, da die sämmtlichen Bezeichnungen ganz wie bei dem Halbkreise (Anmerk. 5) gewählt sind.

Anmerkung 7. Man sieht leicht ein, daß man auf ganz gleiche Weise jedes beliebige Bogensystem in einen steigenden Bogen verwandeln kann, wie es auch in der Praxis bei den steigenden Treppengewölben immer vorkommt. Alsdann zeichnet man sich aber die zu verwandelnden Bögen nicht auf dem Papiere, sondern auf einem Bretterboden (dem sogenannten Reißboden) in natürlicher Größe auf und verfährt dabei ganz so, wie wir es hier auf dem Papiere gezeigt haben, nur mit dem Unterschiede, daß man die zu übertragenden Maße nicht mit dem Zirkel, sondern mit dem Fußmaßstabe nimmt.

§. 25.

Zeichnung einiger Netze von Oberflächen, die bei Bauten oft vorkommen.

Aufgabe. Das Netz eines Prisma zu zeichnen, dessen Grundfläche ein Dreieck ist.

Auflösung. (Taf. 3 Fig. 52.) Es sei A' B' C' F' G' H' das Prisma. Man zeichne das Rechteck A C H F, setze hieran die beiden Dreiecke F G H und A B C, alsdann verlängere man A C und H F willkürlich lang nach beiden Seiten und mache die Linien C D, F E, H J, K A gleich einer Seite der Dreiecke (wenn diese wie hier gleichschenklig sind), so hat man das verlangte Netz, und wenn man die Flächen gegen einander legt, erhält man das Prisma A' B' C' H' G' F'.

Es stellt diese Figur die Gestalt eines gewöhnlichen Satteldaches dar.

Anmerkung 1. Das Netz eines Cubus oder Würfels wird gefunden, wenn man (Taf. 3 Fig. 53) das Grundquadrat O L H C zeichnet, an dieses setzt man die vier Seitenquadrate A B C O, L H J K, C D G H, L O N M und endlich das Quadrat D E F G, welches die obere Fläche des Cubus bilden wird, wenn man die Seitenflächen senkrecht aufklappt und das Quadrat D E F G wagerecht darüber legt.