Projectionslehre, Schattenconstruction und Perspective

Menzel, Karl Adolf

Leipzig, [1849]

§. 2. Aufgabe. Man soll einen Cubus isometrisch zeichnen, auf dessen Begrenzungsflächen sich Achtecke befinden. Tafel 8 Fig. 2 u. Fig. 4.

Es wird demnach eine solche isometrische Zeichnung stets drei Seiten eines Körpers zeigen, wenn eine gewöhnliche geometrische Projection nur eine Seite auf einmal gezeigt hätte.

Der mathematische Beweis dafür, daß alle verschiedenen Flächen der Zeichnung *nach einerlei Maßstab* meßbar sind, wird hier als zu weit führend übergangen, er beruht jedoch darauf, daß in einem regelmäßigen Sechseck alle Mittelpunktswinkel gleich 60 Grad, und die Seiten des Sechsecks den Radien des Kreises gleich sind, in welchem das Sechseck beschrieben ist, wie Fig. 1 zeigt.

Der Punkt d hieß als erster Punkt, von welchem aus die übrigen bestimmt wurden, der *regulirende Punkt*.

Die Linie c d, als die erste Lothrechte, nach welcher die anderen bestimmt werden, heißt immer die *Verticale* zum Unterschiede gegen die übrigen Senkrechten.

Die beiden Linien b d und d f, welche durch den regulirenden Punkt d gehen, heißen beide die *horizontalen* Linien, zum Unterschiede gegen alle übrigen, und davon heißt d b die *linke* und d f die *rechte Horizontale*.

Die Ebene c d f e, welche durch die verticale Linie c d und durch die *rechte* Linie e f geht, heißt die *rechte Ebene*.

Die Ebene c d a b, welche durch die verticale Linie c d und die *linke* Linie a b geht, heißt die *linke Ebene*.

Diese Benennungen dienen dazu, um die Lage irgend eines beliebigen Punktes so leicht als möglich zu bestimmen, wenn man seine drei Abstände mißt, denn jeder Punkt muß entweder in einer der regulirenden Linien selbst liegen (wo er dann leicht zu finden ist), oder er liegt außerhalb der regulirenden Linien irgendwo; alsdann bestimme man seine Abstände gegen die rechte und linke Horizontallinie, wodurch man die Länge und Breite des Abstandes findet, und alsdann bestimme man in den senkrechten Ebenen die Höhe des Punktes, ziehe dann von diesen Punkten parallele Linien mit der rechten und linken Horizontale, und wo diese Parallelen sich schneiden, wird der gesuchte Punkt liegen.

Die folgenden Beispiele werden das Verfahren hinlänglich verdeutlichen.

Im Ganzen übersieht man vorläufig gewiß durch die Zeichnung des Cubus so viel, daß ein anschauliches Bild jedes Körpers auf diesem Wege geliefert werden, und daß man in diesem Körper jeden beliebig gegebenen Punkt, auch in der Zeichnung bestimmen könne. Aber auch jeder beliebig gegebene Punkt *außerhalb* des Körpers ist dadurch bestimmbar, daß man nach den zu bestimmenden Maßen seine Abstände gegen die horizontalen und senkrechten Ebenen bestimmt und dadurch seine Lage in der Zeichnung festsetzt.

Es wird also auch keine Schwierigkeit machen, jede beliebige gerade Linie isometrisch zu zeichnen, wenn man ihre beiden Endpunkte bestimmt, und diese durch eine gerade Linie verbindet.

Krumme Linien jeglicher Gestalt lassen sich ebenfalls dadurch bestimmen, daß man in ihnen eine beliebige Menge Punkte annimmt, diese isometrisch bestimmt und dann diese zuletzt in der Zeichnung gefundenen Punkte durch Linien mit einander verbindet.

Es leuchtet ein, daß je mehr Punkte man auf diese Art für eine krumme Linie sucht, um so genauer wird ihr Bild in der Zeichnung werden.

Nachdem wir die allgemeinen Begriffe der isoperimetrischen

Perspective erläutert, wenden wir uns zu einzelnen Teispielen, welche das Verfahren vollkommen verdeutlichen werden.

Betrachten wir zur besseren Verständigung Fig. 1 noch einmal, so ergiebt sich Folgendes.

Der Cubus wird durch ein regelmäßiges (im Kreise construirtes) Sechseck und durch die Radien c d, c e, c a dargestellt. Denkt man sich außerdem im Sechseck Radien gezogen, so sind alle Winkel am Mittelpunkte = 60 Grad.

Das Sechseck hat vor allen im Kreise gezeichneten regelmäßigen Vielecken, die Eigenschaft, daß jede Seite des Sechsecks gleich dem Radius des Kreises ist. Folglich sind hier im Cubus alle Seiten gleich lang und folglich auch nach einerlei Maßstabe meßbar.

Wenn man z. B. eine der Seiten des Cubus in 5 Fuß getheilt annimmt, so werden alle übrigen Seiten des Cubus mit demselben Maßstabe meßbar sein.

Will man die Diagonale einer der Seitenflächen wirklich messen, so beschreibe man, wie Tafel 8 Fig. 2, ein Quadrat a c d b mit einer der Seiten des Cubus aus Fig. 1, so daß die Seite des Quadrats a b gleich einer der Seiten des Cubus wird; z. B. = c d (in Fig. 1). Zieht man nun in dem Quadrate die Diagonale b c oder a d, so sind diese nach demselben Maßstabe meßbar, welcher für den Cubus festgesetzt war.

Wollte man die Diagonale des Cubus wirklich messen, so suche man ihre wirkliche Länge nach Fig. 3 (Tafel 8). Man trage aus Fig. 1 die Verticale c d in Fig. 3 auf der beliebig langen wagerechten Linie d b auf von d nach c. — Alsdann mache man die Linie d b (Fig. 3) so lang als in Fig. 2 die Diagonale a d war, zieht man nun noch in Fig. 3 die Linie c b, so ist diese die gesuchte Diagonale des Cubus, welche mit demselben Maßstabe meßbar sein wird, welchen man für den Cubus angenommen hat.

Man sieht hieraus, daß man auf ähnliche Weise auch die Längen anderer Linien, welche in der isoperimetrischen Figur unter verschiedenen Lagen geneigt wären, meßbar darstellen könnte, wenn es nöthig wäre.

§. 2.

Aufgabe. Man soll einen Cubus isometrisch zeichnen, auf dessen Begrenzungsflächen sich Achtecke befinden. Tafel 8 Fig. 2 u. Fig. 4.

Auflösung. Man zeichne zuvörderst in Fig. 4 den Cubus ganz so, wie wir in §. 1 Fig. 1 gezeigt haben. Dann zeichne man in Fig. 2 das regelmäßige Achteck in ein Quadrat, welches man so groß gemacht hat, als eine der Seitenflächen des Cubus in Fig. 4 ist.

Um nun das Achteck aus Fig. 2 auf eine der Flächen des Cubus in Fig. 4 zu übertragen, braucht man nur von den Mittellinien oder von den Kantenpunkten des Cubus aus, die Punkte des Achtecks aus Fig. 2 nach Fig. 4 zu übertragen.

Es ist sowohl in Fig. 2 als in Fig. 4 dieselbe Buchstabenbezeichnung gewählt worden und wird man bei Vergleichung beider Figuren sogleich die Lage der gleichnamigen Punkte einsehen und eintragen können.

Bei allen drei sichtbaren Achtecken in Fig. 4 wiederholt sich dasselbe Verfahren auf gleiche Weise.

Wollte man eine Seite des Achtecks in Fig. 4 wirklich nach einem Maßstabe messen, so kann dies nur auf den senkrechten Kanten des Cubus und den Horizontalen geschehen, da die schräg laufenden Diagonalen der Achtecke von verschiedener Länge sind, und folglich ein falsches Maß angeben würden.

§. 3.

Aufgabe. Es soll ein Cubus isometrisch gezeichnet werden, in dessen Seitenflächen Kreise eingezeichnet sind. (Taf. 8 Fig. 5 und Fig. 2.)

Auflösung. Der bloße Augenschein lehrt schon, daß sich diese Aufgabe ganz ähnlich, wie die vorige (§. 2) lösen läßt.

Hat man den Cubus gezeichnet, so trage man wie vorhin die Achtecke ein. Nun betrachte man Fig. 2, so wird man finden, daß ein im Achtecke eingeschriebener Kreis, durch die Punkte n v q w o x p z gehen muß. Zieht man aber in Fig. 5 in dem Vierecke der Seitenfläche a b d c die Diagonalen a d und c b, so schneiden diese das Achteck in den Punkten v w x z und der Kreis wird nunmehr (aus freier Hand) durch die Punkte (in Fig. 5) n v q w o x p z gezogen werden können.

So wie man den Kreis in einer der Seitenflächen gefunden hat, eben so findet man die übrigen Kreise in den andern Seitenflächen.

Anmerkung 1. Man sieht, daß man jedes andere regelmäßige Vieleck auf den Seitenflächen eines Cubus in ganz ähnlicher Weise finden wird, wie man das Achteck und den Kreis zu finden im Stande war.

Anmerkung 2. Die Kreise in Fig. 5 kann man sich als Oberflächen von Räderwerken an einer Maschine denken, welche sich um die in den Mittelpunkten der Kreise vorstehenden Achsen drehen; und man sieht daß auch für Maschinen die isoperimetrische Darstellung sehr geeignet ist, meßbare Figuren in verschiedenen Lagen darzustellen. Hierzu kommt noch die Erleichterung, daß bei Maschinen die Räderwerke meistentheils entweder in wagerechter oder senkrechter Lage sich befinden.

§. 4.

Aufgabe. Man soll eine Welle (Cylinder) isometrisch aufzeichnen. (Taf. 8 Fig. 6 u. 7.)

Auflösung. Es sei der Kreisdurchschnitt der Welle in Fig. 6 gegeben. Nun trägt man Fig. 7 auf einer wagerechten Linie in dem Punkte f nach jeder Seite hin einen Winkel von 30 Grad an und zieht vorläufig die Linien f e und f g willkürlich lang.

Dann errichte man die Verticale f d und mache sie so hoch als der Durchmesser des Kreises in Fig. 6 lang ist. Dann mache man die Linie f e so lang wie d f, ziehe d c parallel f e, und e c parallel f d, so hat man ein Quadrat isometrisch gezeichnet, in welches der Kreis Fig. 6 hinein paßt.

Nun mache man in Fig. 7 die Linie f g so lang als die Welle (der Cylinder) werden soll, errichte g a und ziehe a d und b c parallel mit g f, auch mache man a d und b c so lang wie g f.

Dann ziehe man a b und g h parallel mit d c und f e, so hat man ein Prisma a b c d f e h g, in welches die Welle hinein paßt.

Nun beschreibe man in der Seitenfläche f d c e ein Achteck

und darin einen Kreis (§. 3), so hat man die vordere Fläche der Welle.

Dann beschreibe man in der Fläche a b h g ebenfalls einen Kreis, so hat man die hintere Fläche der Welle. Zieht man nun noch die Linien b k und m n parallel mit g f, so hat man die beiden Begrenzungslinien der Welle und somit die verlangte isoperimetrische Zeichnung der Welle gefunden.

§. 5.

Aufgabe. Es soll ein Kreuz isometrisch gezeichnet werden. (Taf. 8 Fig. 8.)

Auflösung. Man nehme auf irgend einer wagerechten Linie einen regulirenden Punkt a an. Von diesem aus ziehe man unter 30 Grad die Linien a b und a o und mache diese beiden Linien so lang als die Stärke des Kreuzes werden soll. Dann errichte man die senkrechten Linien b d, a c und o l und mache diese so lang als das Kreuz hoch werden soll; alsdann ziehe man c d und d m parallel mit b a, und c l und d m parallel mit a o, so hat man den senkrechten Theil des Kreuzes.

Will man nun den wagerechten Kreuzesarm zeichnen, so bestimme man die Längen d p, p c und e q, q f, so wie l r und ziehe durch die Punkte p q, c f und r die mit b a parallelen h g, o i, n k willkürlich lang.

Dann mache man die Linien q i, r k, f g, e h und o p so lang wie der wagerechte Kreuzesarm werden soll, und ziehe die senkrechten Linien o h, i g und k v, ferner die Linien g v, i k, q r, o n parallel mit a o, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

§. 6.

Aufgabe. Man soll einen Dachstuhl isometrisch zeichnen. (Tafel 8 Fig. 9 u. 10.)

Auflösung. Es sei der Dachstuhl wie er in Fig. 9 gezeichnet ist gegeben. Der zugehörige Maßstab befindet sich darunter.

Will man nun den ganzen Dachverband isoperimetrisch zeichnen, so nehme man sich zuvörderst Fig. 10 auf der wagerechten Linie A B den regulirenden Punkt C an. An diesen trage man wie immer nach jeder Seite hin einen Winkel von 30 Grad und ziehe (§. 1) die horizontalen Linien C D und C E. Die Linie C D mache man vorläufig willkürlich lang und die Linie C E mache man so lang wie der Balken (in Fig. 9) unterhalb ohne Ueberstand ist, nun halbire man die Linie C E in F, so ist F C und F E gleich der halben Länge des Balkens unterhalb.

Errichtet man nun in F (Fig. 10) die Senkrechte F G und macht dieselbe so hoch wie F G in Fig. 9, so hat man die Mittellinie des Dachstuhls und seine Höhe.

Von G aus in Fig. 10 ziehe man die Sparrenlinien G H und G J, nachdem man zuvor den Balken selbst fertig gezeichnet hat, so erhält man das erste Sparrengebind.

Nun zeichnet man mit allen Maßen, welche in Fig. 9 gelten den Kehlbalken, die Rahmstücken und Stiele in Fig. 10 ein.

Die Breite der Hölzer findet man ebenfalls nach dem Maßstabe, wenn man sie auf einer der horizontalen Linien, welche alle unter sich parallel sind, abträgt und die entsprechenden Umrißlinien der Verbandstücke zieht. So findet man das ganze erste Dachstuhlgebind.