Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 35. Aufgabe. Es sei durch einen Kegel (Taf. 4 Fig. 47) eine Ebene A'C' so festgelegt, daß sie mit der einen Seite des Kegels (hier D'B') parallel liegt und die Grundfläche schneidet, man soll im ...

So wie man nun eine dieser Gewölbeprojectionen gefunden hat, findet man nach und nach alle. Diejenigen Projectionen, welche von der Mittellinie gleich weit abstehen, sind einander gleich, wie hier die Fenster, und wenn man eine dieser Projectionen gefunden hat, kann man die andere darnach copiren, ohne sie erst zu suchen.

§. 34.

Aufgabe. Es sollen zwei in einander steckende Cylinder gezeichnet werden. (Taf. 4 Fig. 72.)

Auflösung. Es stecke der kleine Cylinder ABDC so in dem größern, daß die Achsen derselben normal auf einander stehen und zugleich in einer wagerechten Ebene liegen, so wird, wenn der große Cylinder mit seiner Achse normal gegen die senkrechte Ebene steht, die Achse des kleineren Cylinders parallel mit der senkrechten Ebene liegen, wie die Zeichnung des Aufrisses zeigt.

Setzt man nun neben den Aufriß die Durchschnittsfläche als Kreis und theilt den Quadranten g h desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so erhält man verschiedene Höhenpunkte dieses Quadranten; zieht man von diesen aus wagerechte Linien nach dem großen Cylinder hinüber (wie in der Zeichnung angegeben), so erhält man auf dem großen Cylinder diejenigen Punkte, wo die Höhenpunkte des kleinen Cylinders in dem großen Cylinder einschneiden.

Zieht man nun von diesen Einschneidungspunkten lothrechte Linien bis zur Achse des kleinen Cylinders im Grundrisse, so erhält man diejenigen Linien, in welchen die Einschnittspunkte des kleinen Cylinders in den großen liegen müssen.

Man hat z. B. aus dem kleinen Kreise den obersten Punkt h nach A' hin angeschnitten, so wird h im Grundrisse derjenige Punkt sein, wo der kleine Cylinder am tiefsten in den großen einschneidet. Nun trage man auf der Linie C A des Grundrisses die Stücken c d, d e, e f auf, welche eben so groß sind als die Stücken c d, d e, e f auf dem Radius c g des kleinen Kreises neben dem Aufrisse, alsdann ziehe man aus den Punkten des Grundrisses c d e f wagerechte Linien, bis sie die von oben herabkommenden senkrechten Linien treffen, und bezeichne die erhaltenen Durchschnittspunkte. Ist dies geschehen, so verbinde man aus freier Hand diese verschiedenen Durchschnittspunkte durch die Linie A h, so wird man den einen sichtbaren Quadranten gefunden haben, womit der kleine Cylinder in den großen einschneidet. Die andere Hälfte h C im Grundrisse wird ganz eben so gefunden, und man braucht die gefundene Linie A h im Grundrisse nur von h nach C hinzutragen, so ist die ganze Aufgabe gelöst.

Anmerkung 1. Haben beide Cylinder gleichgroße Querdurchmesser und stecken in gleicher Art, wie vorhin, in einander, daß ihre Achsen normal auf einander stehen, so wird der Punkt h bis in die Mitte des großen Cylinderkreises rücken und die Linien A h, h C im Grundrisse werden gerade Linien.

Zur Uebung kann man die Achsen der Cylinder schräg stellen, wodurch die Aufgabe schon ziemlich verwickelt wird.

Anmerkung 2. (Taf. 4 Fig. 73.) Stände der große Cylinder senkrecht und der kleinere durchschnitte ihn normal, so würde A' der große, B' der kleinere in der vorderen Ansicht sein, und A der große, B der kleinere Cylinder im Grundrisse.

Man muß hierbei bemerken, daß die Projection des kleinen Cylinders auf dem großen im Aufrisse zwar als Kreis erscheint, die Figur aber, welche durch die Berührungspunkte des kleinen Cylinders auf dem großen gebildet wird, ist durchaus kein Kreis, sondern eine ganz andere Linie.

Dies Ineinandergreifen von Cylindern kommt namentlich bei Röhrenwerken der Maschinen sehr häufig vor.

Anmerkung 3. Betrachtet man den Grundriß (Taf. 4 Fig. 72) und denkt sich den großen Cylinder (anstatt daß er hier wagerecht liegt) senkrecht stehend und den kleineren wagerecht darin eingreifend, so wird man die Eingriffslinie A h C des kleinen Cylinders in den großen eben so finden, wie vorhin gezeigt wurde.

§. 35.

Aufgabe. Es sei durch einen Kegel (Taf. 4 Fig. 74) eine Ebene A' C' so gelegt, daß sie mit der einen Seite des Kegels (hier D' B') parallel liegt und die Grundfläche schneidet, man soll im Grundrisse diejenige Linie bestimmen, welche auf der Oberfläche des Kegels durch den Schnitt der Ebene entsteht.

Auflösung. Man theile die Linie C' A' des Aufrisses, welche die Durchschnittslinie der durch den Kegel gelegten Ebene ist, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, C' a' = a' b', = b' d', = d' A'. Es ist hier aber die Entfernung d' A' noch einmal halbirt in e', um einen Theilpunkt mehr zu haben, welcher, wie man weiter unten sehen wird, die Auffindung der gesuchten Linie erleichtert. Die Punkte a' b' d' e' in der Linie C' A' sind alle Mittelpunkte von wagerechten Linien, welche man sich in der durch den Kegel gelegten Ebene A' C' gezogen denken kann. Denkt man sich ferner diese wagerechten Linien so weit nach beiden Seiten verlängert, bis sie den Mantel des Kegels treffen, so hat man nur diese sämmtlichen Durchschnittspunkte aufzusuchen, um die zu suchende Linie im Grundrisse zu bestimmen.

Nimmt man z. B. in der Linie A' C' den Punkt a' an und zieht die Wagerechte K' a' o', so wird der Punkt o' den Abstand von a' bezeichnen, wenn man die Länge a' o' durch den Punkt a' normal auf C' A' nach beiden Seiten so weit verlängert denkt, bis diese Linie den Mantel des Kegels auf beiden Seiten schneidet. Beschreibt man nun mit dem Radius K' O' = C' O' im Grundrisse den Kreis P O Q, so wird in diesem Kreisbogen die Projection desjenigen Punktes liegen, wo die durch a' gezogene Wagerechte den Mantel des Kegels schneidet. (Vergleiche §. 18, besonders Anmerk. 1.)

Fällt man aus a' die Normale $a' a^2 a^3$, so sind die beiden Punkte a^2 und a^3 die gesuchten im Grundrisse. Eben so findet man durch die Normale $b' b^2 b^3$ die beiden Punkte $b^2 b^3$ im Grundrisse.

Ferner durch die Normale $d' d^2 d^3$ die Punkte $d^2 d^3$; sodann durch die Normale $e' e^2 e^3$ die Punkte $e^2 e^3$, und endlich liegt der Punkt A' im Grundrisse in A. Zieht man nun aus freier Hand im Grundrisse die Linie $P\, a^2 \ldots A\, e^3 \ldots Q$, so hat man die gesuchte Linie gefunden.

Es braucht wohl nicht erst erinnert zu werden, daß man eben so, wie man für den Punkt a' den Kreis C O gefunden hat, man für den Punkt b' des Aufrisses den Kreis C N u. s. w. zieht, um die Lage der Durchschnittspunkte an dem Mantel des Kreises zu bestimmen. Eben so ist einleuchtend, daß, je mehr man Punkte im Aufrisse in der Linie C' A' annimmt, man auch mehr Kreise im Grundrisse und demnach mehr Bestimmungspunkte erhält, wodurch die Linie P A Q im Grundrisse immer genauer gefunden werden kann.

Anmerkung 1. Nachdem man nun die gesuchte Linie im Grundrisse gefunden hat, soll man die ganze Durchschnittsebene, wovon C′A′ die Mittellinie ist, im Aufrisse zeichnen, und zwar so, daß die ganze Ebene senkrecht steht (Taf. 4 Fig. 75). Zu diesem Zwecke trage man aus Fig. 74 den Radius C′E′ nach Fig. 75 von C″ nach E″ und von C″ nach D″, so ist D″E″ die Grundlinie der Ebene, und weil die durch den Kegel gelegte Ebene unten bis an die Mittellinie des Kreises reicht, so ist in diesem Falle in Fig. 75 D″E″ gleich dem Durchmesser des Grundkreises des Kegels.

Setzt man dann, Fig. 75, in C″ die Normale C″A″ beliebig lang auf, so ist diese die Mittellinie der Durchschnittsebene.

Nimmt man dann aus Fig. 74 mit dem Zirkel die Länge der Linie C′A′ im Aufrisse und trägt sie in Fig. 75 von C″ nach A″, so ist A″ der höchste Punkt der Durchschnittsebene.

Man hat demnach bis jetzt die Breite und Höhe der Durchschnittsebene bestimmt.

Um nun die übrigen Punkte zu finden, verfahre man wie folgt. Man trage aus Fig. 74 die Punkte a′ b′ d′ e′ auf der Linie C′A′ nach Fig. 75 von C″ aus nach a″ b″ d″ e″. Durch diese Punkte ziehe man parallele Linien mit D″E″ beliebig lang.

Nun nehme man im Grundrisse Fig. 74 die Linie $a a^2$ und trage sie in Fig. 75 von a″ aus nach beiden Seiten auf die wagerechte Linie auf, so sind die Durchschnittspunkte die gesuchten.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $b b^2$ nach Fig. 75 von b″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Eben so trage man aus dem Grundrisse die Länge $d d^2$ nach Fig. 75 von d″ aus nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Zuletzt trage man noch aus dem Grundrisse die Länge $e e^2$ in Fig. 75 von e″ nach beiden Seiten und bemerke die Durchschnittspunkte.

Verbindet man nun alle diese in Fig. 75 gefundenen Durchschnittspunkte durch eine krumme Linie, so hat man in der Ebene D″A″E″ diejenige Ebene gefunden, welche die Durchschnittsebene des Kegels im Aufrisse Fig. 74 war.

Man nennt die krumme Begrenzungslinie, welche auf die in der gegebenen Aufgabe §. 35 erwähnte Art entsteht, eine Parabel und die ganze Fläche eine parabolische Ebene.

Anmerkung 2. Man kann aber jede parabolische Linie, deren Breite und Höhe gegeben ist, auch noch auf eine andere leichtere Art finden, was namentlich in der Praxis bei Zeichnung von Leerbogen parabolischer Gewölbelinien sehr bequem ist.

Es sei (Taf. 4 Fig. 75) D″E″ die Grundlinie der parabolischen Ebene gegeben, eben so C″A″ die Höhe derselben, man soll die parabolische Umrißlinie finden.

Zu diesem Zwecke verlängere man C″A″ willkürlich und setze die Entfernung C″A″ noch einmal von A″ nach (8), so daß C″(8) doppelt so lang wird wie C″A″ war.

Nun ziehe man D″(8) und E″(8), theile diese beiden Linien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile 1, 2, 3.... Eine Theilung von 8 oder 16 Theilen ist bequem, weil man nur zu halbiren braucht.

Dann bezeichne man die Theilpunkte, wie in der Zeichnung angegeben, auf beiden Seiten verschieden. Ist dies geschehen, so ziehe man Linien von 1 nach 1, von 2 nach 2, von 3 nach 3,.... Wo diese Linien sich durchschneiden, bemerke man die Durchschnittspunkte und verbinde diese durch eine krumme Linie aus freier Hand, so ist diese die gesuchte Parabel. Man wird finden, daß die auf die zuletzt angegebene Art gefundene Linie ganz mit der zusammenfällt, welche man vorhin (Anmerk. 1) auf ganz andere Art gefunden hat.

§. 36.

Aufgabe. In einer halbkugelförmigen Kuppel sollen sogenannte Cassetturen gezeichnet werden.

Auflösung. Es sei Taf. 4 Fig. 76 im Aufrisse und Grundrisse die Hälfte einer solchen Kuppel gegeben. Die Cassetturen (Vertiefungen im Gewölbe) seien ebenfalls im Durchschnitte des Gewölbes eingezeichnet, wie im Aufrisse auf der linken Seite zu sehen, so findet man diese Cassetturen auf der gekrümmten Fläche sowohl im Aufrisse als im Grundrisse, wenn man folgendes Verfahren beobachtet.

Zuerst theile man sich im Grundrisse die sämmtlichen Mittellinien der Vertiefungen ein. Beiläufig gesagt nimmt man eines guten Verhältnisses wegen mindestens 16 und höchstens 20 Vertiefungen in einer Reihe rings herum an. Ferner sind in dem vorliegenden Beispiele zwar alle Vertiefungen von gleicher Höhe angenommen, um die Zeichnung deutlicher erscheinen zu lassen; dies thut man aber in der Ausführung nicht, dann werden die Höhen der Cassetten nach oben immer kleiner, und zwar so, daß man sie in jeder Reihe so hoch wie breit macht. Sind nun die Mittellinien eingetheilt, so kann man dieselben leicht finden. Im Grundrisse zieht man nur von dem Theilpunkte am Umkreise Radien bis nach dem Mittelpunkte C; wie der Radius A C, so sind diese Radien die Projectionen der in der hohlen Wölbung des Aufrisses laufenden Linien. (§. 32.)

Ferner ziehe man im Aufrisse aus allen Eckpunkten der Vertiefungen, wie sie in der Gewölbstärke links eingezeichnet sind, wagerechte Linien durch die Breite der Kuppel, so hat man durch diese wagerechten Linien die Projectionen von eben so vielen wagerechten Kreislinien erhalten, welche ebenfalls wagerecht an der Krümmungsfläche herumlaufen. Es seien dies im Aufrisse die am mittleren Radius mit 1, 2, 3, 4.... bezeichneten Linien.

Zieht man nun auch von den Eckpunkten der Cassetturen in der Gewölbestärke normale Linien nach dem Durchmesser des Grundrisses herunter, so hat man diejenigen Punkte im Grundrisse erhalten, welche die Projectionen der Cassettenbreiten angeben. Zieht man nun aus allen diesen Punkten concentrische Kreise 1, 2, 3, 4...., so liegen zwischen diesen Kreisen sowohl die Breiten der Cassetten als der Steege.

Will man nun die einzelnen Umrisse der Zeichnung bestimmen, so verfährt man bei allen Linien, wie wir es jetzt gleich für die einzelne Linie A C im Grund- und Aufrisse zeigen werden.

Der Punkt A am innern Umkreise der Kuppel liegt im Aufrisse in einer Kreisebene, welche die Projection des Umkreises ist, also im untern Durchmesser der Halbkugel bei A′.

Aus denselben Gründen liegt der Punkt 6 der Linie AC im Grundrisse in der wagerechten Linie 6 des Aufrisses, der Punkt 5 des Grundrisses in 5 des Aufrisses, der Punkt 4 des Grund-