Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 3. Aufgabe. Es soll der Schatten eines Prisma im Grundriß gefunden werden. (Taf. 5. Fig. 2.)

bei a so, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad gegen den Stab scheine, so wird der Lichtstrahl a B a', welchen man sich von der Sonne aus über den Stab hinweg bis zur wagerechten Ebene gezogen denkt, einen Winkel von 45 Grad mit der wagerechten Ebene machen.

Es wird nun die Linie B a' die Diagonale eines Quadrats sein, von welchem der Stab B A eine Seite ist (denn bekanntlich bildet die Diagonale eines Quadrats immer einen Winkel von 45 Grad mit den Seiten des Quadrats).

Ist nun aber die Linie A B die eine Seite eines Quadrats und B a' die Diagonale desselben, so ist die Linie A a' ebenfalls eine Seite des Quadrats, und folglich die Linie A a' = A B. Die Linie A a' aber zeigt zugleich die Länge des Schlagschattens an, welchen der Stab A B hinter sich in die wagerechte Ebene wirft, und es folgt hieraus ein für allemal der Satz:

Wenn die Sonne unter einem Winkel von 45 Grad über einem Stabe (einer Linie) steht, so wird der Schatten, welchen dieser Stab (diese Linie) in die wagerechte Ebene wirft, **eben so lang** wie der gegebene Stab (die gegebene Linie) selbst.

Wegen der Bequemlichkeit, welche aus dieser Folgerung für das Auffinden der Schatten bei in geometrischer Projection gezeichneten Körpern entsteht, nimmt man ein für allemal an, daß die Sonne **immer** unter einem Winkel von 45 Grad auf die von ihr beleuchteten Körper herab scheine. Es folgt ferner:

Denkt man sich die Sonne in der Höhe des Grundpunktes des Stabes und die Sonnenstrahlen (wie immer) unter sich parallel, so werden sie in diesem Falle parallel mit der wagerechten Linie laufen, und folglich würde der Schatten des Stabes unendlich lang sein. Denkt man sich die Sonne senkrecht über dem Stabe stehend und ihre Strahlen senkrecht und parallel herunter gezogen, so würde der Stab gar keinen sichtbaren Schatten werfen, denn derselbe würde unter die Grundfläche desselben fallen. Es folgt ferner, daß man sich außerdem die Sonne unter jedem beliebigen Winkel über dem Stabe stehend denken kann, und daß alsdann der Schatten immer um so länger werden wird, je niedriger die Sonne steht, und um so kürzer, je höher die Sonne steigt; und daß in diesen Fällen der Schatten des Stabes länger und kürzer als der Stab selbst sich zeigen werde, wenn aber die Sonne unter 45 Grad über dem Stabe steht, wird, wie bereits oben erwähnt, der Schatten genau so lang wie der Stab selbst sein.

Auf einer senkrechten Ebene würde man den Stand der Sonne bei a zeichnen können, wenn ihre senkrechte Projection in c auf der Linie c a' fiele.

Dächte man sich aber die Stellung der Sonne in der Höhe so, daß ihre senkrechte Projection in der senkrechten Ebene nicht nach c, sondern nach b oder d fiele, so würde man in der senkrechten Ebene (auf dem Papiere) die Sonne selbst nicht zeichnen können, da sie außerhalb derselben zu stehen käme.

Wohl aber könnte man in der wagerechten Ebene durch die Punkte b c d die Standpunkte der Sonne oberhalb angeben, wenn man die Punkte b c d als die Projectionspunkte der senkrecht darüber stehenden Sonne betrachtet. Denkt man sich nun die Linien b A, c A, d A gezogen, so zeigen sie die Richtung an, unter welcher die Sonne gegen den Stab scheint. Zugleich aber sind sie die wagerechten Projectionen der Neigungswinkel,

unter welchem die Sonne von oben herab gegen den Stab scheint.

Ist nun dieser Neigungswinkel 45 Grad und man verlängert die Richtungslinie d A und macht A d' = A B, so ist A d' die Länge des Stabschattens für den Standpunkt der Sonne bei d. Eben so A b' die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei b, und eben so, wie schon vorhin gezeigt wurde, A a' die Länge des Schattens für den Standpunkt der Sonne bei c, welcher Punkt c die Projection des Sonnenstandes bei a ist. Aus alle dem geht hervor, daß man sich den Stand der Sonne (unter einem Höhenwinkel von 45 Grad) um den Stab herum denken kann wo man will, und daß die Richtungslinien b A, c A, d A im Grundriß zugleich die wagerechten Projectionen des Neigungswinkels der Sonnenstrahlen sind.

Der Bequemlichkeit wegen (weil es ebenfalls die Auffindung der Schatten erleichtert) nimmt man immer die Richtungslinie des Sonnenstandes so gegen den beleuchteten Gegenstand (hier der Stab) an, daß die Richtungslinie der Sonne d A auch im Grundrisse einen Winkel von 45 Grad macht. Es fallen also die Lichtstrahlen unter einem Winkel von 45 Grad von oben herunter ein, und **zugleich** bildet die Richtungslinie d A **immer** einen Winkel von 45 Grad mit dem beleuchteten Gegenstande. Eben so nimmt man den Stand der Sonne immer so an, daß die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten hin einfallen, obgleich man auch die Lichtstrahlen von der Rechten zur Linken einfallend annehmen könnte, was ganz gleich wäre. Alsdann würde die Sonne rechts vom beleuchteten Gegenstande (hier bei b') stehen.

Es ist durchaus nothwendig, sich diesen und die beiden folgenden Paragraphen ganz deutlich zu machen, da wir im Verfolg stets darauf werden verweisen müssen, indem sie die Grundbegriffe für alle möglichen Schattenconstructionen enthalten und wir in vielen Fällen, der Kürze wegen, nicht erst darauf verweisen werden, sondern sie späterhin, größtentheils als bekannt voraussetzen wollen.

§. 3.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines Prisma im Grundriß gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 2.)

Auflösung. Es sei A B C D der Grundriß eines rechteckigen Prisma, und die Papierfläche um dasselbe herum sei die wagerechte Ebene. Die Höhe des Prisma soll eben so hoch gedacht werden, als die Länge des Stabes A B nebenbei in Fig. 1 angenommen war; so ist also die Größe des Prisma A B C D genau bestimmt, und es soll nun dessen Schlagschatten für zwei verschiedene Sonnenstände gefunden werden. Denke man sich zuvörderst die Sonne so über der wagerechten Ebene stehend, daß ihre Projection nach a fällt und die Sonnenstrahlen im Grundrisse parallel mit den Seiten des Quadrats A B und D C gehen, so werden sie hinter dem Körper verlängert in der Richtung B a' und C a^2 fallen. Nun stehe die Sonne über ihrem Projectionspunkte bei a so hoch, daß sie unter einem Winkel von 45 Grad über das Prisma hinweg scheine, so wird sich unter dieser Voraussetzung die Länge der Schattenstrahlen B a' und C a^2 bestimmen lassen.

Die vier Höhenkanten über den Punkten A B C D des Prisma sind nämlich so hoch angenommen, als in Fig. 1 der Stab AB.

Es wird aber nach §. 1 der Schatten einer Linie (eines Stabes) so lang wie die Linie selbst, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel von 45 Grad über die Linie hinweg scheint; dies ist hier angenommen, und folglich werden die Schattenlinien B a' und C a² so lang wie die Kanten des Prisma hoch sind, das heißt so lang, wie der Stab A B in Fig. 1. Verbindet man nun noch die Schattenpunkte a' und a², so ist das Rechteck B a' a² C der Schlagschatten des Prisma, wovon das Quadrat A B C D den Grundriß darstellt.

Da die Sonnenstrahlen von a aus parallel mit A B und C D gehen, so streifen sie an den Seitenflächen hin, so daß diese keinen Schatten werfen, sondern nur die Höhenkanten, deren Grundpunkte B und C sind, werfen den Schatten hinter sich, so wie die oberhalb B C befindliche Querkante, deren Schatten die Linie a' a² begrenzt.

Wir haben aber in §. 1 angenommen, daß die Stellung der Sonne gegen die Körper, zu denen wir die Schatten suchen wollen, immer unter einer Richtungslinie von 45 Grad, sowohl von oben herab, als auch in der Richtungslinie des Grundrisses statt finden soll, wir nehmen daher jetzt an, daß die Projection der Sonne bei b erscheine und die Richtungslinie der Sonnenstrahlen in der Linie b D B b² liege (also in der Diagonale des Grundrisses), oder, was dasselbe ist, unter einer Richtung von 45 Grad gegen den Grundriß des Körpers.

Mit der Richtungslinie der Sonnenstrahlen b D B b² gehen die Strahlen A b' und C b³ parallel (§. 2), und es wird also durch sie die Breite des ganzen Schlagschattens bestimmt.

Nimmt man die Höhe des Prisma wie vorhin an, so wird die Schattenlinie B b² so lang, wie die Höhenkante über dem Punkte B werden, oder so lang, wie B a' und C a² waren.

Eben so lang werden die Schattenlinien A b' und C b³ werden.

Zieht man nun b' b² und b² b³, so sind diese beiden Linien die Schattenbegrenzungen für die über A B und B C oberhalb befindlichen Kanten des Prisma, wodurch der ganze Schatten des gegebenen Körpers begrenzt wird. Man sieht aus diesen beiden Beispielen, daß die Schlagschatten, je nach dem verschiedenen Stande der Sonne, auch eine verschiedene Gestalt annehmen würden.

§. 4.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers im Grund- und Aufrisse gefunden werden, wenn der Körper an eine senkrechte Wand angelehnt steht. (Taf. 5 Fig. 3.)

Auflösung. Es sei E C D F der Grundriß des Prisma, welcher an einer Wand steht, deren Verlängerung in der Linie E F liegt.

Es sei ferner, oben über dem Grundrisse, das Rechteck A B D C der Aufriß des gegebenen Prisma, so findet man die Schatten im Grund- und Aufrisse wie folgt. Die Linie D D' im Grundrisse giebt die Projection der Richtungslinie des Sonnenstandes an. Es fallen demnach mit ihr parallel alle Sonnenstrahlen auf den Körper.

Denkt man sich eine beliebige Menge solcher Parallelen mit D D' auf die Linien E C und C D gezogen, so werden diese beiden Seiten von diesen Sonnenstrahlen beleuchtet werden, weil sie diese Seiten treffen.

Mit der Seite D F des Grundrisses verhält es sich anders.

Der Lichtstrahl D D' und alle mit ihm parallelen streifen vorbei, ohne die Seite D F zu treffen; sie wird also nicht beleuchtet werden. Dasselbe gilt von der Rückseite E F, welche auch ohnehin an der senkrechten Wand angelehnt angenommen ist. Es wird also der Schatten der ganzen über D im Grundriß befindlichen senkrechten Kante des Prisma in der Richtung der Linie D D' geworfen werden, und diese Linie wird zugleich die äußerste Grenze des Schattens im Grundrisse bezeichnen; es wird demnach das Dreieck D F D die Schattenfläche des Prisma im Grundrisse sein, denn wenn man auch noch zum Ueberflusse in der Kante D F die Schattenpunkte a b nach a' und b' hin suchen wollte, so würden die gefundenen Schattenlinien a a' und b b' innerhalb der Schattenfläche D F D' selbst fallen.

Um den Schatten des Aufrisses zu finden, ist Folgendes zu bemerken.

Im Grundrisse war die Seite C D im Lichte; es ist also die ganze Fläche des Aufrisses A C D B ebenfalls im Lichte.

Die Seite E C im Grundrisse ist zwar ebenfalls im Lichte, ist aber im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie A C des Aufrisses fällt. Die Seite D F des Grundrisses ist im Schatten, sie ist im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie B D des Aufrisses fällt, diese ganze Seitenfläche ist aber gerade diejenige, welche ihren Schatten hinter sich an die Wand wirft.

Betrachten wir den Punkt D des Grundrisses, so liegt seine Projection im Aufrisse in der ganzen Linie D B, folglich auch in B, und der Punkt B ist zugleich die Projection der obersten Seitenkante des Prisma und auch zugleich die Projection der Linie D F des Grundrisses.

Zieht man nun im Aufrisse die Linie B D² unter 45 Grad beliebig lang, so ist diese die Richtungslinie des Schattens, welchen die ganze Seitenkante des Prisma auf die Wand werfen wird.

Zieht man nun von D' im Grundrisse eine Normale D' D², so bezeichnet die Linie D² D³ die Grenze des Schattens, welchen die ganze Höhenkante B D des Aufrisses auf die hinten stehende Wand wirft. Will man die Linie B D² im Aufrisse noch genauer bestimmen, um sich zu überzeugen, daß sie richtig ist, so nehme man in der Linie D F des Grundrisses noch die Punkte a und b an und ziehe ihre Schattenlinien von a nach a' und von b nach b'. Der Schatten, welchen der Punkt F des Grundrisses im Aufrisse wirft, fällt in den Punkt B, da dieser die höchste Projection von F ist.

Der Punkt b des Grundrisses fällt in seiner senkrechten Projection ebenfalls nach B im Aufrisse. Die Linie B b² im Aufrisse zeigt die Richtung des Schattens, welchen der Punkt b im Grundrisse an der Wand werfen wird; und zieht man nun die Normale b' b², so ist b² die Projection von b' und die Linie B b² des Aufrisses ist die Länge der Schattenlinie von F bis b im Grundrisse.

Eben so liegt die Projection des Grundrißpunktes a im Aufrisse in B. Zieht man im Aufrisse B a², so ist diese Linie wieder die Schattenrichtung wie vorhin, zieht man im Grundrisse a a', so ist a' der Punkt, wohin a seinen Schatten wirft, zieht man die Normale a' a², so ist a² die Projection von a' und die Linie B a² im Aufrisse die Länge des Schattens, welchen die Linie des Grundrisses F a wirft. Da nun die Punkte des Aufrisses b² a² in die Linie B D² fallen, so ist B D² die Schat-