Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§.1. Einleitung.

Dritte Abtheilung.

A. Isoperimetrische Perspective.

§. 1.

Einleitung.

In der ersten Abtheilung, welche die Projectionslehre abhandelte, haben wir gesehen, daß es eine Art Zeichnungen gab, nach welcher man Körper durch Aufzeichnung des Grundrisses, des Aufrisses, und des Durchschnittes **meßbar** in allen ihren einzelnen Theilen darstellen konnte. So wichtig diese Art Darstellung für den Bauhandwerker, so unentbehrlich sie für die Aufzeichnung von sogenannten Baurissen ist, hat sie nichts desto weniger manches Weitläufige und Unbequeme, namentlich bei Darstellung solcher Gegenstände, bei welchen viele einzelne in einander greifende Theile verdeutlicht werden sollen; man ist alsdann genöthigt, den Zusammenhang immer aus dem Grundrisse, dem Aufrisse und dem Durchschnitte zugleich herauszusuchen, was in manchen Fällen, und namentlich bei verwickelten einzelnen Bautheilen (Details), bei schwierigen Dachconstructionen ꝛc., aber ganz insbesondere bei Darstellungen von Maschinen, wo man häufig seine Einbildungskraft sehr anstrengen muß, um sich aus den gewöhnlichen sogenannten geometrischen Zeichnungen Alles gehörig zu verdeutlichen, viele Schwierigkeiten hat. Bei diesen geometrischen Projectionszeichnungen hat man bekanntlich immer nur eine einzelne Ebene vor sich, entweder den Grundriß, den Aufriß oder den Durchschnitt, man kann also die Maße des dargestellten Körpers auch nur nach und nach aus diesen drei Arten von Zeichnung auffinden.

Es ist aber oft höchst wünschenswerth, diese drei Arten der Projection, so zu sagen in einer einzigen Zeichnung zu verbinden, und dies lehrt die isoperimetrische Perspective.

Bei dem gewöhnlichen Projectionszeichnen werden im Grundrisse die Maße der Länge und Breite, im Aufrisse die Maße der Höhe, dargestellt; hierzu braucht man immer mindestens zwei Zeichnungen, häufig auch noch den Durchschnitt als dritte Zeichnung.

Könnte man nun die Maße der Länge, Breite und Höhe in einer einzigen Zeichnung und zugleich bequem meßbar darstellen, so sieht man, welchen Vortheil diese Vereinfachung haben müßte.

Ein Engländer Farish, Professor an der Universität Cambridge, hat diese Erfindung gemacht und sie die isoperimetrische Perspective genannt. Der Name kommt aus dem Griechischen, läßt sich nicht mit einem einzelnen Worte verdeutschen, bedeutet aber so viel, als daß die drei Hauptabmessungen eines Körpers (Länge, Breite, Höhe) nach einem und demselben Maßstabe in einer und derselben Zeichnung dargestellt werden können.

Die senkrechten Linien bleiben alsdann auch in der Zeichnung senkrecht, die wagerechten Linien, welche die Länge und Breite einer Ebene begrenzen, neigen sich aber (wenn sie rechtwinklig auf einander stehen) nicht rechtwinklig, sondern unter Winkeln von 60 Grad.

Ein Beispiel wird dies deutlicher machen.

Man denke sich (Tafel 8 Fig. 1) eine wagerechte Linie A B. In dieser Linie nehme man einen beliebigen Punkt d als Anfangspunkt der Zeichnung an, so heißt dieser Punkt der regulirende Punkt.

Von diesem Punkte aus soll ein Würfel (Cubus) isoperimetrisch verzeichnet werden.

In d errichte man die lothrechte Linie d c und mache sie so lang, als die eine Seite des Cubus werden soll. Ferner ziehe man durch denselben Punkt d zwei Linien d f und d b beide so gegen die wagerecht Linie A B geneigt, daß sie mit ihr Winkel von 30 Grad bilden, so wird der Winkel, welchen die Linien d f und d b einschließen, 120 Grad betragen, was so viel ist, als $2 \times 60 = 120$ Grad.

Nun mache man die Linie d f = d c und die Linie b d = c d, so hat man die beiden untern Kanten des Cubus bestimmt. Es würde der Punkt b links und der Punkt f rechts von dem regulirenden Punkte d liegen, was auch in der Zukunft, bei zu suchenden Punkten, zu merken ist.

Errichtet man nun auf den Punkten b und f die Lothrechten b a und e f, und macht diese beiden Linien = c d, so hat man wieder zwei Kanten des Würfels gefunden.

Nun ziehe man a c parallel mit b d und c e parallel mit d f, so hat man die oberen Kanten der beiden Seitenflächen. Zieht man nun noch g a parallel mit c e, und g e parallel mit a c, so hat man die beiden Kanten der den Cubus oberhalb begrenzenden Fläche gefunden, und somit den ganzen Körper, so weit er dem Auge in der Natur sichtbar sein würde, wenn man sich das Auge in der nach oben verlängerten Diagonale des Cubus dächte.

Betrachtet man die Zeichnung, so zeigt sie von dem Körper zwei Seitenflächen und eine obere Fläche, aus der oberen Fläche kann man die Maße der Länge und Breite, und aus den Seitenflächen die Maße der Höhe entnehmen.

Es wird demnach eine solche isometrische Zeichnung stets drei Seiten eines Körpers zeigen, wenn eine gewöhnliche geometrische Projection nur eine Seite auf einmal gezeigt hätte.

Der mathematische Beweis dafür, daß alle verschiedenen Flächen der Zeichnung nach einerlei Maßstab meßbar sind, wird hier als zu weit führend übergangen, er beruht jedoch darauf, daß in einem regelmäßigen Sechseck alle Mittelpunktswinkel gleich 60 Grad, und die Seiten des Sechsecks den Radien des Kreises gleich sind, in welchem das Sechseck beschrieben ist, wie Fig. 1 zeigt.

Der Punkt d hieß als erster Punkt, von welchem aus die übrigen bestimmt wurden, der regulirende Punkt.

Die Linie c d, als die erste Lothrechte, nach welcher die anderen bestimmt werden, heißt immer die Verticale zum Unterschiede gegen die übrigen Senkrechten.

Die beiden Linien b d und d f, welche durch den regulirenden Punkt d gehen, heißen beide die horizontalen Linien, zum Unterschiede gegen alle übrigen, und davon heißt d b die linke und d f die rechte Horizontale.

Die Ebene e d f e, welche durch die verticale Linie c d und durch die rechte Linie e f geht, heißt die rechte Ebene.

Die Ebene c d a b, welche durch die verticale Linie c d und die linke Linie a b geht, heißt die linke Ebene.

Diese Benennungen dienen dazu, um die Lage irgend eines beliebigen Punktes so leicht als möglich zu bestimmen, wenn man seine drei Abstände mißt, denn jeder Punkt muß entweder in einer der regulirenden Linien selbst liegen (wo er dann leicht zu finden ist), oder er liegt außerhalb der regulirenden Linien irgendwo; alsdann bestimme man seine Abstände gegen die rechte und linke Horizontallinie, wodurch man die Länge und Breite des Abstandes findet, und alsdann bestimme man in den senkrechten Ebenen die Höhe des Punktes, ziehe dann von diesen Punkten parallele Linien mit der rechten und linken Horizontale, und wo diese Parallelen sich schneiden, wird der gesuchte Punkt liegen.

Die folgenden Beispiele werden das Verfahren hinlänglich verdeutlichen.

Im Ganzen übersieht man vorläufig gewiß durch die Zeichnung des Cubus so viel, daß ein anschauliches Bild jedes Körpers auf diesem Wege geliefert werden, und daß man in diesem Körper jeden beliebig gegebenen Punkt, auch in der Zeichnung bestimmen könne. Aber auch jeder beliebig gegebene Punkt außerhalb des Körpers ist dadurch bestimmbar, daß man nach den zu bestimmenden Maßen seine Abstände gegen die horizontalen und senkrechten Ebenen bestimmt und dadurch seine Lage in der Zeichnung festsetzt.

Es wird also auch keine Schwierigkeit machen, jede beliebige gerade Linie isometrisch zu zeichnen, wenn man ihre beiden Endpunkte bestimmt, und diese durch eine gerade Linie verbindet.

Krumme Linien jeglicher Gestalt lassen sich ebenfalls dadurch bestimmen, daß man in ihnen eine beliebige Menge Punkte annimmt, diese isometrisch bestimmt und dann diese zuletzt in der Zeichnung gefundenen Punkte durch Linien mit einander verbindet.

Es leuchtet ein, daß je mehr Punkte man auf diese Art für eine krumme Linie sucht, um so genauer wird ihr Bild in der Zeichnung werden.

Nachdem wir die allgemeinen Begriffe der isoperimetrischen

Perspective erläutert, wenden wir uns zu einzelnen Beispielen, welche das Verfahren vollkommen verdeutlichen werden.

Betrachten wir zur besseren Verständigung Fig. 1 noch einmal, so ergiebt sich Folgendes.

Der Cubus wird durch ein regelmäßiges (im Kreise construirtes) Sechseck und durch die Radien c d, c e, c a dargestellt. Denkt man sich außerdem im Sechseck Radien gezogen, so sind alle Winkel am Mittelpunkte = 60 Grad.

Das Sechseck hat vor allen im Kreise gezeichneten regelmäßigen Vielecken, die Eigenschaft, daß jede Seite des Sechsecks gleich dem Radius des Kreises ist. Folglich sind hier im Cubus alle Seiten gleich lang und folglich auch nach einerlei Maßstabe meßbar.

Wenn man z. B. eine der Seiten des Cubus in 5 Fuß getheilt annimmt, so werden alle übrigen Seiten des Cubus mit demselben Maßstabe meßbar sein.

Will man die Diagonale einer der Seitenflächen wirklich messen, so beschreibe man, wie Tafel 8 Fig. 2, ein Quadrat a c d b mit einer der Seiten des Cubus aus Fig. 1, so daß die Seite des Quadrats a b gleich einer der Seiten des Cubus wird; z. B. = c d (in Fig. 1). Zieht man nun in dem Quadrate die Diagonale b c oder a d, so sind diese nach demselben Maßstabe meßbar, welcher für den Cubus festgesetzt war.

Wollte man die Diagonale des Cubus wirklich messen, so suche man ihre wirkliche Länge nach Fig. 3 (Tafel 8). Man trage aus Fig. 1 die Verticale c d in Fig. 3 auf der beliebig langen wagerechten Linie d b auf von d nach c. — Alsdann mache man die Linie d b (Fig. 3) so lang als in Fig. 2 die Diagonale a d war, zieht man nun noch in Fig. 3 die Linie c b, so ist diese die gesuchte Diagonale des Cubus, welche mit demselben Maßstabe meßbar sein wird, welchen man für den Cubus angenommen hat.

Man sieht hieraus, daß man auf ähnliche Weise auch die Längen anderer Linien, welche in der isoperimetrischen Figur unter verschiedenen Lagen geneigt wären, meßbar darstellen könnte, wenn es nöthig wäre.

§. 2.

Aufgabe. Man soll einen Cubus isometrisch zeichnen, auf dessen Begrenzungsflächen sich Achtecke befinden. Tafel 8 Fig. 2 u. Fig. 4.

Auflösung. Man zeichne zuvörderst in Fig. 4 den Cubus ganz so, wie wir in §. 1 Fig. 1 gezeigt haben. Dann zeichne man in Fig. 2 das regelmäßige Achteck in ein Quadrat, welches man so groß gemacht hat, als eine der Seitenflächen des Cubus in Fig. 4 ist.

Um nun das Achteck aus Fig. 2 auf eine der Flächen des Cubus in Fig. 4 zu übertragen, braucht man nur von den Mittellinien oder von den Kantenpunkten des Cubus aus, die Punkte des Achtecks aus Fig. 2 nach Fig. 4 zu übertragen.

Es ist sowohl in Fig. 2 als in Fig. 4 dieselbe Buchstabenbezeichnung gewählt worden und wird man bei Vergleichung beider Figuren sogleich die Lage der gleichnamigen Punkte einsehen und eintragen können.

Bei allen drei sichtbaren Achtecken in Fig. 4 wiederholt sich dasselbe Verfahren auf gleiche Weise.