Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 4. Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers im Grund- und Aufrisse gefunden werden, wenn der Körper an eine senkrechte Wand angelehnt steht. (Taf. 5 Fig. 3.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-66132

Es wird aber nach §. 1 der Schatten einer Linie (eines Stabes) so lang wie die Linie selbst, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel von 45 Grad über die Linie hinweg scheint; dies ist hier angenommen, und folglich werden die Schattenlinien B a' und C a² so lang wie die Kanten des Prisma hoch sind, das heißt so lang, wie der Stab A B in Fig. 1. Verbindet man nun noch die Schattenpunkte a' und a², so ist das Rechteck B a' a² C der Schlagschatten des Prisma, wovon das Quadrat A B C D den Grundriß darstellt.

Da die Sonnenstrahlen von a aus parallel mit A B und C D gehen, so streifen sie an den Seitenflächen hin, so daß diese keinen Schatten werfen, sondern nur die Höhenkanten, deren Grundpunkte B und C sind, werfen den Schatten hinter sich, so wie die oberhalb B C befindliche Querkante, deren Schatten die Linie a' a² begrenzt.

Wir haben aber in §. 1 angenommen, daß die Stellung der Sonne gegen die Körper, zu denen wir die Schatten suchen wollen, immer unter einer Richtungslinie von 45 Grad, sowohl von oben herab, als auch in der Richtungslinie des Grundrisses statt finden soll, wir nehmen daher jetzt an, daß die Projection der Sonne bei b erscheine und die Richtungslinie der Sonnenstrahlen in der Linie b D B b² liege (also in der Diagonale des Grundrisses), oder, was dasselbe ist, unter einer Richtung von 45 Grad gegen den Grundriß des Körpers.

Mit der Richtungslinie der Sonnenstrahlen b D B b² gehen die Strahlen A b' und C b³ parallel (§. 2), und es wird also durch sie die Breite des ganzen Schlagschattens bestimmt.

Nimmt man die Höhe des Prisma wie vorhin an, so wird die Schattenlinie B b² so lang, wie die Höhenkante über dem Punkte B werden, oder so lang, wie B a' und C a² waren.

Eben so lang werden die Schattenlinien A b' und C b³ werden.

Zieht man nun b' b² und b² b³, so sind diese beiden Linien die Schattenbegrenzungen für die über A B und B C oberhalb befindlichen Kanten des Prisma, wodurch der ganze Schatten des gegebenen Körpers begrenzt wird. Man sieht aus diesen beiden Beispielen, daß die Schlagschatten, je nach dem verschiedenen Stande der Sonne, auch eine verschiedene Gestalt annehmen würden.

§. 4.

Aufgabe. Es soll der Schatten eines prismatischen Körpers im Grund- und Aufrisse gefunden werden, wenn der Körper an eine senkrechte Wand angelehnt steht. (Taf. 5 Fig. 3.)

Auflösung. Es sei E C D F der Grundriß des Prisma, welcher an einer Wand steht, deren Verlängerung in der Linie E F liegt.

Es sei ferner, oben über dem Grundrisse, das Rechteck A B D C der Aufriß des gegebenen Prisma, so findet man die Schatten im Grund- und Aufrisse wie folgt. Die Linie D D' im Grundrisse giebt die Projection der Richtungslinie des Sonnenstandes an. Es fallen demnach mit ihr parallel alle Sonnenstrahlen auf den Körper.

Denkt man sich eine beliebige Menge solcher Parallelen mit D D' auf die Linien E C und C D gezogen, so werden diese beiden Seiten von diesen Sonnenstrahlen beleuchtet werden, weil sie diese Seiten treffen.

Mit der Seite D F des Grundrisses verhält es sich anders. Der Lichtstrahl D D' und alle mit ihm parallelen streifen vorbei, ohne die Seite D F zu treffen; sie wird also nicht beleuchtet werden. Dasselbe gilt von der Rückseite E F, welche auch ohnehin an der senkrechten Wand angelehnt angenommen ist. Es wird also der Schatten der ganzen über D im Grundriß befindlichen senkrechten Kante des Prisma in der Richtung der Linie D D' geworfen werden, und diese Linie wird zugleich die äußerste Grenze des Schattens im Grundrisse bezeichnen; es wird demnach das Dreieck D F D die Schattenfläche des Prisma im Grundrisse sein, denn wenn man auch noch zum Ueberflusse in der Kante D F die Schattenpunkte a b nach a' und b' hin suchen wollte, so würden die gefundenen Schattenlinien a a' und b b' innerhalb der Schattenfläche D F D' selbst fallen.

Um den Schatten des Aufrisses zu finden, ist Folgendes zu bemerken.

Im Grundrisse war die Seite C D im Lichte; es ist also die ganze Fläche des Aufrisses A C D B ebenfalls im Lichte.

Die Seite E C im Grundrisse ist zwar ebenfalls im Lichte, ist aber im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie A C des Aufrisses fällt. Die Seite D F des Grundrisses ist im Schatten, sie ist im Aufrisse nicht sichtbar, da ihre Projection in die Linie B D des Aufrisses fällt, diese ganze Seitenfläche ist aber gerade diejenige, welche ihren Schatten hinter sich an die Wand wirft.

Betrachten wir den Punkt D des Grundrisses, so liegt seine Projection im Aufrisse in der ganzen Linie D B, folglich auch in B, und der Punkt B ist zugleich die Projection der obersten Seitenkante des Prisma und auch zugleich die Projection der Linie D F des Grundrisses.

Zieht man nun im Aufrisse die Linie B D² unter 45 Grad beliebig lang, so ist diese die Richtungslinie des Schattens, welchen die ganze Seitenkante des Prisma auf die Wand werfen wird.

Zieht man nun von D' im Grundrisse eine Normale D' D², so bezeichnet die Linie D² D³ die Grenze des Schattens, welchen die ganze Höhenkante B D des Aufrisses auf die hinten stehende Wand wirft. Will man die Linie B D² im Aufrisse noch genauer bestimmen, um sich zu überzeugen, daß sie richtig ist, so nehme man in der Linie D F des Grundrisses noch die Punkte a und b an und ziehe ihre Schattenlinien von a nach a' und von b nach b'. Der Schatten, welchen der Punkt F des Grundrisses im Aufrisse wirft, fällt in den Punkt B, da dieser die höchste Projection von F ist.

Der Punkt b des Grundrisses fällt in seiner senkrechten Projection ebenfalls nach B im Aufrisse. Die Linie B b² im Aufrisse zeigt die Richtung des Schattens, welchen der Punkt b im Grundrisse an der Wand werfen wird; und zieht man nun die Normale b' b², so ist b² die Projection von b' und die Linie B b² des Aufrisses ist die Länge der Schattenlinie von F bis b im Grundrisse.

Eben so liegt die Projection des Grundrißpunktes a im Aufrisse in B. Zieht man im Aufrisse B a², so ist diese Linie wieder die Schattenrichtung wie vorhin, zieht man im Grundrisse a a', so ist a' der Punkt, wohin a seinen Schatten wirft, zieht man die Normale a' a², so ist a² die Projection von a' und die Linie B a² im Aufrisse die Länge des Schattens, welchen die Linie des Grundrisses F a wirft. Da nun die Punkte des Aufrisses b² a² in die Linie B D² fallen, so ist B D² die Schattenlinie für die obere Kante des Grundrisses **F D** und die Figur **B D² D³ D** im Aufrisse der Schatten, welchen das Prisma an die Wand wirft.

Da die Sonne hoch oben über dem Körper steht, so wird seine obere Fläche (wovon die Linie **A B** des Aufrisses die Projection ist) beleuchtet sein.

Der Körper warf außer dem im Aufrisse sichtbaren Schatten auch im Grundrisse einen sichtbaren Schatten **D F D'**, welcher aber in der Aufrißzeichnung nicht sichtbar wird, da seine Projection dort mit der Grundlinie der senkrechten Wandebene zusammenfällt.

Eben so ist der Schatten des Aufrisses im Grundrisse nicht sichtbar, denn er fällt hier mit der Linie **D D³** zusammen.

Wir haben uns hier etwas weitläufig über die Aufsuchung des Schattens ausgelassen, weil wir uns künftig oft auf diesen §. beziehen werden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer viereckigen, aus einer senkrechten Mauer vorspringenden Platte gefunden werden. (Taf. 5 Fig. 4.)

Auflösung. Oberhalb befindet sich der Aufriß und unterhalb der zugehörige Grundriß.

Betrachten wir zuerst den Grundriß.

Die Linie a a' ist die Projectionslinie der Richtung der Sonnenstrahlen, welche mit ihr parallel sind. Es ist demnach die Seite **C E** und **C D** beleuchtet, da die Lichtstrahlen darauf auffallen. Die Seite **E F** ist unbeleuchtet, denn sie lehnt sich an die Mauer. Bei der Seite **D F** streifen die Lichtstrahlen vorbei, sie ist also nicht beleuchtet.

Betrachten wir nun den Aufriß.

Die Sonne steht unter einem Winkel von 45 Grad oberhalb und beleuchtet die vorspringende Platte **A C B D**. Die obere Fläche, deren Projection die Linie **A B** ist, wird beleuchtet.

Die vordere Fläche **A C B D** ist beleuchtet. Die Seitenfläche, deren Projection die Linie **A C** ist, ist beleuchtet. Die Seitenfläche, deren Projection die Linie **B D** ist, ist nicht beleuchtet, wird also einen Schatten hinter sich an die Wand werfen.

Die ganze untere Fläche der Platte, deren Projection die Linie **C D** ist, ist nicht beleuchtet, sie wird also einen Schatten unter sich an die Wand werfen. Die Projection der untern Fläche ist die Linie **C D**, es wird also diese die schattenwerfende sein. Nimmt man in dieser Linie die Punkte a² b² c² **D** an und zieht die Linien a² a³, b² b³, c² c³, **D D²**, so hat man die Richtungslinien des Schattens. Die Seite der Platte, deren Projection die Linie **B D** ist, wirft einen Schatten hinter sich und seine Richtungslinien werden die Linien **D D²** und **B D³** sein.

Um nun die Länge dieser Richtungslinien des Schattens im Aufrisse bestimmen zu können, müssen wir zum Grundrisse zurückkehren.

Der Punkt a wirft seinen Schatten bis an die Wand bei a', es ist also die Linie a a' die Projection der Länge des Lichtstrahles, welcher unter einem Winkel von 45 Grad von dem oben liegenden Punkte a nach dem unten an der Wand liegenden Punkte a' fällt.

Eben so ist im Aufrisse die Linie a² a³ die Projection desselben Lichtstrahles. Um nun die Länge desselben zu finden, braucht man nur von a' im Grundrisse normal nach a³ im Aufrisse hinauf zu ziehen, so schneidet sich in a³ die Länge des Lichtstrahles a² a³ ab; denn die Linie des Grundrisses a a' ist die Projection davon. Eben so findet man die Längen für b² b³, c² c³, **D D²**, und man hat nunmehr den Schatten der unteren Fläche der Platte gefunden.

Um den Schatten derjenigen Seitenfläche zu finden, wovon die Linie **B D** im Aufrisse die Projection ist, betrachte man wieder den Grundriß.

Daselbst ist die Linie **D F** die Projection der Seitenansicht der Platte. Die Linie **D F** ist zugleich die obere Kante dieser Fläche und wird einen Schatten hinter sich an die Wand werfen.

Der Punkt **D** wirft seinen Schatten nach **D'** im Grundrisse. Zieht man von **D'** eine Normale bis **D²** im Aufrisse, so bestimmt sich die Länge der Linie **D D²** im Aufrisse. Zieht man von **D'** im Grundrisse eben so eine Normale bis **D³** im Aufrisse, so ist **B D³** im Aufrisse seiner Länge nach bestimmt, und es ist **D D² D³ B** die Gestalt des Schattens von der Seitenfläche, deren Projection die Linie des Aufrisses **D B** ist. Nun hat man den ganzen Schatten gefunden, welchen die Platte auf die Wand wirft, seine Gestalt wird durch die Punkte **B D³ D²** a³ a² bestimmt. Im Grundrisse wird man von diesem Schatten nichts zu sehen bekommen, denn da er eine ebene Fläche bildet und in der senkrechten Ebene liegt, so wird seine Projection im Grundrisse in die verlängerte Linie **E F** fallen, welche die wagerechte Projection der oberhalb gedachten senkrechten Wandfläche ist, aus welcher die Platte hervorsteht. Man vergleiche nochmals die §§. 1 bis 4.

§. 6.

Aufgabe. Es soll der Schatten einer dreieckigen Platte gefunden werden, welche aus einer senkrechten Wand hervorspringt. (Taf. 5 Fig. 5.)

Auflösung. Die Figur **A B C D E F** zeigt die dreieckige Platte im Aufrisse und die Figur **F E D** dieselbe im Grundrisse darunter.

Betrachten wir zuerst den Grundriß.

Die unter 45 Grad gezogene Linie a a' bezeichnet die Richtungslinie der Lichtstrahlen. Denkt man sich deren mehrere parallel mit einander, so fallen sie auf die Seite **F E**, dieselbe wird also beleuchtet sein. Der Lichtstrahl **E E'** streift an der Seite **E D** vorbei, dieselbe wird also nicht beleuchtet sein und einen Schatten hinter sich werfen.

Da die Sonne oberhalb der Platte steht, so wird die obere Fläche derselben beleuchtet sein, die untere Fläche aber wird dunkel bleiben und einen Schatten unter sich werfen.

Betrachten wir nun den Aufriß, so ist die Fläche **A B E F** beleuchtet, die Fläche **B E C D** ist nicht beleuchtet, eben so ist die untere Fläche der Platte, deren Projection die Linie **F E D** ist, nicht beleuchtet, und diese Linie wird einen Schatten unter sich werfen.

Zieht man nun die schattenwerfenden Punkte des Grundrisses **F** a **E** b **D** normal in den Aufriß hinauf nach **F** a' **E B** b² **D C**, so hat man im Aufrisse die schattenwerfenden Punkte bestimmt. Zieht man von diesen die Richtungslinien a² a³, **E E²**, **B B'**, b² b³, und schneidet man aus den übereinstimmenden Punkten des Grundrisses normal hinauf in diese Richtungslinien (wie §. 5), so erhält man die Punkte **F** a³ **E² B'** b³ **C**. Verbindet man nun den Punkt **F** mit a³, a³ mit **E²**, **E²** mit **B'**, **B'** mit b³ und b³ mit **C**, so geben diese Endpunkte zugleich die Gestalt des