Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 2. Aufgabe. Es soll der Schlagschatten (Schatten) eines Stabes gefunden werden, welcher senkrecht in einer wagerechten Ebene steckt.

Zweite Abtheilung.

A. Construction der Schatten.

§. 1.

Einleitung.

Wird ein Körper von der Sonne oder irgend einem andern Lichte beleuchtet, so zeigt er auf seinen Flächen sehr verschiedene Grade der Helligkeit und Dunkelheit, je nachdem diese Flächen dem Lichte mehr zugekehrt oder davon abgewendet sind. Diese Verschiedenheit von hell und dunkel nennt man die Beleuchtung des Körpers.

Wo das Licht am hellsten auf den Körper scheint nennt man die Beleuchtung volles Licht.

Wo die Flächen weniger beleuchtet sind nennt man die Beleuchtung halbes Licht.

Wo kein Lichtstrahl die Fläche unmittelbar treffen kann, da ist der Körper im Halbschatten.

Jeder beleuchtete Körper wirft einen Schatten hinter sich auf die dem ihn beleuchtenden Körper entgegengesetzte Seite, und dieser Schatten heißt der Schlagschatten.

Die **Auffindung** dieser **Schlagschatten** ist diejenige Aufgabe, welche wir im Verfolg zu lösen haben.

Steht ein beleuchteter Körper gegen eine helle Fläche angelehnt (z. B. gegen eine helle Mauer), so werden die von dieser hellen Fläche zurückspringenden Lichtstrahlen die Schattenseite (besonders abgerundeter Körper) einigermaßen erhellen, und diese Erhellung nennt man den Reflex.

Zwischen dem Reflex und dem Halbschatten entsteht bei runden Körpern ein dunkler als der Reflex erscheinender Schattenstreifen, welcher der Mittelschatten heißt.

Legt oder stellt man z. B. einen Cylinder auf oder gegen ein hell beleuchtetes Papier, so wird auf der Schattenseite desselben der Reflex an der Stelle erscheinen, welche dem beleuchteten Papiere am nächsten ist, und unmittelbar an diesen Reflex wird sich der Mittelschatten als dunklerer Streif anschließen. Ist der beleuchtende Körper viel größer, als der beleuchtete, und weit entfernt, so kann man annehmen, daß die Lichtstrahlen parallel auf den beleuchteten Körper fallen. Dieser Fall tritt bei dem Sonnenlichte ein, denn die Sonne ist viele Millionen Male größer als die Erde selbst, und folglich auch als jeder von ihr auf der Erde beleuchtete Körper.

Die Sonnenstrahlen also, welche einen Körper beleuchten, sind unter sich als parallel anzunehmen.

Ist der beleuchtende Körper kleiner als der beleuchtete, wie es bei Kerzen, Lampen oder Fackellichte der Fall ist, so sind die Lichtstrahlen nicht als parallel anzunehmen, sondern als nach hinten zu aus einander weichend (divergirend). Wenn man z. B. einen dünnen Stab von einem Kerzenlichte beleuchten und den Schlagschatten gegen eine Wand fallen läßt, so wird der Schlagschatten des Stabes länger und breiter, als der Stab selbst erscheinen, ein Beweis, daß die ihn beleuchtenden Lichtstrahlen aus einander weichen, denn wenn sie parallel wären, würde der Schlagschatten des Stabes eben so lang und eben so dick als der Stab selbst erscheinen.

Für die hier folgenden Schattenconstructionen wird für die Beleuchtung der Körper immer das Sonnenlicht angenommen. Die Lichtstrahlen sind demnach bei allen anzuführenden Beispielen als unter sich parallel zu betrachten.

Das Aufsuchen der Schatten wird in den folgenden Beispielen ausschließlich für in geometrischer Projection gezeichnete Körper stattfinden, da die Auffindung der Schatten an perspectivisch gezeichneten Körpern erst in der dritten Abtheilung gelehrt werden wird.

Um die im Verfolg angegebenen Aufgaben und Lehren verstehen zu können, ist es durchaus nothwendig, sich erst mit der in der ersten Abtheilung dieses Werkes befindlichen Projectionslehre **genau** und **vollständig** bekannt gemacht zu haben, weil außerdem die Schattenconstructionslehre für jeden unverständlich ist.

Man kann sich jeden Lichtstrahl, welcher von einem leuchtenden Körper ausgeht, als gerade Linie denken, und unter dieser Gestalt werden die Lichtstrahlen auch bei den folgenden Aufgaben immer gedacht und gezeichnet werden.

Eben so wird es sich zeigen, daß der Schlagschatten, welchen ein Körper wirft, immer als eine bestimmt begrenzte meßbare Fläche erscheint.

Anmerkung. Wenn im Verfolg der vorliegenden zweiten Abtheilung Paragraphen (§§.) genannt werden (z. B. §. 1), so beziehen sich diese §§. nur auf die zweite Abtheilung. Sollten §§. aus der ersten Abtheilung vorkommen, so wird „I. Abtheilung" dabei stehen. (Z. B. §. 3 ꝛc. I. Abthl.)

§. 2.

Aufgabe. Es soll der Schlagschatten (Schatten) eines Stabes gefunden werden, welcher senkrecht in einer wagerechten Ebene steht.

Auflösung. Es stehe (Taf. 5 Fig. 1) der Stab A B senkrecht in der wagerechten Ebene b c d b' c' d'. Die Sonne stehe bei a so, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad gegen den Stab scheine, so wird der Lichtstrahl a B a', welchen man sich von der Sonne aus über den Stab hinweg bis zur wagerechten Ebene gezogen denkt, einen Winkel von 45 Grad mit der wagerechten Ebene machen.

Es wird nun die Linie B a' die Diagonale eines Quadrats sein, von welchem der Stab B A eine Seite ist (denn bekanntlich bildet die Diagonale eines Quadrats immer einen Winkel von 45 Grad mit den Seiten des Quadrats).

Ist nun aber die Linie A B die eine Seite eines Quadrats und B a' die Diagonale desselben, so ist die Linie A a' ebenfalls eine Seite des Quadrats, und folglich die Linie A a' = A B. Die Linie A a' aber zeigt zugleich die Länge des Schlagschattens an, welchen der Stab A B hinter sich in die wagerechte Ebene wirft, und es folgt hieraus ein für allemal der Satz:

Wenn die Sonne unter einem Winkel von 45 Grad über einem Stabe (einer Linie) steht, so wird der Schatten, welchen dieser Stab (diese Linie) in die wagerechte Ebene wirft, **eben so lang** wie der gegebene Stab (die gegebene Linie) selbst.

Wegen der Bequemlichkeit, welche aus dieser Folgerung für das Auffinden der Schatten bei in geometrischer Projection gezeichneten Körpern entsteht, nimmt man ein für allemal an, daß die Sonne **immer** unter einem Winkel von 45 Grad auf die von ihr beleuchteten Körper herab scheine. Es folgt ferner:

Denkt man sich die Sonne in der Höhe des Grundpunktes des Stabes und die Sonnenstrahlen (wie immer) unter sich parallel, so werden sie in diesem Falle parallel mit der wagerechten Linie laufen, und folglich würde der Schatten des Stabes unendlich lang sein. Denkt man sich die Sonne senkrecht über dem Stabe stehend und ihre Strahlen senkrecht und parallel herunter gezogen, so würde der Stab gar keinen sichtbaren Schatten werfen, denn derselbe würde unter die Grundfläche desselben fallen.

Es folgt ferner, daß man sich außerdem die Sonne unter jedem beliebigen Winkel über dem Stabe stehend denken kann, und daß alsdann der Schatten immer um so länger werden wird, je niedriger die Sonne steht, und um so kürzer, je höher die Sonne steigt; und daß in diesen Fällen der Schatten des Stabes länger und kürzer als der Stab selbst sich zeigen werde, wenn aber die Sonne unter 45 Grad über dem Stabe steht, wird, wie bereits oben erwähnt, der Schatten genau so lang wie der Stab selbst sein.

Auf einer senkrechten Ebene würde man den Stand der Sonne bei a zeichnen können, wenn ihre senkrechte Projection in c auf der Linie c a' fiele.

Dächte man sich aber die Stellung der Sonne in der Höhe so, daß ihre senkrechte Projection in der senkrechten Ebene nicht nach c, sondern nach b oder d fiele, so würde man in der senkrechten Ebene (auf dem Papiere) die Sonne selbst nicht zeichnen können, da sie außerhalb derselben zu stehen käme.

Wohl aber könnte man in der wagerechten Ebene durch die Punkte b c d die Standpunkte der Sonne oberhalb angeben, wenn man die Punkte b c d als die Projectionspunkte der senkrecht darüber stehenden Sonne betrachtet. Denkt man sich nun die Linien b A, c A, d A gezogen, so zeigen sie die Richtung an, unter welcher die Sonne gegen den Stab scheint. Zugleich aber sind sie die wagerechten Projectionen der Neigungswinkel, unter welchem die Sonne von oben herab gegen den Stab scheint.

Ist nun dieser Neigungswinkel 45 Grad und man verlängert die Richtungslinie d A und macht A d' = A B, so ist A d' die Länge des Stabschattens für den Standpunkt der Sonne bei d. Eben so A b' die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei b, und eben so, wie schon vorhin gezeigt wurde, A a' die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei c, welcher Punkt c die Projection des Sonnenstandes bei a ist. Aus alle dem geht hervor, daß man sich den Stand der Sonne (unter einem Höhenwinkel von 45 Grad) um den Stab herum denken kann wo man will, und daß die Richtungslinien b A, c A, d A im Grundriß zugleich die wagerechten Projectionen des Neigungswinkels der Sonnenstrahlen sind.

Der Bequemlichkeit wegen (weil es ebenfalls die Auffindung der Schatten erleichtert) nimmt man immer die Richtungslinie des Sonnenstandes so gegen den beleuchteten Gegenstand (hier der Stab) an, daß die Richtungslinie der Sonne d A auch im Grundrisse einen Winkel von 45 Grad macht. Es fallen also die Lichtstrahlen unter einem Winkel von 45 Grad von oben herunter ein, und **zugleich** bildet die Richtungslinie d A **immer** einen Winkel von 45 Grad mit dem beleuchteten Gegenstande. Eben so nimmt man den Stand der Sonne immer so an, daß die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten hin einfallen, obgleich man auch die Lichtstrahlen von der Rechten zur Linken einfallend annehmen könnte, was ganz gleich wäre. Alsdann würde die Sonne rechts vom beleuchteten Gegenstande (hier bei b') stehen.

Es ist durchaus nothwendig, sich diesen und die beiden folgenden Paragraphen ganz deutlich zu machen, da wir im Verfolg stets darauf werden verweisen müssen, indem sie die Grundbegriffe für alle möglichen Schattenconstructionen enthalten und wir in vielen Fällen, der Kürze wegen, nicht erst darauf verweisen werden, sondern sie späterhin, größtentheils als bekannt voraussetzen wollen.

§. 3.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Prisma im Grundriß gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 2.)

Auflösung. Es sei A B C D der Grundriß eines rechteckigen Prisma, und die Papierfläche um dasselbe herum sei die wagerechte Ebene. Die Höhe des Prisma soll eben so hoch gedacht werden, als die Länge des Stabes A B nebenbei in Fig. 1 angenommen war; so ist also die Größe des Prisma A B C D genau bestimmt, und es soll nun dessen Schlagschatten für zwei verschiedene Sonnenstände gefunden werden. Denke man sich zuvörderst die Sonne so über der wagerechten Ebene stehend, daß ihre Projection nach a fällt und die Sonnenstrahlen im Grundrisse parallel mit den Seiten des Quadrats A B und D C gehen, so werden sie hinter dem Körper verlängert in der Richtung B a' und C a² fallen. Nun stehe die Sonne über ihrem Projectionspunkte bei a so hoch, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad über das Prisma hinweg scheine, so wird sich unter dieser Voraussetzung die Länge der Schattenstrahlen B a' und C a² bestimmen lassen.

Die vier Höhenkanten über den Punkten A B C D des Prisma sind nämlich so hoch angenommen, als in Fig. 1 der Stab A B.