



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

VI. Die Flächentragwerke

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Belastung  $P = 1 \text{ t}$  in  $3'''$ . Das Ergebnis ist:

$$P_{3,a} = 0,844 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,250 \text{ t}, \quad P_{3,c} = -0,031 \text{ t}, \quad P_{3,d} = -0,063 \text{ t}.$$

Das Biegemoment im Randträger wird

$$M_{I,3'''} = 3,916 \text{ mt.}$$

Bei der Annahme  $J_{II} = \infty$  wird nach (909)

$$P_{3,a} = 0,70 \text{ t}, \quad P_{3,b} = 0,40 \text{ t}, \quad P_{3,c} = 0,10 \text{ t}, \quad P_{3,d} = -0,26 \text{ t},$$

$$M_{I,3'''} = 3,68 \text{ mt.}$$

Einflußflächen. Entwicklung nach S. 639 (Abb. 620).

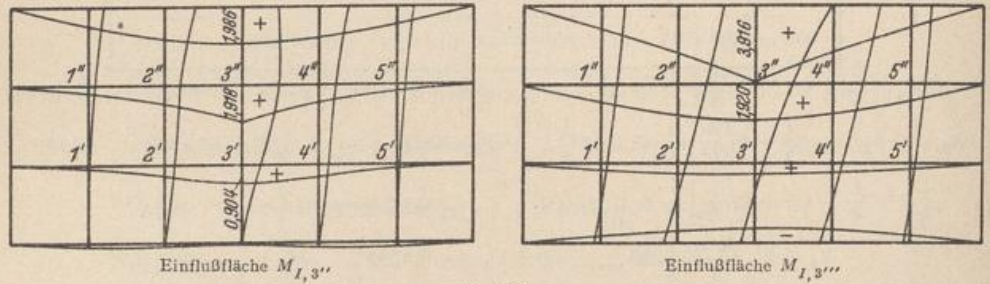


Abb. 620.

Zschetzke: Theorie lastverteilender Querverbindungen. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893. — Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924. — Petermann: Überlastverteilende Wirkung durchgehender Querverbindungen. Bautechn. 1925. — Schilling, W.: Statik der Bodenkonstruktionen der Schiffe. Berlin 1925. — Faltus, F.: Lastverteilende Querverbindungen. Bauing. 1927 S. 853. — Genthner, R.: Der Eisenbetonträgerrost. Beton u. Eisen 1928 S. 411. — Marcus, H.: Die weitgespannten Decken des Sportgebäudes im Stadion Breslau-Leerbeutel. Beton u. Eisen 1929 S. 73. — Szegö, St.: Kreuzweise gespannte Balkenkonstruktionen. Zement 1930 S. 34. — Derselbe: Über die Berechnung quadratischer Kreuzekroste. Zement 1930 Heft 38 bis 42. — Marcus, H.: Die Theorie der Rautendecke. Bauing. 1932 S. 303. — Szegö, St.: Die Kreuzekrostbauweise. Beton u. Eisen 1932 S. 122. — Derselbe: Anwendung der Kreuzekrostbauweise auf Hofkellerdecken. Zement 1932 S. 676.

## VI. Die Flächentragwerke.

### 66. Die Beziehungen zur Elastizitätstheorie.

Die einfache Beherrschung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der biegesteifen Stäbe und Träger hat wesentlich dazu beigetragen, die Überbauten der Brücken und die Gerüste der Hochbauten als Stab- oder Fachwerke auszubilden. Während jedoch im Stahlbau die Formänderung des Haupttragwerks von den sekundären, zur unmittelbaren Lastaufnahme bestimmten Bauteilen nahezu unabhängig ist, sind diese im Eisenbetonbau in der Regel mit dem Haupttragwerk homogen verbunden, so daß zusammenhängende elastische Gebilde entstehen, deren Verschiebungszustand sich wesentlich von demjenigen des freien Haupttragwerks unterscheidet. Auf diese Weise sind in der jüngsten Vergangenheit, begünstigt durch den Fortschritt der theoretischen und physikalischen Erkenntnis, auch Flächentragwerke entwickelt worden. Die Trägerroste wurden zu Platten und Pilzdecken, die ebenen Stab- und Fachwerke zu Scheiben, die Rippenkuppeln und Flechtwerke zu Schalen.

Der Festigkeitsnachweis dieser elastischen Gebilde ist seit Jahrzehnten durch wissenschaftliche Arbeiten über Elastizitätstheorie vorbereitet worden, so daß sich die Baustatik auf zahlreiche bekannte Ergebnisse zu stützen vermag. Trotzdem bereitet der Festigkeitsnachweis für die Flächentragwerke des Bauwesens oft noch



erhebliche Schwierigkeiten, da in der Regel nicht die idealisierten elastischen Gebilde der Theorie, sondern zweckbestimmte Bauformen untersucht werden müssen, deren Randbedingungen nicht immer eindeutig vorgeschrieben sind. Sie lassen sich in der Regel auch nicht vereinfachen, ohne das Spannungsbild wesentlich abzuändern. Die Lösung ist daher nur selten allein durch die Überwindung der mathematischen Schwierigkeiten abgeschlossen, sondern erfüllt ihren Zweck erst in Verbindung mit umfangreichen Zahlenrechnungen, die allein ein Urteil über die Festigkeit und Stabilität gestatten. Auch dann ist das Bild infolge von Eigenspannungen aus der Herstellung der Baukörper und infolge der unregelmäßigen und wandelbaren physikalischen Eigenschaften des Baustoffs nicht immer so klar, daß die Überschreitung eines durch ausreichende Sicherheit begrenzten Belastungsbereichs gerechtfertigt ist.

Die Elastizitätstheorie rechnet mit der vollkommenen Elastizität und mit der homogenen und isotropen Beschaffenheit des Baustoffs. Die Verschiebungen werden stets nur verschwindend klein und ihre Beziehungen zu den elastischen Kräften des Baustoffs als linear angenommen.

Die Komponenten des Spannungstensors und des Verschiebungsvektors sind bei homogener Beschaffenheit des Baukörpers stetige Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$ . Daher kann das Gleichgewicht der inneren Kräfte auf einen differentialen Abschnitt des Körpers bezogen werden. Sind  $X, Y, Z$  die Komponenten der auf die Volumeneinheit bezogenen Massenkraft, so gelten die folgenden 6 Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (910)$$

Durch die Annahme stetiger Veränderlichkeit der Verschiebungen sind die bezogenen Längenänderungen  $\varepsilon_x$  usw. und die Winkeländerungen  $\gamma_{xy}$  usw., die sich bei der Verzerrung des Prismas mit  $dx \rightarrow dx(1 + \varepsilon_x)$ ,  $\sphericalangle(dx, dy) = \pi/2 \rightarrow \pi/2 + \gamma_{xy}$  einstellen, in der folgenden Weise mit dem Verschiebungszustand verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (911)$$

Die geometrischen Komponenten des Verzerrungstensors sind nach Annahme linear von den mechanischen Größen, den Komponenten des Spannungstensors abhängig und bei isotropem Baustoff nur durch zwei Konstante  $E$  und  $\mu$  mit diesen verknüpft.

$$E \varepsilon_x = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), \quad G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \text{ usw.}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \mu = \frac{1}{m}. \quad (912)$$

Die Spannungssumme  $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  und die kubische Dehnung  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  sind invariante Größen des Ansatzes, mit denen sich die Beziehungen zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten auch folgendermaßen anschreiben lassen:

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= \sigma_x(1 + \mu) - \mu s, & \sigma_x(1 + \mu) &= E[\varepsilon_x + \mu e / (1 - 2\mu)], \\ E \varepsilon_y &= \sigma_y(1 + \mu) - \mu s, & \sigma_y(1 + \mu) &= E[\varepsilon_y + \mu e / (1 - 2\mu)], \\ E \varepsilon_z &= \sigma_z(1 + \mu) - \mu s, & \sigma_z(1 + \mu) &= E[\varepsilon_z + \mu e / (1 - 2\mu)]. \end{aligned} \right\} \quad (913)$$

Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. München u. Berlin 1920. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie, Kap. 2. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Berlin 1928.



## A. Die Platten.

## 67. Annahmen und Grundlagen für die Berechnung.

Die Platten sind ebene Baukörper, die durch zwei zu einer Mittelebene parallele Ebenen und eine dazu senkrechte Zylinderfläche von beliebiger Leitkurve begrenzt sind. Die Belastung wirkt stets im Sinne der Flächennormalen  $z$ . Der Plattenrand ist frei drehbar gelagert, eingespannt oder auch in einzelnen Punkten gestützt. Die untere Laibungsebene ist kräftefrei oder durch Träger und Pfosten in einzelnen geraden Linien, Punkten oder Flächen gestützt. Auf diese Weise entstehen die durchlaufenden Platten, die Rippen- und Pilzdecken. Die Untersuchung kann für die Bedürfnisse des Bauwesens auf Platten beschränkt werden, deren Baustoff durch die Art der Herstellung und konstruktiven Ausbildung als homogen, isotrop und innerhalb der Gebrauchsbelastung als vollkommen elastisch gilt und deren Dicke gegenüber den anderen Abmessungen zurücktritt. Die Änderung der Plattendicke ist von höherer Ordnung klein im Vergleich zu der senkrechten Verschiebung  $w(x, y, z)$  eines beliebigen Punktes, so daß

$$w(x, y, z) = w(x, y) + \int_0^z \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} dz \rightarrow w(x, y) = w \quad (914)$$

und damit der senkrechte Formänderungszustand der Platte durch die senkrechten Verschiebungen  $w$  der Mittelfläche beschrieben ist. Da sich die Platte unter der Belastung  $p$  im Vergleich zur Dicke  $h$  nur um kleine Wege ausbiegen soll, sind die waagerechten Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche Null und die waagerechten Verschiebungen der Punkte im Abstand  $z$  von der Mittelebene, abgesehen von kleinen Beträgen höherer Ordnung, lineare Funktionen von  $z$ , so daß die Punkte einer Flächennormalen auch nach der Formänderung auf einer Normalen zur elastisch verbogenen Mittelfläche liegen. Daher ist bei Verwendung von kartesischen Koordinaten  $x, y$  nach Abb. 621

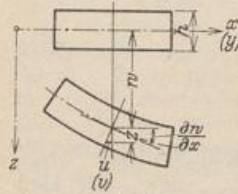


Abb. 621.

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (915)$$

Die Spannung  $\sigma_z$  ist an der unteren kräftefreien Plattenlaibung Null, an der oberen gleich der Belastungsintensität  $p$ , also abgesehen von Punktlasten, deren Untersuchung hier ausgeschlossen sein soll, stets sehr klein im Vergleich zu  $\sigma_x, \sigma_y$ . Sie kann daher in den allgemeinen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen mit  $\sigma_z = 0$  vernachlässigt werden. Diese Annahmen begründen die folgenden Beziehungen der Plattenstatik.

1. Verträglichkeitsbedingungen nach (26)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (916)$$

2. Elastizitätsgesetz nach (27) für

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \frac{\sigma_z}{E} = 0 = \varepsilon_z + \frac{\mu}{1 - 2\mu} e, \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \frac{\mu}{1 - 2\mu} e = \frac{\mu}{1 - \mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{E}{1 - \mu^2} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu). \end{aligned} \right\} \quad (917)$$

und in Verbindung mit den Verträglichkeitsbedingungen (916)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1 - \mu) \end{aligned} \right\} \quad (918)$$



Diese mit  $z$  linear veränderlichen Spannungen in der Flächennormalen lassen sich zu Schnittkräften in Querschnitten von der Breite 1 zusammenfassen. Sie betragen

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dF = 0, & N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dF = 0, & Q_{xy} &= \int_{-h/2}^{-h/2} \tau_{xy} dF = 0, \\ M_x &= \int \sigma_x z dF, & M_y &= \int \sigma_y z dF, & M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dF, \\ M_x &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (919)$$

$M_x, M_y$  sind Biegemomente,  $M_{xy}, M_{yx}$  Drillungsmomente.  $\frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = N$  ist eine für Plattenquerschnitt und Plattenwerkstoff charakteristische Größe und heißt Plattenkonstante.

3. Transformation der Schnittkräfte eines differentialen Prismas  $dx \cdot dy$  auf einen Schrägschnitt  $ds$  im Winkel  $\hat{x}\hat{n} = \psi$  mit  $ds = dx/\sin \psi = dy/\cos \psi$  (Abb. 622). Die Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$\left. \begin{aligned} Q_n ds &= Q_{yx} dy + Q_{xz} dx, \\ M_n ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \cos \psi - (M_y dx + M_{xy} dy) \sin \psi &= 0, \\ M_s ds - (M_x dy + M_{yx} dx) \sin \psi + (M_y dx + M_{xy} dy) \cos \psi &= 0; \\ M_n &= M_x \cos^2 \psi + M_y \sin^2 \psi + M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_s &= M_x \sin^2 \psi + M_y \cos^2 \psi - M_{xy} \sin 2\psi, \\ M_{ns} &= -(M_y - M_x) \frac{\sin 2\psi}{2} - M_{xy} \cos 2\psi. \end{aligned} \right\} \quad (920)$$

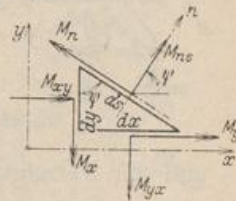


Abb. 622.

Daher bilden die Schrägschnitte  $I, II$  mit  $M_{I,II} = M_{II,I} = 0$  und den Hauptbiegemomenten  $M_I, M_{II}$  den Winkel  $\psi = \psi_0$ .

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi_0 &= \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y}, \\ M_{I,II} &= \frac{1}{2} (M_x + M_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (921)$$

In derselben Weise lassen sich in jedem Punkte der Platte auch die Richtungen  $I', II'$  mit  $\psi'_0 = \psi_0 \pm 45^\circ$  der beiden Hauptdrillungsmomente  $M_{I',II'}$  angeben, in denen die Biegemomente Null sind.

$$M_{I',II'} = \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}. \quad (922)$$

Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente können für jeden Punkt der Mittelebene auch nach den bekannten graphischen Methoden Mohrs festgestellt werden. Die Richtungen  $I, II$  bestimmen die Lage der Stahlbewehrung. Bei orthogonaler Bewehrung  $f_x, f_y$  sind die vergrößerten Beträge  $(M_x \pm M_{yx})$  und  $(M_y \pm M_{xy})$  maßgebend.

Die Summe der Biegemomente  $(M_n + M_s)$  ist von der Richtung  $\psi$  unabhängig. Sie ist wie bei jeder Tensortransformation invariant.

$$M_x + M_y = M_n + M_s = M_I + M_{II}.$$

Dasselbe gilt daher auch für

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu} = -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -N \Delta w. \quad (923)$$



$M$  wird als Momentensumme bezeichnet und ist eine skalare Funktion in  $x$  und  $y$ . Die Bezeichnung  $\Delta$  ist eine in der Mathematik gebräuchliche Abkürzung der Differentialoperation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (924)$$

4. Die Gleichgewichtsbedingungen. a) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas (Abb. 623) bei einer Drehung um die beiden Kanten  $dx$ ,  $dy$ :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad (925)$$

und mit (919) daher

$$Q_{yz} = -N \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \quad Q_{xz} = -N \frac{\partial}{\partial x} \Delta w. \quad (926)$$

Da außerdem nach (910)  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ist, wird nach (919) auch  $M_{xy} = M_{yx}$ .

b) Gleichgewicht der äußeren Kräfte des differentialen Prismas bei einer Verschiebung in der  $z$ -Richtung.

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + p = 0. \quad (927)$$

Die Bedingung liefert in Verbindung mit (925) die folgende Differentialbeziehung zwischen der Belastung und den Spannungsmomenten

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (928)$$

und bei Verwendung von (926) und (924) die Differentialbeziehung zwischen der Belastung  $p$  und der Verschiebung  $w$ , der Ordinate der elastischen Fläche der Platte

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}. \quad (929)$$

Sie läßt sich in Verbindung mit (924) auch folgendermaßen anschreiben:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (930)$$

Diese Differentialgleichung 4. Ordnung kann nach H. Marcus mit (923) auch in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung zerlegt werden, die sich in der Reihenfolge

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p, \quad (931) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{N} = -w \quad (932)$$

lösen lassen, wenn die Bedingungen für die Momentensumme  $M$  am Rande der Platte bekannt sind. Beide Gleichungen bilden den analytischen Ausdruck für eine mit der Kraft 1 gespannte Membran, deren Ordinaten bei der Belastung  $p$  durch  $M$  und bei der Belastung  $w$  mit  $w$  bezeichnet werden. Die Zerlegung der Differentialgleichung führt daher, wie H. Marcus zuerst bemerkt hat, zu einer Erweiterung der bekannten Ansätze für die Momentenlinie (90) und die Biegelinie (195) des biegesteifen Stabes. Da nun später nachgewiesen wird, daß  $w$  und  $M$  am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte mit polygonaler Begrenzung Null sind, besitzen hier die beiden Flächen als Membran über der Randkurve mit der vorgeschriebenen Spannung 1 und dem Druck  $p$  oder  $w$  konkrete Bedeutung.

Dieselben Betrachtungen gelten auch für Polarkoordinaten. Das Ergebnis kann entweder durch Koordinatentransformation gewonnen oder unmittelbar an

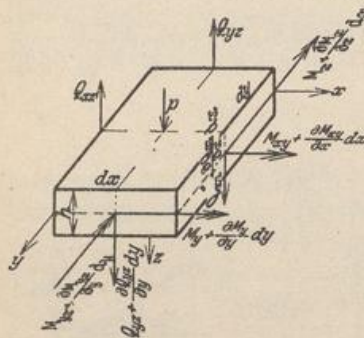


Abb. 623.



einem differentialen Abschnitt (Abb. 624) abgeleitet werden. Das Biegemoment in einem Schnitt  $r = \text{const}$  ist  $M_r$ , das Biegemoment in einem Schnitt  $\alpha = \text{const}$  heißt  $M_\alpha$ . Die Drillungsmomente führen die Bezeichnung  $M_{r\alpha}, M_{\alpha r}$ .

$$\begin{aligned} M_r &= -N \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \right], \\ M_\alpha &= -N \left[ \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right], \\ M_{r\alpha} = M_{\alpha r} &= -N(1-\mu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (933)$$

Die Summe der Biegemomente ( $M_r + M_\alpha$ ) ist wiederum von der Lage der Bezugsachse unabhängig. Dasselbe gilt daher auch von der Momentensumme  $M$ .

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) = -N \Delta w, \\ Q_{rz} &= -N \frac{\partial}{\partial r} \Delta w, \quad Q_{\alpha z} = -N \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta w. \end{aligned} \quad (934)$$

Die Differentialbeziehung zwischen Belastung  $p$  und Ausbiegung  $w$  lautet jetzt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \alpha^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (935)$$

Sie kann auch hier wieder mit (934) in zwei Gleichungen 2. Ordnung zerlegt werden.

$$\Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial^2 M}{r^2 \partial \alpha^2} = -p, \quad (936)$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\frac{M}{N}. \quad (937)$$

Die Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung  $p(x, y)$  oder  $p(r, \alpha)$  besteht also darin, diejenige Funktion  $w$  in  $x, y$  oder  $r, \alpha$  zu finden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935), außerdem aber noch am Rande die von der Stützung der Platte vorgeschriebenen statischen und geometrischen Bedingungen erfüllt. Diese Lösung ist nach Abschn. 8 eindeutig. Dagegen sind unendlich viele Lösungen  $w$  vorhanden, welche die Differentialgleichung (930) oder (935) allein befriedigen. Der Plattenrand gilt entweder als frei drehbar aufgelagert, starr-eingespannt oder als kräftefrei.

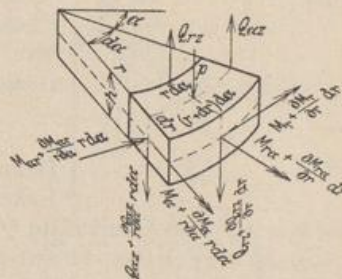


Abb. 624.

**Die statischen und geometrischen Bedingungen der Stützung.** a) Frei drehbare, starre Auflagerung der Platte in einer Geraden  $x = \text{const}$ . Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

statische Bedingungen:

$$-\frac{M_r}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (938)$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad M_y = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad M = 0.$$

Da also am Rande der frei drehbar aufgelagerten Platte  $w = 0$  und  $M = 0$  sein muß, kann die Lösung  $M$  aus (931) unabhängig von  $w$  angegeben und darauf zur Berechnung von  $w$  in (932) verwendet werden. Die Stützung wird daher in Überein-



stimmung mit der Untersuchung für den biegeungssteifen Stab als statisch bestimmt bezeichnet, obwohl die Schnittkräfte selbst erst durch die Funktion  $w$  bekannt sind.

Die an dem freien Rande vorhandenen Drillungsmomente  $M_{xy}$  werden nach dem Vorschlag von Thompson und Tait im Sinne der Abb. 625 durch eine stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt. Der Spannungszustand wird auf diese Weise nach dem St. Venantschen Prinzip nur in einem eng begrenzten Bereich geändert. Die Kräftepaare ergänzen die Querkräfte am Rande und stehen gemeinsam mit diesen und dem Stützendruck  $A_x$  oder  $A_y$  im Gleichgewicht. Die Bedingung läßt sich am einfachsten ableiten, wenn die Platte an einem Randträger abgestützt angenommen wird (Abb. 626).

$$Q_{xz} dy + \int_y^{y+dy} \left[ \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) \frac{1}{dy} - \frac{M_{xy}}{dy} \right] dy + A_x dy = 0, \quad (939)$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= - \left( Q_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ A_y &= - \left( Q_{yz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) = N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (940)$$

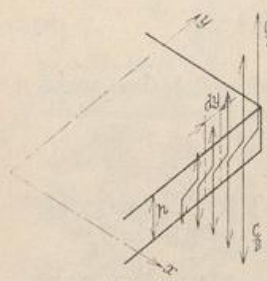


Abb. 625.

Die Substitution der Randdrillungsmomente liefert an den Ecken einer frei aufliegenden rechteckigen Platte aufwärtsgerichtete Einzelkräfte, deren Betrag gleich dem doppelten Drillungsmoment an der Ecke ist.

$$-C = 2 M_{xy} = 2 M_{yx}. \quad (941)$$

Daher ist die Verankerung der Ecken frei aufliegender Platten

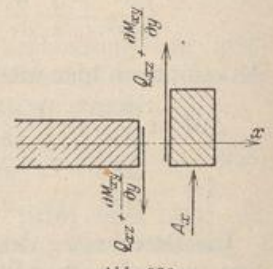


Abb. 626.

notwendig. Die Querkräfte  $Q_{xz}$  und  $Q_{yz}$  sind an den Ecken Null.

b) Starre Einspannung der Platte in einer Geraden  $x = \text{const.}$  Geometrische Bedingungen:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Außerdem sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (942)$$

so daß am Rande starr eingespannter Platten keine Drillungsmomente auftreten.

c) Kräftefreie Begrenzung der Platte in einer Geraden  $x = \text{const.}$  Statische Bedingungen:

$$-\frac{M_x}{N} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -\frac{A_x}{N} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (943)$$

d) Kräftefreie Ecke der Platte: Außer den statischen Bedingungen für den Rand  $x = \text{const}$  mit  $M_x = 0$  und  $A_x = 0$  und für den Rand  $y = \text{const}$  mit  $M_y = 0$  und  $A_y = 0$  muß die Kraft  $C = 0$ , also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (944)$$

sein.

Die Beschreibung des Verschiebungszustandes einer Platte für eine vorgeschriebene Belastung und vorgeschriebene Randbedingungen ist nach Ableitung der Differentialbeziehungen zwischen der Ausbiegung  $w$  und der Belastung  $p$  nur noch eine mathematische Aufgabe, deren unmittelbare Lösung allerdings nur in einzelnen



Fällen gelingt. Mit der Funktion  $w(x, y)$  sind auch ihre Ableitungen und damit die Schnittkräfte in jedem Punkte der Platte bekannt.

Lévy, M.: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 129 (1899) S. 535. — Estanave, E.: Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque etc. Paris 1900. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handb. d. Physik Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper, Kap. 3. Berlin 1928. — Bergsträßer, M.: Forsch.-Arbeiten Ing.-Wes. Heft 302. Berlin 1928.

## 68. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter zentralsymmetrischer Belastung.

**Platten mit gleichbleibender Dicke.** Die Punkte der Mittelebene werden mit Rücksicht auf die Begrenzung der Platte auf Polarkoordinaten  $r, \alpha$  mit dem Mittelpunkt  $O$  als Ursprung bezogen. Die Schnittkräfte der Platte und die Ausbiegung  $w$  ihrer Mittelfläche sind daher nach (935) aus der Belastung  $p$  bestimmt. Die Beziehungen sind jedoch bei Zentralsymmetrie der Plattenform, der Stützung und Belastung unabhängig vom Winkel  $\alpha$ , so daß die Ableitungen der Funktion  $w(r, \alpha) \rightarrow w(r)$  nach  $\alpha$  Null sind und die partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung übergeht. Die Drillungsmomente  $M_{r\alpha} = M_{\alpha r}$  sind daher nach (933) ebenfalls Null. Im übrigen wird nach S. 647

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & M_\alpha &= -N \left( \mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \text{Momentensumme } M &= \frac{M_r + M_\alpha}{1 + \mu} = -N \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -N \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (945)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an dem Plattenabschnitt Abb. 627 liefern die Beziehungen

$$Q_{rz} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\alpha}{r} = -N \frac{d}{dr} (\Delta w); \quad \frac{d(r Q_{rz})}{dr} = -p r \quad (946)$$

und mit (945) die Differentialgleichung

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w = \Delta \Delta w = \frac{p}{N}. \quad (947)$$

Das Ergebnis kann daher in der Form

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{N} \quad (948)$$

angeschrieben und nach (946) aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p r}{N} \quad (949)$$

abgeleitet werden. Es läßt sich daher mit  $\varphi = dw/dr$  auch folgendermaßen ausdrücken:

$$r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r} \varphi = r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{1}{N} \left( \int_0^r p r dr + C \right). \quad (950)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung 4. Ordnung besteht aus einem partikulären Integral  $w_0$  der inhomogenen Gleichung (947) und aus vier mit den Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  erweiterten Lösungen  $w_1$  bis  $w_4$  der homogenen Gleichung. Das partikuläre Integral  $w_0$  kann in diesem Falle aus (936), (937) durch eine zweimalige Wiederholung einer doppelten Quadratur bestimmt werden, denn

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{dM}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( r \frac{dM}{dr} \right) = -p r, & M &= - \int \frac{dr}{r} \int p r dr, \\ r \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{dw_0}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_0}{dr} \right) = -\frac{M r}{N}, & w_0 &= - \int \frac{dr}{r} \int \frac{M}{N} r dr. \end{aligned} \right\} \quad (951)$$

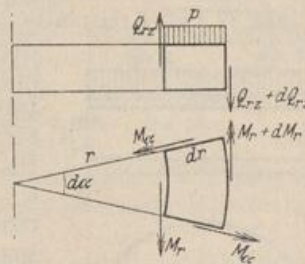


Abb. 627.



Als Lösungen der homogenen Gleichung eignen sich, wie sich leicht durch Einsetzen in (947) prüfen läßt, die folgenden Ansätze:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad w_3 = \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a}, \quad w_4 = \ln \frac{r}{a}. \quad (952)$$

$a$  ist der Radius des Plattenrandes (Abb. 628c). Daher lautet die vollständige Lösung von (947) mit  $r/a = \varrho$

$$\begin{aligned} w &= w_0 + C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \varrho^2 \ln \varrho + C_4 \ln \varrho, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{dw_0}{d\varrho} + 2C_2 \varrho + C_3 \varrho (1 + 2 \ln \varrho) + C_4 \frac{1}{\varrho} \right], \\ M_r &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[ 2C_2 + C_3 \left( \frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) - C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M_\alpha &= -\frac{N}{a^2} \left\{ \mu \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + (1+\mu) \left[ 2C_2 + C_3 \left( \frac{1+3\mu}{1+\mu} + 2 \ln \varrho \right) + C_4 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\varrho^2} \right] \right\}, \\ M &= -\frac{N}{a^2} \left[ \frac{d^2 w_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw_0}{d\varrho} + 4C_2 + 4C_3 (1 + \ln \varrho) \right], \\ Q_{rz} &= -\frac{N}{a^3} \left( \frac{d^3 w_0}{d\varrho^3} + \frac{d^2 w_0}{\varrho d\varrho^2} - \frac{dw_0}{\varrho^2 d\varrho} + 4C_3 \frac{1}{\varrho} \right). \end{aligned} \quad (953)$$

Der Stützendruck  $A$  bei einer zentralsymmetrischen Belastung  $\mathfrak{P}$  wird

$$A = \mathfrak{P}/2\pi a. \quad (954)$$

Da jedoch die Durchbiegung  $w$  und die Biegemomente  $M_r, M_\alpha$  im Mittelpunkt  $O$  der Kreisplatte ( $\varrho = 0, \ln \varrho = \infty$ ) für  $C_3 \neq 0, C_4 \neq 0$  unendlich groß werden, sind diese Integrationskonstanten des logarithmischen Anteils der Lösung für die Kreisplatte Null. Die Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  werden aus den Bedingungen für die Stützung am Plattenrande  $r = a, \varrho = 1$  bestimmt. Bei freier Auflagerung des Plattenrandes ist für  $\varrho = 1$ :  $w = 0$  und  $M_r = 0$ , bei starrer Einspannung des Plattenrandes für  $\varrho = 1$ :  $w = 0, dw/dr = 0$ . Bei elastischer Einspannung der Kreisplatte in einem Zylinder besteht die Formänderung aus der Ausbiegung  $w^*$  der frei aufgelagerten Platte mit der vorgeschriebenen Belastung  $p$  und aus der Ausbiegung  $Mw^{**}$  derselben Platte mit einem am Rande angreifenden Einspannungsmoment  $M$  (Abb. 628a, b).

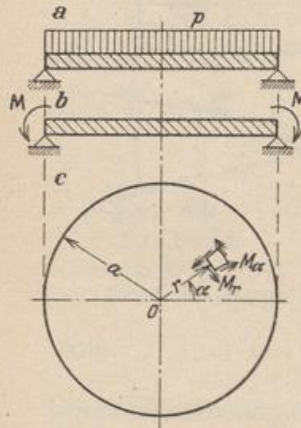


Abb. 628.

$$w = w^* + Mw^{**}. \quad (955)$$

Bei starrer Einspannung mit  $M = M_0$  ist für  $r = a$  mit  $\varrho = 1$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw^*}{dr} + M_0 \frac{dw^{**}}{dr} = 0 \quad (956)$$

und damit das Einspannungsmoment noch auf andere Weise bestimmt

Die Kreisringplatten werden entweder an beiden Rändern gestützt (Abb. 629a) oder als Kragplatten verwendet. Der freie Rand wird dann mit  $r = b, b/a = \beta$ , der gestützte Rand mit  $r = a, \varrho = 1$  bezeichnet (Abb. 629b, c). Die Platte kann hier wieder frei aufgelagert oder eingespannt sein. Die Formänderung der Kreis-



ringplatte wird durch die vollständige Differentialgleichung mit vier Integrationskonstanten beschrieben. Zu ihrer Berechnung stehen an jedem Rande zwei Bedingungen zur Verfügung. Am freien Rand  $\varrho = \beta$  ist  $M_r = 0, Q_r = 0$ .

Die Kreisplatte vom Durchmesser  $2b$  kann außerdem in einem konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser  $2a$  gestützt sein und daher mit einer Ringplatte von der Breite  $b-a$  auskragen. Die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte sind dann in  $r = a$  unstetig. Die Berechnung zerfällt in die Lösung I für die Formänderung  $w$  der Kreisplatte mit den beiden Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  und in die Lösung II nach (953) für die Formänderung der Ringplatte von der Breite  $(b-a)$  mit vier Integrationskonstanten. Die sechs Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen an der äußeren Begrenzung ( $r = b$ ) mit  $M_{b,II} = 0, Q_{bz,II} = 0$  und aus den Bedingungen an dem abgestützten Kreis  $r = a$  berechnet. An dieser Stelle ist  $w_{a,I} = 0, w_{a,II} = 0, dw_{a,I}/dr = dw_{a,II}/dr$  und  $M_{a,I} = M_{a,II}$ . Als Kontrolle gilt  $Q_{a,I} - Q_{a,II} + \mathfrak{P}/2\pi a = 0$  (Abb. 630) mit  $\mathfrak{P}$  als Plattenbelastung. Dasselbe gilt von der Berechnung einer Ringplatte von der Breite  $(b-c)$ , nur daß in diesem Falle in die Rechnung acht Integrationskonstanten eingehen, die sich aus acht linearen Gleichungen ergeben (Abb. 631). Die Lösung läßt sich bei zentraler Symmetrie naturgemäß leicht auch für die statisch unbestimmte Stützung der Kreis- und Kreisringplatte erweitern.

Die Belastung  $\hat{p} = \hat{p}_0$  oder  $\hat{p} = \hat{p}(r)$  erstreckt sich über die ganze Breite, über einen Ringstreifen oder als Linienbelastung  $P$  über einen ausgezeichneten Breitenkreis der Platte. Die Einzellast  $P_0$  im Ursprung  $O$  ist ein Sonderfall. Formänderung und Schnittkräfte der Platte lassen sich in diesem Falle nach den Ansätzen auf S. 650 in dem Bereich um den Plattenmittelpunkt nicht angeben. Unstetigkeiten im Verlauf der zentralsymmetrischen Belastung  $\hat{p}$  führen zu einer Unterteilung des Integrationsbereiches. Dasselbe gilt bei einem Wechsel der Plattenstärke. Die

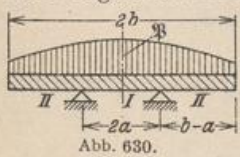


Abb. 630.

Untersuchung beginnt in jedem Falle mit der Berechnung der Integrationskonstanten aus ebenso vielen linearen Gleichungen. Damit ist die Ausbiegung  $w$  eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann auch von den Schnittkräften,

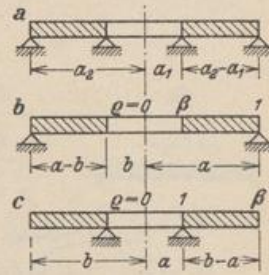


Abb. 629.

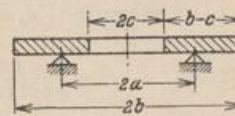


Abb. 631.

die sich nach (953) aus Ableitungen der Funktion  $w$  zusammensetzen. Die Lösung ist richtig, wenn sie die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

Da Kreis- und Kreisringplatten für die konstruktive Ausgestaltung zahlreicher Bauaufgaben verwendet werden, ist das Ergebnis der notwendigen Untersuchungen in den Tabellen 63 u. 64 zusammengefaßt worden. Ihre Anwendung wird wesentlich vereinfacht, wenn die reziproke Poissonsche Zahl  $\mu$ , die bei Stahl mit 0,25, bei Eisenbeton zwischen 0,16 und 0,10 gemessen ist, vernachlässigt wird. Dies ist in der Regel zulässig.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung läßt sich mit (945) ebenso wie in Abschn. 67 in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegen

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = -\hat{p}, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{M}{N} = -w. \quad (957)$$

Da nach (945) und (946)

$$\frac{dM}{dr} = Q_{rz,p} = -\frac{1}{r} \int_0^r \hat{p} r dr, \quad \text{also auch} \quad \frac{dw}{dr} = Q_{rz,w} = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{M}{N} r dr$$



ist, entstehen nach H. Marcus die beiden simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 M}{dr^2} = - \left[ p - \frac{1}{r^2} \int_0^r p r dr \right], \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = - \left[ \frac{M}{N} - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{M}{N} r dr \right], \quad (958)$$

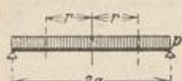
die wiederum eine Analogie zu den Differentialgleichungen der Seilkurve und der Biegelinie des biegeungssteifen Stabes bilden und sich zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Kreisplatte ebenfalls eignen.

Tabelle 63. Formänderungen und Schnittkräfte symmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten.

$$q = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad N = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad w' = \frac{dw}{dr}.$$

$$\Phi_0 = 1 - q^4, \quad \Phi_1 = 1 - q^2, \quad \Phi_2 = q^2 \ln q, \quad \Phi_3 = \ln q, \quad \Phi_4 = \frac{1}{q^2} - 1.$$

Die Funktionen  $\Phi_0$  bis  $\Phi_4$  sind in Tabelle 64 enthalten.

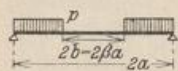


$$w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1; \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}; \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu),$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu); \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = [(5 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2] (1 - \beta^2) - 4(1 + \mu) \beta^4 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] (1 - \beta^2) + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [\kappa_1 - 2\kappa_2 + 2\kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

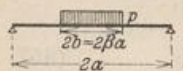
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ 2[(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4] \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0 - 4(1 + \mu) \beta^4 \Phi_3 - 8(1 + \mu) \beta^2 \Phi_2 \},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left( q - \frac{\beta^2}{q} \right),$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu)(1 - \beta^2)^2].$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2)^2, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu)(1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = 4 - (1 - \mu) \beta^2, \quad \kappa_2 = [\kappa_1 - 4(1 + \mu) \ln \beta] \beta^2,$$

$$\kappa_3 = 4(3 + \mu) - (7 + 3\mu) \beta^2 + 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ 1 + [4 - 5\beta^2 + 4(2 + \beta^2) \ln \beta] \beta^2 + 2 \frac{\kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right\}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1].$$



$$q \geq \beta: w = \frac{p a^4}{64 N} \cdot 2 \beta^2 \left[ \frac{2(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2}{1 + \mu} \Phi_1 + 4 \Phi_2 + 2 \beta^2 \Phi_3 \right].$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-(1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) \beta^2 (2 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{p a^2 b^2}{64 N (1 + \mu)} \kappa_3, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_2.$$

$$q = \beta: M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_2 - (1 + 3\mu) \beta^2], \quad Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{p a b^2}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p b^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) (1 - \beta^2) + 2(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta.$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) (1 - \beta^2) - 2(1 + \mu) \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

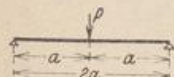
$$q \geq \beta: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} [(3 + \mu) - (1 - \mu) \beta^2] \Phi_1 + 2(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 + \mu) \Phi_2,$$

$$M_r = \frac{P b}{4} [(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{q}.$$

$$M_t = \frac{P b}{4} [-(1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 2(1 + \mu) \Phi_3 + 2(1 - \mu) (1 - \beta^2)].$$

$$q = 0: w = \frac{P a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \kappa_1.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} (1 - \beta^2), \quad M_t = \frac{P b}{2} (1 - \mu) (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

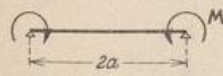


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \left[ \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} (1 + \mu) \Phi_3, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a q}.$$

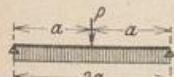
$$q = 0: w = \frac{P a^2}{16 \pi N} \frac{3 + \mu}{1 + \mu}.$$

$$q = 1: w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{4 \pi} (1 - \mu), \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \Phi_1, \quad M_r = M_t = M, \quad Q_r = 0.$$

$$q = 1: w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu)}.$$



$$w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \left( 2 \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \Phi_1 + \Phi_0 + 8 \Phi_2 \right).$$

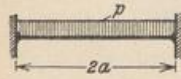
$$M_r = -\frac{P}{16 \pi} [(3 + \mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{16 \pi} [(1 + 3\mu) \Phi_1 + 4(1 + \mu) \Phi_3 - 2(1 - \mu)], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a} \left( \frac{1}{q} - \nu \right)$$



$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{64 \pi N} \frac{7 + 3 \mu}{1 + \mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N (1 + \mu)}, \quad M_t = \frac{P}{8 \pi} (1 - \mu).$$

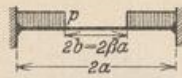


$$w = \frac{p a^4}{64 N} (2 \Phi_1 - \Phi_0), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - 2],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3 \mu) \Phi_1 - 2 \mu], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} e.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N}, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu),$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$



$$\kappa_1 = 1 - 4 \beta^2 + \beta^4 (3 - 4 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = 1 - \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2) + 2 \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [2 (1 - 2 \beta^2 - \beta^4) \Phi_1 - \Phi_0 - 4 \beta^4 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2],$$

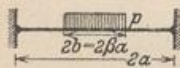
$$M_r = \frac{p a^2}{16} [-2 (1 - \beta^2)^2 + (3 + \mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [-2 \mu (1 - \beta^2)^2 + (1 + 3 \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \beta^4 \Phi_4 + 4 (1 + \mu) \beta^2 \Phi_3],$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left( e - \frac{\beta^2}{e} \right).$$

$$e = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1.$$

$$e = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - \beta^2)^2, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa_1 = \beta^2 [4 - \beta^2 (3 - 4 \ln \beta)],$$

$$\kappa_2 = \beta^2 (\beta^2 - 4 \ln \beta).$$

$$e \leq \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(\kappa_1 - 2 \kappa_2 + 1) + 2 \kappa_2 \Phi_1 - \Phi_0],$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu)] + (3 + \mu) \Phi_1\},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{[(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu)] + (1 + 3 \mu) \Phi_1\}.$$

$$e \geq \beta: \quad w = \frac{p a^2 b^2}{32 N} [(2 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 4 \Phi_2],$$

$$M_r = \frac{p b^2}{16} [-2 (2 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \frac{\beta}{e},$$

$$M_t = \frac{p b^2}{16} [-2 \mu (2 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 - 4 (1 + \mu) \Phi_3].$$

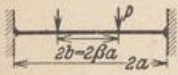


$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \kappa_1, \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} (1 + \mu) \kappa_2.$$

$$q = \beta: \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (3 + \mu) \beta^2], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + \mu) \kappa_2 - (1 + 3 \mu) \beta^2];$$

$$Q_r = -\frac{p b}{2}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p b^2}{8} \mu (2 - \beta^2), \quad Q_r = -\frac{p b}{2} \beta.$$



$$\kappa_1 = 1 - \beta^2 (1 - 2 \ln \beta),$$

$$\kappa_2 = \beta^2 - 1 - 2 \ln \beta.$$

$$q \leq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \Phi_1], \quad M_r = M_t = \frac{P b}{4} (1 + \mu) \kappa_2, \quad Q_r = 0.$$

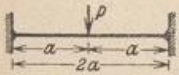
$$q \geq \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + \beta^2) \Phi_1 + 2 \beta^2 \Phi_3 + 2 \Phi_2],$$

$$M_r = -\frac{P b}{4} [2(1 - \beta^2) - (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P b}{4} [2 \mu (1 - \beta^2) + (1 - \mu) \beta^2 \Phi_4 + 2(1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -P \frac{\beta}{e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - \beta^2), \quad Q_r = -P \beta.$$

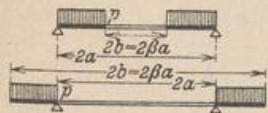


$$w = \frac{P a^2}{16 \pi N} (\Phi_1 + 2 \Phi_2).$$

$$M_r = -\frac{P}{4 \pi} [1 + (1 + \mu) \Phi_3], \quad M_t = -\frac{P}{4 \pi} [\mu + (1 + \mu) \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a e}.$$

$$q = 0: \quad w = \frac{P a^2}{16 \pi N}.$$

$$q = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P}{4 \pi} \mu, \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a}.$$



$$\kappa_1 = (3 + \mu) + 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (3 + \mu) - 4(1 + \mu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta,$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} [(3 + \mu) - \beta^2 \kappa_2] \Phi_1 - \Phi_0 - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \Phi_3 - 8 \beta^2 \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} \left( e - \frac{\beta^2}{e} \right),$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} \{ (1 + 3 \mu) \Phi_1 + \beta^2 \kappa_1 \Phi_4 + 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3 + 2(1 - \mu) - 2 \beta^2 [2(1 - \mu) - \kappa_1] \}.$$

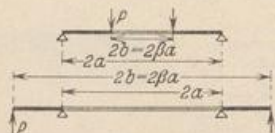
$$q = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left\{ [(5 + \mu) - (7 + 3 \mu) \beta^2] \frac{1 - \beta^2}{1 + \mu} - \frac{4}{1 - \mu} \beta^2 \kappa_1 \ln \beta \right\},$$

$$w' = -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} \left( \frac{\kappa_1}{1 - \mu} - \beta^2 \right), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} [\kappa_1 - (1 - \mu) \beta^2].$$



$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \left[ 1 - \beta^2 \left( 2 - \frac{\varkappa_1}{1 - \mu} \right) \right],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{8} \{ (1 - \mu) - \beta^2 [ 2 (1 - \mu) - \varkappa_1 ] \}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\varkappa = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[ \left( \frac{3 + \mu}{1 + \mu} - 2 \varkappa \right) \Phi_1 + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \Phi_3 + 2 \Phi_2 \right].$$

$$M_r = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) (-\varkappa \Phi_4 + \Phi_3); \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho},$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left[ \varkappa \Phi_4 + \Phi_3 + \left( 2 \varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right) \right].$$

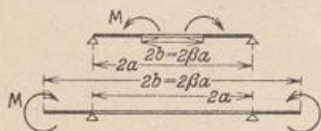
$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} \left[ \frac{3 + \mu}{1 + \mu} (1 - \beta^2) + 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varkappa \ln \beta \right],$$

$$w' = -\frac{P a^2}{2 N (1 + \mu)} \left( \beta^2 - 2 \varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right),$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left( 2 \frac{\varkappa}{\beta^2} - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right); \quad Q_r = -P.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{P a b}{2 N (1 + \mu)} \left( 1 - 2 \varkappa \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad Q_r = -P \beta,$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} (1 + \mu) \left( 2 \varkappa - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right).$$



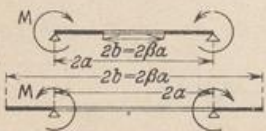
$$w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \Phi_3 \right),$$

$$M_r = M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4; \quad M_t = -M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (\Phi_4 + 2), \quad Q_r = 0.$$

$$\varrho = \beta: \quad w = -\frac{M b^2}{2 N (1 + \mu)} \left( 1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\ln \beta}{1 - \beta^2} \right),$$

$$w' = \frac{M b}{N (1 + \mu)} \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \beta^2 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right); \quad M_t = -M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = 2 \frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{\beta}{1 - \beta^2}; \quad M_t = -2 M \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left( \Phi_1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \Phi_3 \right),$$

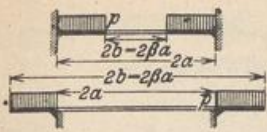
$$M_r = M \left( 1 - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad M_t = M \left( \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Phi_4 \right); \quad Q_r = 0$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1 + \mu)} \left( 1 - 2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right),$$

$$w' = -\frac{M b}{N (1 - \mu^2)} \frac{2}{1 - \beta^2}; \quad M_t = M \frac{2}{1 - \beta^2}.$$

$$\varrho = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1 + \mu) (1 - \beta^2)} \left( 1 + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \beta^2 \right), \quad M_t = M \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$





$$\kappa_1 = (1 + \mu) + (1 - \mu) \beta^2, \quad \psi_1 = 4(1 + \mu) \beta^2 \ln \beta,$$

$$\kappa_2 = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2, \quad \psi = \frac{\kappa_1 + \psi_1}{\kappa_2} \beta^2.$$

$$w = \frac{p a^4}{64 N} [2(1 - 2\beta^2 - \psi) \Phi_1 - \Phi_0 - 4\psi \Phi_3 - 8\beta^2 \Phi_2].$$

$$M_r = -\frac{p a^2}{16} [2(1 - 2\beta^2 + \psi) - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

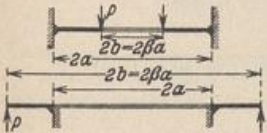
$$M_t = -\frac{p a^2}{16} [2\mu(1 - 2\beta^2 + \psi) - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu) \psi \Phi_4 - 4(1 + \mu) \beta^2 \Phi_3].$$

$$Q_r = -\frac{p a}{2} \left( \varrho - \frac{\beta^2}{\varrho} \right).$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} [(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)(\psi + 2\beta^2) - 4(\psi + 2\beta^4) \ln \beta],$$

$$w' = -\frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{\psi - \beta^4}{\beta}; \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1 - \mu^2}{\kappa_2} (1 - \beta^4 + 4\beta^2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{p a^2}{8} \mu (1 - 2\beta^2 + \psi); \quad Q_r = -\frac{p a}{2} (1 - \beta^2).$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2;$$

$$\psi = [1 + (1 + \mu) \ln \beta] \frac{\beta^2}{\kappa}.$$

$$w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi) \Phi_1 + 4\psi \Phi_3 + 2\Phi_2].$$

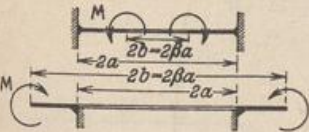
$$M_r = -\frac{P b}{2} [(1 - 2\psi) - (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3]. \quad Q_r = -P \frac{\beta}{\varrho}.$$

$$M_t = -\frac{P b}{2} [\mu(1 - 2\psi) + (1 - \mu) \psi \Phi_4 + (1 + \mu) \Phi_3].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{P a^2 b}{8 N} [(1 + 2\psi)(1 - \beta^2) + 2(\beta^2 + 2\psi) \ln \beta],$$

$$w' = \frac{P b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta), \quad M_t = -\frac{P b}{2} \frac{1 - \mu^2}{\kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta).$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = -\frac{P b}{2} \mu (1 - 2\psi),$$



$$\kappa = (1 - \mu) + (1 + \mu) \beta^2,$$

$$w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} [\Phi_1 + 2\Phi_3]; \quad Q_r = 0,$$

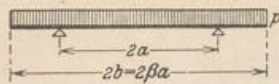
$$M_r = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2 + (1 - \mu) \Phi_4]; \quad M_t = \frac{M \beta^2}{\kappa} [2\mu - (1 - \mu) \Phi_4].$$

$$\varrho = \beta: \quad w = \frac{M b^2}{2 N \kappa} (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta); \quad w' = \frac{M b}{N \kappa} (1 - \beta^2).$$

$$M_t = -\frac{M}{\kappa} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \beta^2].$$

$$\varrho = 1: \quad M_t = \mu M_r = \frac{2 M \beta^2}{\kappa} \mu.$$





$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 2(1 - \mu) + (1 + 3\mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta, \\ \kappa_2 &= 2(1 - \mu) - (3 + \mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta.\end{aligned}$$

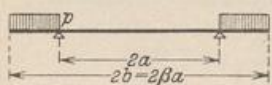
$$\begin{aligned}q \leq 1: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N} \left( \frac{2\kappa_1}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1], \\ M_t &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q \geq 1: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N} \left( \frac{2\kappa_2}{1 + \mu} \Phi_1 - \Phi_0 - 8\beta^2 \Phi_3 - 8\beta^2 \Phi_2 \right), \quad Q_r = \frac{p a}{2} \left( \frac{\beta^2}{q} - q \right), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) + (3 + \mu) \Phi_1 - 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ M_t &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1 + 2(1 - \mu)\beta^2 \Phi_4 + 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3].\end{aligned}$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left( \frac{2\kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$\begin{aligned}q = 1: \quad w' &= -\frac{p a^3}{16 N} \left( \frac{\kappa_1}{1 + \mu} - 1 \right), \quad Q_{r1} = -\frac{p a}{2}, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1), \\ M_r &= \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu)], \quad M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q = \beta: \quad w &= -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \{ [(3 - 5\mu) - (7 + 3\mu)\beta^2] (\beta^2 - 1) + 16(1 + \mu)\beta^2 \ln \beta \}, \\ w' &= -\frac{p a^2 b}{8 N (1 + \mu)} (2 - \beta^2), \quad M_t = \frac{p a^2}{8} (1 - \mu) (2 - \beta^2).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu) + 4\mu\beta^2 - (1 + 3\mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta], \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\beta^2} [(1 - \mu)(1 - 2\beta^2) + (3 + \mu)\beta^4 + 4(1 + \mu)\beta^4 \ln \beta].\end{aligned}$$

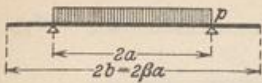
$$\begin{aligned}q \leq 1: \quad w &= -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1 \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_r = 0, \\ q \geq 1: \quad w &= -\frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} [2\kappa_2 \Phi_1 + (1 + \mu) \Phi_0 + 4(1 + \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_3 + 8(1 + \mu)\beta^2 \Phi_2], \\ M_r &= -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (3 + \mu) \Phi_1 + (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ M_t &= -\frac{p a^2}{16} [\kappa_1 - (1 + 3\mu) \Phi_1 - (1 - \mu)(2\beta^2 - 1) \Phi_4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \Phi_3], \\ Q_r &= \frac{p a}{2} \left( \frac{\beta^2}{q} - q \right).\end{aligned}$$

$$q = 0: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1.$$

$$q = 1: \quad w' = \frac{p a^3}{16 N (1 + \mu)} \kappa_1, \quad M_r = M_t = -\frac{p a^2}{16} \kappa_1, \quad Q_{r1} = 0, \quad Q_{ra} = \frac{p a}{2} (\beta^2 - 1).$$

$$\begin{aligned}q = \beta: \quad w &= \frac{p a^4}{64 N (1 + \mu)} \cdot \left\{ [2(1 - \mu) - (3 - 5\mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4] \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} - 4(1 + \mu)(4\beta^2 - 1) \ln \beta \right\}, \\ w' &= \frac{p a^3}{8 N (1 + \mu)} \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta}, \quad M_t = -\frac{p a^2}{8} (1 - \mu) \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\beta^2}.\end{aligned}$$





$$\kappa = \frac{1-\mu}{\beta^2} + 2(1+\mu).$$

$$q \leq 1: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left( 2 \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1 - \Phi_0 \right), \quad M_r = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (3+\mu) + (3+\mu) \Phi_1],$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [\kappa - (1+3\mu) + (1+3\mu) \Phi_1], \quad Q_r = -\frac{p a}{2} q.$$

$$q \geq 1: \quad w = \frac{p a^4}{32 N} \left[ \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\beta^2} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right], \quad Q_r = 0.$$

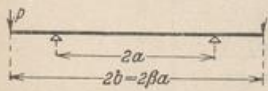
$$M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left( \frac{\beta^2-1}{\beta^2} + \Phi_4 \right), \quad M_t = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \left( -\frac{\beta^2+1}{\beta^2} - \Phi_4 \right).$$

$$q = 0: \quad w = \frac{p a^4}{64 N} \left( 2 \frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = M_t = \frac{p a^2}{16} \kappa.$$

$$q = 1: \quad w' = -\frac{p a^3}{16 N} \left( \frac{\kappa}{1+\mu} - 1 \right), \quad M_r = -\frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2-1}{\beta^2},$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} (1-\mu) \frac{\beta^2+1}{\beta^2}, \quad Q_r = -\frac{p a}{2}.$$

$$q = \beta: \quad w = -\frac{p a^4}{32 N} \left[ \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\beta^2-1}{\beta^2} + 2 \ln \beta \right], \quad w' = -\frac{p a^3}{8 N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = \frac{p a^2}{8} \frac{1-\mu}{\beta^2}.$$



$$\kappa = (1-\mu) \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) + 2(1+\mu) \beta \ln \beta.$$

$$q \leq 1: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$q \geq 1: \quad w = \frac{P a^3}{8 N} \left\{ -\left[ \frac{\kappa}{1+\mu} + 2\beta \right] \Phi_1 - 2\beta \Phi_3 - 2\beta \Phi_2 \right\},$$

$$M_r = -\frac{P a}{4} [\kappa + (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3], \quad Q_r = +P \frac{\beta}{q}.$$

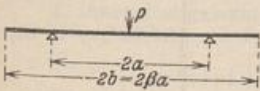
$$M_t = -\frac{P a}{4} [\kappa - (1-\mu) \beta \Phi_4 - 2(1+\mu) \beta \Phi_3].$$

$$q = 0: \quad w = -\frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \kappa.$$

$$q = 1: \quad w' = \frac{P a^2}{4 N (1+\mu)} \kappa; \quad M_r = M_t = -\frac{P a}{4} \kappa.$$

$$q = \beta: \quad w = \frac{P a^3}{8 N (1+\mu)} \left\{ [(1-\mu) + (3+\mu) \beta^2] \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) - 2\kappa \right\},$$

$$w' = \frac{P a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2 - 1); \quad M_t = \frac{P a}{2 \beta} (1-\mu) (1-\beta^2).$$



$$\kappa = 2(1+\mu) \beta^2.$$

$$q \leq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left[ \left( \frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right) \Phi_1 + \Phi_2 \right],$$

$$M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [(1-\mu) (\beta^2-1) + \kappa \Phi_3],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} [-(1-\mu) (\beta^2+1) + \kappa \Phi_3]; \quad Q_r = -\frac{P}{2 \pi a q}.$$



$$e \geq 1: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left( \frac{1-\mu}{\kappa} \Phi_1 - \Phi_3 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [(\beta^2-1) + \beta^2 \Phi_4],$$

$$M_t = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) [-(\beta^2+1) - \beta^2 \Phi_4]; \quad Q_r = 0.$$

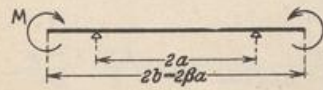
$$e = 0: \quad w = \frac{P a^2}{8 \pi N} \left( \frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right).$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{P a}{8 \pi N} \left( 2 \frac{1-\mu}{\kappa} + 1 \right), \quad M_r = -\frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2-1);$$

$$M_t = \frac{P}{8 \pi \beta^2} (1-\mu) (\beta^2+1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{P a^2}{8 \pi N} \left[ \frac{1-\mu}{\kappa} (\beta^2-1) + \ln \beta \right]; \quad w' = -\frac{P a}{4 \pi N (1+\mu) \beta},$$

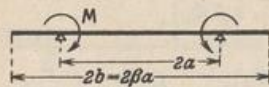
$$M_t = \frac{P}{4 \pi \beta^2} (1-\mu).$$



$$w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} \Phi_1; \quad M_r = M_t = M; \quad Q_r = 0.$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{2 N (1+\mu)}; \quad e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{N (1+\mu)}.$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{2 N (1+\mu)} (\beta^2-1); \quad w' = -\frac{M b}{N (1+\mu)}.$$



$$\psi = \frac{1-\mu}{\beta^2}; \quad \kappa = (1+\mu) + \psi.$$

$$e \leq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu} \Phi_1, \quad M_r = M_t = \frac{M}{2} \kappa, \quad Q_r = 0.$$

$$e \geq 1: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \left( \frac{\psi}{1+\mu} \Phi_1 - 2 \Phi_3 \right); \quad Q_r = 0,$$

$$M_r = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[ \left( \frac{1}{\beta^2} - 1 \right) - \Phi_4 \right], \quad M_t = \frac{M}{2} (1-\mu) \left[ \left( \frac{1}{\beta^2} + 1 \right) + \Phi_4 \right].$$

$$e = 0: \quad w = \frac{M a^2}{4 N} \frac{\kappa}{1+\mu}.$$

$$e = 1: \quad w' = -\frac{M a}{2 N} \left( 1 + \frac{\psi}{1+\mu} \right),$$

$$M_{r,t} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{r,a} = -\frac{M}{2} (2 - \kappa),$$

$$M_{t,t} = \frac{M}{2} \kappa; \quad M_{t,a} = \frac{M}{2} \psi (\beta^2 + 1).$$

$$e = \beta: \quad w = -\frac{M a^2}{4 N} \left[ \frac{\psi}{1+\mu} (\beta^2-1) + 2 \ln \beta \right].$$

$$w' = -\frac{M a}{N (1+\mu) \beta}, \quad M_t = M \psi.$$



Tabelle 64. Funktionen  $\Phi_0$  bis  $\Phi_4$ .

$\varrho$	$\Phi_0$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$
0,0	+ 1,0000	+ 1,00	0	- $\infty$	+ $\infty$
1	+ 0,9999	+ 0,99	- 0,0230	- 2,3026	+ 99,0000
2	+ 0,9984	+ 0,96	- 0,0644	- 1,6094	+ 24,0000
3	+ 0,9919	+ 0,91	- 0,1084	- 1,2040	+ 10,1111
4	+ 0,9744	+ 0,84	- 0,1556	- 0,9163	+ 5,2500
5	+ 0,9375	+ 0,75	- 0,1733	- 0,6931	+ 3,0000
6	+ 0,8704	+ 0,64	- 0,1839	- 0,5108	+ 1,7778
7	+ 0,7599	+ 0,51	- 0,1748	- 0,3567	+ 1,0408
8	+ 0,5904	+ 0,36	- 0,1428	- 0,2231	+ 0,5625
9	+ 0,3439	+ 0,19	- 0,0853	- 0,1053	+ 0,2346
1,0	0	0	0	0	0
1	- 0,4641	- 0,21	+ 0,1153	+ 0,0953	- 0,1736
2	- 1,0736	- 0,44	+ 0,2625	+ 0,1823	- 0,3056
3	- 1,8561	- 0,69	+ 0,4434	+ 0,2624	- 0,4083
4	- 2,8416	- 0,96	+ 0,6595	+ 0,3365	- 0,4898
5	- 4,0625	- 1,25	+ 0,9123	+ 0,4055	- 0,5556
6	- 5,5536	- 1,56	+ 1,2032	+ 0,4700	- 0,6094
7	- 7,3521	- 1,89	+ 1,5335	+ 0,5306	- 0,6540
8	- 9,4976	- 2,24	+ 1,9044	+ 0,5878	- 0,6914
9	- 12,0321	- 2,61	+ 2,3171	+ 0,6419	- 0,7230
2,0	- 15,0000	- 3,00	+ 2,7726	+ 0,6931	- 0,7500
1	- 18,4481	- 3,41	+ 3,2719	+ 0,7419	- 0,7732
2	- 22,4256	- 3,84	+ 3,8161	+ 0,7885	- 0,7934
3	- 26,9841	- 4,29	+ 4,4061	+ 0,8329	- 0,8110
4	- 32,1776	- 4,76	+ 5,0427	+ 0,8755	- 0,8264
5	- 38,0625	- 5,25	+ 5,7268	+ 0,9163	- 0,8400

Beispiel für die Anwendung der Tabelle 63.

Der Verlauf der Biegemomente wird für eine Kreisringplatte mit verschiedener Stützung aus der Tabelle 63 entwickelt ( $\mu = 1/2$ ).

1. Innen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632a).

Mit  $\beta = b/a = 5,5/2,5 = 2,20$  ist nach S. 657

$$\kappa_1 = 5,20, \quad \kappa_2 = 6,48, \quad \psi_1 = 17,808, \quad \psi = 17,185.$$

Damit wird

$$M_r = -6,6445 + 1,2370 \Phi_1 - 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = -1,1074 + 0,5859 \Phi_1 + 5,5942 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633a})$$

2. Innen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632b).

Mit  $\beta = 2,20$  ist nach S. 655

$$\kappa_1 = -1,4710, \quad \kappa_2 = 7,8043, \quad \text{und damit}$$

$$M_r = 1,2370 \Phi_1 + 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3,$$

$$M_t = 0,5859 \Phi_1 - 2,7811 \Phi_4 + 8,8230 \Phi_3 - 11,2132 \quad (\text{Abb. 633b}).$$

3. Außen eingespannte Kreisringplatte (Abb. 632c).

Mit  $\beta = \frac{b}{a} = \frac{2,5}{5,5} = 0,4545$  ist nach S. 657

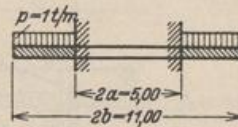


Abb. 632 a.

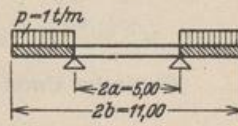


Abb. 632 b.

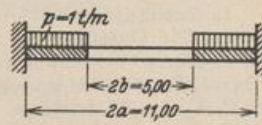


Abb. 632 c.

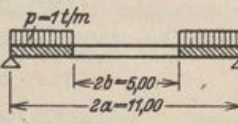


Abb. 632 d.



$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1,33884, & \kappa_2 &= 1,07438, & \psi_1 &= -0,760222, & \psi &= 0,111273; \\ M_r &= -2,6395 + 5,9870 \Phi_1 - 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= -0,4399 + 2,8359 \Phi_1 + 0,1753 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 \quad (\text{Abb. 633 c}). \end{aligned}$$

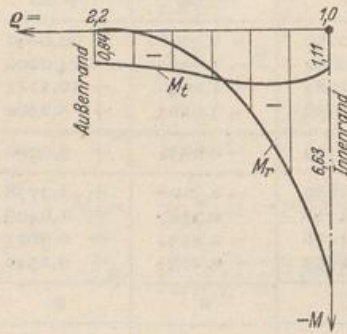


Abb. 633a.

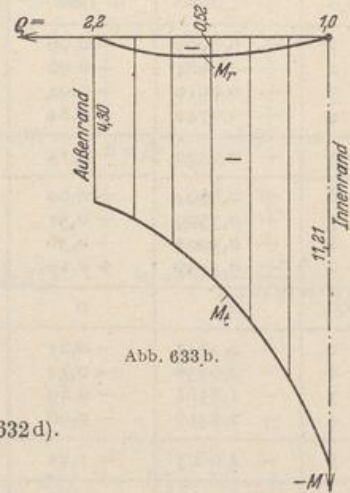


Abb. 633b.

4. Außen frei gelagerte Kreisringplatte (Abb. 632 d).  
Mit  $\beta = 0,4545$  ist nach § 655

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 2,2085, & \kappa_2 &= 4,1249; \\ M_r &= 5,9870 \Phi_1 - 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3, \\ M_t &= 2,8359 \Phi_1 + 0,8627 \Phi_4 + 1,8229 \Phi_3 + 3,5743 \quad (\text{Abb. 633 d}). \end{aligned}$$

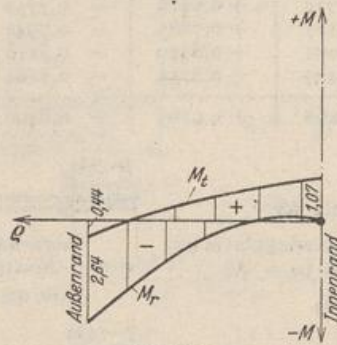


Abb. 633c.

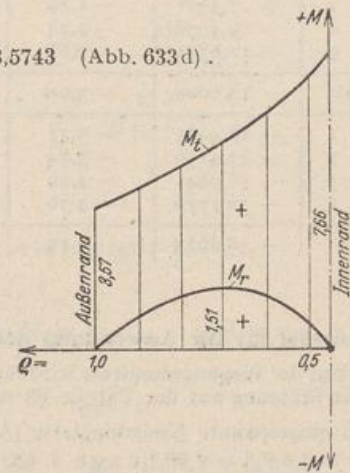


Abb. 633d.

#### Statische Untersuchung für die Decke eines kreisrunden Behälters mit Zwischenstützen.

Der Abstand der Stützen auf dem Parallelkreis  $r = a$  ist so klein, daß die Punkt- oder Flächenkräfte durch eine rotationssymmetrische Linienstützung ersetzt werden können.

1. Geometrische Grundlagen. Die Abmessungen des Tragwerks sind in Abb. 634a enthalten. Die Querdehnung wird mit  $\mu = 1/6$  eingesetzt.

2. Hauptsystem und Überzählige. Zur Berechnung dient das Hauptsystem Abb. 634b. Überzählige Größen sind die Linienstützkraft  $X_1$  über den ganzen äußeren Rand und die Stützkraft  $X_2$  der Mittelstütze.

3. Formänderung und Schnittkräfte des Hauptsystems. Die Verschiebungen werden im Nfachen Betrag angegeben und von den Schnittkräften nur die Biegemomente  $M_r$  berechnet.

Zustand  $X_1 = -1$  (Abb. 634c, Tabelle 63 S. 659).

$$\begin{aligned} \beta &= 2,0, & \ln \beta &= 0,693147, & \kappa &= 4,48469, \\ \delta_{11} &= 0,30216 \frac{a^2}{\pi}, & \delta_{21} &= -0,12013 \frac{a^2}{\pi}, \end{aligned}$$



$$w_i = -\frac{a^2}{\pi} 0,12013 \Phi_1, \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (-0,24513 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3 - 0,125 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} 0,28029, \quad M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,28029 + 0,10417 \Phi_4 - 0,29167 \Phi_3).$$

Zustand  $X_2 = -1$  (Abb. 634d, Tabelle 63 S. 659).

$$\kappa = 9,33333, \quad \delta_{22} = 0,13616 \frac{a^2}{\pi}, \quad \delta_{12} = -0,12013 \frac{a^2}{\pi},$$

$$w_i = \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2), \quad w_a = \frac{a^2}{\pi} (0,01116 \Phi_1 - 0,125 \Phi_3),$$

$$M_{r,i} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,29167 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = -\frac{1}{\pi} (0,07812 + 0,10417 \Phi_4).$$

Belastung durch  $p$  t/m (Abb. 634e, Tabelle 63 S. 658).

$$\kappa_1 = -5,27208, \quad \kappa_2 = -23,9387,$$

$$\delta_{10} = 0,42516 p a^4, \quad \delta_{20} = -0,15686 p a^4,$$

$$w_i = -p a^4 (0,14123 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0),$$

$$w_a = -p a^4 (0,64122 \Phi_1 + 0,01562 \Phi_0 + 0,5 \Phi_3 + 0,5 \Phi_2),$$

$$M_{r,i} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,52742 + 0,19792 \Phi_1 - 0,41667 \Phi_4 + 1,16667 \Phi_3).$$

4. Elastizitätsgleichungen nach Erweiterung

mit  $\frac{\pi}{a^2}$

	$X_1$	$X_2$	
1	+0,30216	-0,12013	+0,42516 $p a^2 \pi$
2	-0,12013	+0,13616	-0,15686 $p a^2 \pi$

Lösung:  $X_1 = 1,4618 p a^2 \pi$ ,  $X_2 = 0,1377 p a^2 \pi$ .

5. Superposition.

$$w = w_0 - X_1 w_1 - X_2 w_2,$$

$$w_i = p a^4 (-0,14123 \Phi_1 - 0,01562 \Phi_0) - 1,4618 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (-0,12013 \Phi_1) - 0,1377 p a^2 \pi \cdot \frac{a^2}{\pi} (0,13616 \Phi_1 + 0,125 \Phi_2),$$

$$= p a^4 (-0,01562 \Phi_0 + 0,01561 \Phi_1 - 0,01721 \Phi_2),$$

$$w_a = p a^4 (-0,01562 \Phi_0 - 0,28444 \Phi_1 - 0,31728 \Phi_2 - 0,30006 \Phi_3),$$

$$M_{r,i} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,04016 \Phi_3),$$

$$M_{r,a} = p a^2 (-0,10693 + 0,19792 \Phi_1 + 0,74031 \Phi_3 - 0,25005 \Phi_4).$$

Die Biegelinie und die Biegemomente  $M_r$ , ferner  $M_t$  und  $Q_r$  sind in Abb. 635 dargestellt.

**Platten mit veränderlicher Dicke.** Werden die Ausdrücke (945) der Biegemomente  $M_r, M_\alpha$  in die allgemeingültigen Gleichgewichtsbedingungen (947) eingesetzt, so entsteht die Differentialgleichung

$$N \Delta \Delta w + \frac{dN}{dr} \left( 2 \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{2 + \mu}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{d^2 N}{dr^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = p. \quad (959)$$

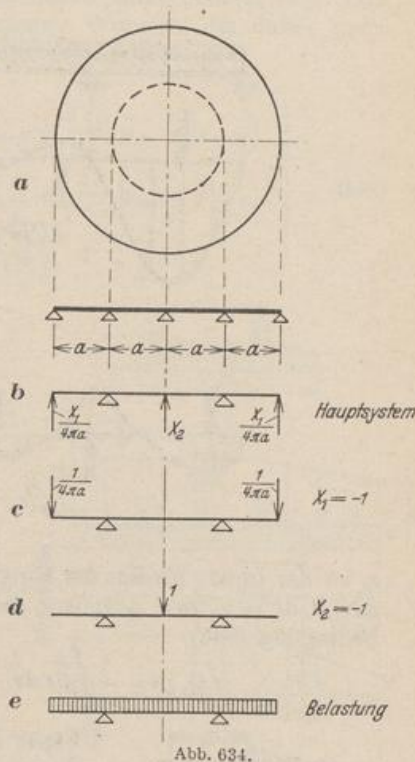


Abb. 634.



Sie läßt sich durch Differentiation aus

$$\frac{d}{dr} \left[ r N \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + r \frac{dN}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] = p r \quad (960)$$

gewinnen und daher mit  $dw/dr = \text{tg } \varphi \approx \varphi$  und  $\bar{\varphi} = \varphi E h_0^3 / 12(1 - \mu^2) = \varphi N_0$  auch als Differentialgleichung 2ter Ordnung anschreiben:

$$\frac{N}{N_0} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left( \frac{N}{r N_0} + \frac{dN}{N_0 dr} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left( \frac{N}{N_0} \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{dN}{N_0 dr} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r} \left[ \int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (961)$$

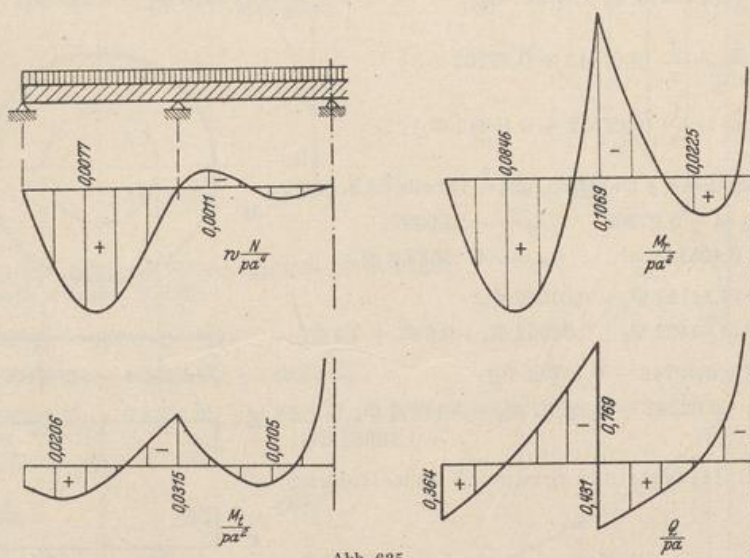


Abb. 635.

$r_i$  ist der innere Radius der Ringplatte (Abb. 636). Die Funktionen  $N/N_0 = h^3/h_0^3 = v_1$ ,  $dN/N_0 dr = v_2$  sind gegeben; die rechte Seite ist das Integral zur Gleichgewichtsbedingung (946).

$$r Q_{rz} = - \int_{r_i}^r p r dr + C \quad \text{und daher} \quad C = r Q_{rz} + \int_{r_i}^r p r dr. \quad (962)$$



Abb. 636.

Freier Außenrand ( $r_s = r_i$ , Abb. 636),  $Q_{rz,a} = 0$ ,  $C = \mathfrak{F}$ .  
 Freier Innenrand ( $r_s = r_a$ , Abb. 636),  $Q_{rz,i} = 0$ ,  $C = 0$ .  
 Freier Innen- und Außenrand ( $r_i < r_s < r_a$ ),  $Q_{rz,i} = 0$ ,  $C = 0$ .  
 In diesem Falle ist die Querkraft in  $r = r_s$  unstetig, die Lösung der Gl. (961) daher für zwei Bereiche anzuschreiben. Nach Division mit  $v_1$  lautet die Gl. (961)

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} \right) \bar{\varphi} = \frac{1}{r v_1} \left[ \int_{r_i}^r p r dr + C \right]. \quad (963)$$

Sie läßt sich leicht angenähert berechnen, wenn die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Hierbei ist die Unstetigkeit der Querkraft bei einer Stützung nach Abb. 636 ohne Bedeutung für die Lösung. Die bekannten Vorzeichen der Gleichung werden durch einzelne Buchstaben abgekürzt. Es ist

$$\frac{1}{r} + \frac{v_2}{v_1} = a, \quad \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r} \frac{v_2}{v_1} = b, \quad \frac{1}{v_1 r} \left( \int_{r_i}^r p r dr + C \right) = K. \quad (964)$$

Der Integrationsbereich ( $r_a - r_i$ ) zerfällt in  $n$  Stufen von konstanter Breite  $s$  mit den Intervallgrenzen  $0, \dots, m, \dots, n$ . Die Bedingung für die Formänderung der



Platte am Punkte  $m$  kann also in Verbindung mit den Bemerkungen auf S. 129 folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & + \Delta^2 \bar{\varphi}_m + s a_m \Delta \bar{\varphi}_m - s^2 b_m \bar{\varphi}_m = K_m s^2, \\
 - \bar{\varphi}_{m-1} \left(1 - \frac{s a_m}{2}\right) + \bar{\varphi}_m (2 + s^2 b_m) - \bar{\varphi}_{m+1} \left(1 + \frac{s a_m}{2}\right) &= -K_m s^2, \quad (965) \\
 & m = 0 \dots n.
 \end{aligned}$$

Der Ansatz enthält  $(n + 3)$  unbekannte Wurzeln  $\varphi_m$  in  $(n + 1)$  linearen Gleichungen, die daher noch durch die Randbedingungen für  $r = r_i$  und  $r = r_a$  ergänzt werden müssen. Bei freien oder frei aufliegenden Rändern ist  $M_i = 0$ ,  $M_a = 0$ , bei eingespannten Rändern  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_a = 0$ , bei der Kreisplatte außerdem  $\varphi_i = 0$ . Der Kern der Matrix enthält in jeder Zeile 3 unbekannte Wurzeln, die daher nach Abschn. 29 oder durch Iteration nach Abschn. 30 berechnet werden.

Die Schnittkräfte sind

$$\left. \begin{aligned}
 M_r &= -\frac{N}{N_0} \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{v_{1,m}}{2s} \left( \bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s\mu}{r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 M_\alpha &= -\frac{N}{N_0} \left( \mu \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{1}{r} \bar{\varphi} \right) \rightarrow -\frac{\mu v_{1,m}}{2s} \left( \bar{\varphi}_{m+1} + \frac{2s}{\mu r_m} \bar{\varphi}_m - \bar{\varphi}_{m-1} \right), \\
 Q_r &= -\frac{N}{N_0} \left( \frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \bar{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \right) + \frac{dN}{N_0 dr} \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\mu}{r} \bar{\varphi} \right) \\
 &\rightarrow -\frac{v_{1,m}}{s^2} \left[ \left(1 + \frac{s}{2r_m} - \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m+1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(2 + \frac{s^2}{r_m^2} + \mu \frac{s^2}{r_m} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{s}{2r_m} + \frac{s}{2} \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}}\right) \varphi_{m-1} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (966)$$

Die Verformung der Platte folgt aus  $d w / dr = \bar{\varphi} / N_0$  zu

$$w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \frac{\bar{\varphi}_m}{N_0} s. \quad (967)$$

**Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein.**

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 637.

$$h_0 = h_6 = 2,2 \text{ m}, \quad h_{10} = 1,5 \text{ m}.$$

Intervallbreite  $s = r_a / 10 = 0,9 \text{ m}$ . Im schrägen Teil der Platte ist

$$h_m = h_6 - (h_6 - h_{10}) \frac{m-6}{n-6} = 2,2 - 0,175(m-6),$$

$$n = 10, \quad m = 6 \div 10.$$

$$\mu = \frac{1}{6}, \quad N_0 = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 \cdot (1 - 0,028)} = 1918000 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Ringförmige Belastung  $P$  nach Abb. 637 a. Der Bodendruck  $\bar{p} = P / r_a^2 \pi$  wird gleichmäßig verteilt angenommen.

3. Vorzahlen der Differenzgleichungen (965) nach (964)

$$v_1 = \frac{h^3}{h_0^3}, \quad v_2 = \frac{1}{h_0^3} \frac{d}{dr} (h^3) = \frac{3 h^2}{h_0^3} \frac{1}{s} \frac{d}{dm} (h), \quad (\text{Abb. 637 b})$$

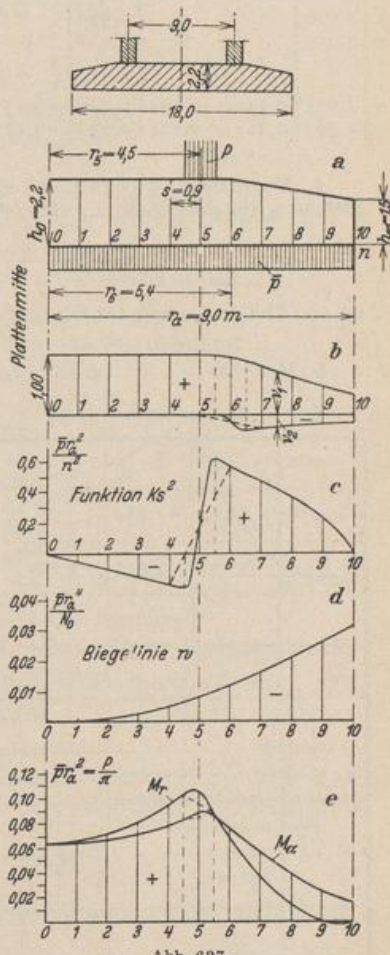


Abb. 637.



$$0 \leq m \leq 6: \quad v_{1,m} = 1, \quad v_{2,m} = 0,$$

$$6 \leq m \leq 10: \quad v_{1,m} = \frac{h_m^3}{10,65}, \quad v_{2,m} = -0,0548 \frac{h_m^2}{n^2}.$$

$$\frac{s a_m}{2} = \frac{1}{2m} + 0,45 \frac{v_2}{v_1},$$

$$s^2 b_m = \frac{1}{m^2} - \frac{0,15}{m} \frac{v_2}{v_1}.$$

Für freien Innenrand ( $r_i = 0$ ) ist nach S. 664  $C = 0$  und daher nach (964)

$$K s^2 = \frac{s^2}{r_1 r} \int_0^r p r dr.$$

$$0 \leq m \leq 5: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{m}{2 v_1 n^3}, \quad 5 \leq m \leq 10: \quad K_m s^2 = -\bar{p} r_a^3 \frac{1}{2 v_1 n^3} \left( m - \frac{n^2}{m} \right).$$

An den Unstetigkeitsstellen  $m = 5$  und  $6$  werden die Funktionswerte  $v_1, v_2, K_m$  nach Abb. 637 c festgesetzt.

$m$	$h$	$v_{1,m}$	$v_{2,m}$	$\frac{1}{2m}$	$0,45 \frac{v_2}{v_1}$	$\frac{s a_m}{2}$	$\frac{1}{m^2}$	$0,15 \frac{v_2}{m v_1}$	$s^2 b_m$	$\frac{m}{2 v_1 n}$	$\frac{n}{2 v_1 m}$	$K_m s^2$
1	2,200	1	0	0,500	0	0,500	1	0	1	0,050	—	$-0,050 \cdot \bar{p} r_a^3 / n^2$
2	2,200	1	0	0,250	0	0,250	0,250	0	0,250	0,100	—	$-0,100 \quad "$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1,675	0,441	-0,154	0,056	-0,157	-0,213	0,012	-0,006	0,018	1,022	1,261	$-0,239 \quad "$
10	1,500	0,317	-0,124	0,050	-0,175	-0,225	0,010	-0,006	0,016	1,579	1,579	0

4. Randbedingungen. In Plattenmitte ist  $\varphi_0 = 0$ , daher wird die erste Differenzgleichung für den Punkt 1 aufgestellt. Bei  $m = 10$  ist  $M_{10} = 0$ , so daß nach (966)

$$\bar{\varphi}_{11} + \frac{2s\mu}{r_{10}} \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = \bar{\varphi}_{11} + 0,0333 \bar{\varphi}_{10} - \bar{\varphi}_9 = 0$$

ist und 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten  $\bar{\varphi}_m, m = 1 \dots 11$  zur Verfügung stehen.

5. Matrix der Differenzgleichungen (965) nach Elimination von  $\varphi_{11}$ .

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$	$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$
3,000	-1,500									0,050
-0,750	2,250	-1,250								0,100
	-0,833	2,111	-1,167							0,150
		-0,875	2,063	-1,125						0,200
			-0,900	2,040	-1,100					-0,167
				-1,134	2,031	-0,866				-0,561
					-1,201	2,027	-0,799			-0,466
						-1,204	2,022	-0,796		-0,367
							-1,213	2,018	-0,787	-0,239
								-2,000	2,042	0



Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert

$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$	$\bar{\varphi}_3$	$\bar{\varphi}_4$	$\bar{\varphi}_5$	$\bar{\varphi}_6$	$\bar{\varphi}_7$
-0,54941	-1,13216	-1,78824	-2,55517	-3,47254	-4,19757	-4,64943
			$\bar{\varphi}_8$	$\bar{\varphi}_9$	$\bar{\varphi}_{10}$	$\bar{\varphi}_{11}$
			-4,90251	-4,95976	-4,85775	-4,79800
						$\frac{\bar{p} r_a^3}{n^2}$

6. Die Verformung der Platte. Nach (967) ist für die Zwischenpunkte  $w_{m+0,5} = w_{m-0,5} + \bar{\varphi}_m s/N_0$ . Die Verformung wird mit  $w_{0,5} = 0$  auf den Plattenmittelpunkt bezogen, so daß mit

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^* \bar{p} r_a^3 / n^2; \quad w_{m+0,5} = \frac{\bar{p} r_a^4}{n^3 N_0} \sum \bar{\varphi}^*. \quad \text{Abb. 637 d.}$$

$w_{0,5}$	$w_{1,5}$	$w_{2,5}$	$w_{3,5}$	$w_{4,5}$	$w_{5,5}$	$w_{6,5}$	$w_{7,5}$	$w_{8,5}$	$w_{9,5}$	$w_{10,5}$	
0	-0,5494	-1,6816	-3,4698	-6,0250	-9,4975	-13,6951	-18,3445	-23,2470	-28,2008	-33,0645	$\frac{\bar{p} r_a^4}{1000 N_0}$

7. Die Schnittkräfte. Mit  $r_m/s = m$  und  $r_a/s = n$  wird aus (966)

$$M_{r,m} = -\frac{r_{1,m}}{2n} \left( \bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{1}{3m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2,$$

$$M_{\alpha,m} = -\frac{r_{1,m}}{12n} \left( \bar{\varphi}_{m+1}^* + \frac{12}{m} \bar{\varphi}_m^* - \bar{\varphi}_{m-1}^* \right) \bar{p} r_a^2.$$

In Plattenmitte ist  $\bar{\varphi}_0 = 0$ ,  $\left(\frac{\bar{\varphi}_m}{m}\right)_{m \rightarrow 0} \approx \bar{\varphi}_1$ ,  $\bar{\varphi}_{-1} = -\bar{\varphi}_1$ .

Z. B. ist

$$M_{r,0} = -\frac{1}{20} \left( -0,54941 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 - 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0641 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,1} = -\frac{1}{20} \left( -1,13216 - \frac{1}{3} \cdot 0,54941 + 0 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0658 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

$$M_{r,2} = -\frac{1}{20} \left( -1,78824 - \frac{1}{6} \cdot 1,13216 + 0,54941 \right) \bar{p} r_a^2 = 0,0714 \bar{p} r_a^2 \text{ mt.}$$

Die Momente sind in Abb. 637e dargestellt. Positive Momente erzeugen auf der Plattenunterseite Zugspannungen. Im Lastbereich wird die Momentenlinie parabelförmig ergänzt.

Um ein Urteil über die Genauigkeit der Differenzmethode zu bekommen, sind die Momente  $M_r$  der Gründungsplatte mit gleichbleibender Dicke  $h = 2,2$  m für eine Intervallteilung  $n = 6$  und  $n = 10$  berechnet und in Abb. 638 mit den Werten der exakten Berechnung ( $n = \infty$ ) nach Tabelle 63 verglichen worden.

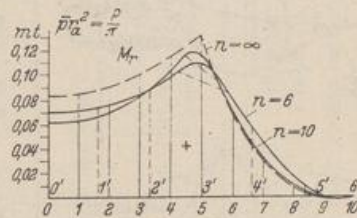


Abb. 638.

**Kreisplatte mit gleichbleibender Dicke auf elastischer Bettung.** Die äußeren Kräfte bestehen aus der Auflast  $\bar{p}(r)$  und dem Bodendruck  $\bar{\phi}(r)$ , der nach den Angaben auf S. 17 proportional zur Einsenkung  $w$  der Platte gesetzt werden soll ( $\bar{\phi} = cw$ ). Daher besteht zwischen dem Verschiebungszustand  $w$  und den äußeren Kräften nach (948) folgende Differentialbeziehung:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{N} w = \frac{\bar{p}}{N}. \quad (968)$$

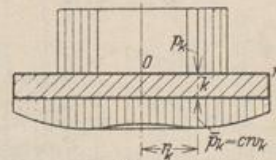


Abb. 639.

Sie besitzt auch Bedeutung für  $\bar{p} = 0$ , um den Verschiebungszustand  $w$  für vorgeschriebene Randkräfte  $M_{r=r_n}$ ,  $Q_{r=r_n}$  anzugeben.



Um den geometrischen Zusammenhang in einfacher Weise zu klären, werden die Differentialquotienten hier ebenfalls durch Differenzenquotienten ersetzt. Dabei zerfällt der Integrationsbereich wiederum in  $n$  Stufen mit der konstanten Breite  $s$ . Für den Punkt  $k$  mit  $r = r_k$ ,  $s/r_k = \lambda_k$  und  $p = p_k$  entsteht folgende Gleichung  $k$  ( $k = 0, \dots, n$ ),

$$(1 - \lambda_k)w_{k-2} - \left[2(2 - \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 + \lambda_k)\right]w_{k-1} + \left[6 + 2\lambda_k^2 + \frac{c s^4}{N}\right]w_k - \left[2(2 + \lambda_k) + \frac{\lambda_k^2}{2}(2 - \lambda_k)\right]w_{k+1} + (1 + \lambda_k)w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N}. \quad (969)$$

Die Wurzeln  $w_k$  des Ansatzes werden entweder mit dem Gaußschen Algorithmus nach S. 216 ff. oder durch Iteration einer Anfangslösung nach Abschn. 30 berechnet. Die fehlenden Gleichungen liefern die Randbedingungen. Die Schnittkräfte sind dann aus den Verschiebungen  $w_k$  folgendermaßen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} M_{r,k} &= -\frac{N}{s^2} (\Delta^2 w_k + \mu \frac{s}{r_k} \Delta w_k) = -\frac{N}{s^2} \left[ w_{k+1} \left(1 + \frac{\mu s}{2 r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{\mu s}{2 r_k}\right) \right], \\ M_{\alpha,k} &= -\frac{N \mu}{s^2} (\Delta^2 w_k + \frac{s}{\mu r_k} \Delta w_k) = -\frac{N \mu}{s^2} \left[ w_{k+1} \left(1 + \frac{s}{2 \mu r_k}\right) - 2 w_k + w_{k-1} \left(1 - \frac{s}{2 \mu r_k}\right) \right], \\ Q_{rz,k} &= -\frac{N}{s^3} (\Delta^3 w_k + \frac{s}{r_k} \Delta^2 w_k - \frac{s^2}{r_k^2} \Delta w_k) \\ &= -\frac{N}{2 s^3} [w_{k+2} - w_{k+1} (2 - 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - 4 \lambda_k w_k + w_{k-1} (2 + 2 \lambda_k + \lambda_k^2) - w_{k-2}]. \end{aligned} \right\} (970)$$

**Berechnung der Gründungsplatte für einen Schornstein unter Berücksichtigung der elastischen Bettung.**

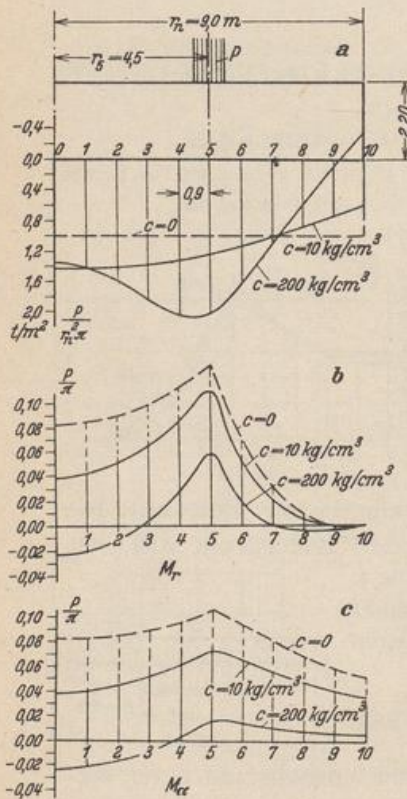


Abb. 640.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 640. Mit  $\mu = 1/6$ ,  $E = 2100000 \text{ t/m}^2$  ist nach S. 645

$$N = \frac{2100000 \cdot 2,2^3}{12 (1 - 0,0278)} = 1916684 \text{ tm}^2/\text{m}.$$

2. Belastung. Die senkrechte Belastung  $P$  durch den Schornstein verteilt sich auf einen Ring von der Breite  $s$  und dem mittleren Radius  $r_3 = 4,5 \text{ m}$ . Der Bodendruck wird nach S. 17 mit  $\bar{p} = cw$  angenommen. Der Leitwert  $c$  liegt zwischen  $10$  und  $200 \text{ kg/cm}^3$ , so daß die Rechnung für beide Grenzwerte durchgeführt wird.

3. Die Randbedingungen. Am Rand  $r = r_{10}$  ist  $M_{r,10} = 0$ ,  $Q_{rz,10} = 0$ ; daher nach (970) mit  $s = 0,9$ ,  $r_{10} = 9,0$ ,  $\lambda_{10} = 0,1$

$$1,0083 w_{11} - 2 w_{10} + 0,9917 w_9 = 0,$$

$$w_{12} - 1,81 w_{11} - 0,40 w_{10} + 2,21 w_9 - w_8 = 0.$$

In Plattenmitte ist aus Symmetriegründen  $w_{-1} = w_1$ ,  $w_{-2} = w_2$ . Die Glieder der Differentialgleichung (968) werden für den Plattenmittelpunkt mit  $r = 0$  unbestimmt, so daß sich die erste Differenzgleichung (969) für  $k = 0$  erst nach einem Grenzübergang anschreiben läßt. Nach der Taylorentwicklung ist in der Umgebung des Mittelpunktes

$$w = w(0) + \frac{w''(0)}{2!} r^2 + \frac{w^{IV}(0)}{4!} r^4 + \dots,$$

$$w' = w'(0) r + \frac{w^{IV}(0)}{3!} r^3 + \dots,$$

$$w'' = w''(0) + \frac{w^{IV}(0)}{2!} r^2 + \dots, \quad w''' = w^{IV}(0) r + \dots,$$

$$w^{IV} = w^{IV}(0) + \dots$$



	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
	16,005 217	-21,333 333	5,333 333									0
	-3,50000	8,003 423	-6,500 000	2,000 000								0
	0,500 000	-3,312 500	6,503 423	-5,187 500	1,500 000							0
		0,666 667	-3,462 964	6,225 645	-4,759 260	1,333 333						0
			0,750 000	-3,570 313	6,128 423	-4,554 688	1,250 000					0
				0,800 000	-3,644 000	6,083 423	-4,436 000	1,200 000				1
					0,833 333	-3,696 759	6,058 979	-4,358 797	1,166 667			0
						0,857 143	-3,736 152	6,044 239	-4,304 664	1,142 857		0
							0,875 000	-3,766 602	6,034 673	-4,264 648	1,125 000	0
								0,888 889	-3,790 812	4,935 368	-2,030 024	0
									2,000 000	-4,059 658	2,063 071	0

6. Die Auflösung nach Abschn. 29 liefert:

$k$	Für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$w$	41,721 844	41,557 311	41,022 914	40,937 339	38,467 969	36,132 603	32,802 740	29,042 026	25,160 666	21,311 919	17,545 764	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,4282	1,4225	1,4043	1,3705	1,3168	1,2369	1,1229	0,9941	0,8613	0,7295	0,6006	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Für  $c = 200 \text{ kg/cm}^3$

$w$	1,961 285	2,061 615	2,324 233	2,668 974	2,951 416	2,948 407	2,348 391	1,590 896	0,851 008	0,166 964	-0,481 272	$\frac{P r_m^2}{1000 \pi N}$
$\bar{p} = c w$	1,3427	1,4114	1,5912	1,8272	2,0206	2,0185	1,6078	1,0892	0,5826	0,1143	-0,3295	$\frac{P}{r_m^2 \pi}$

Die Zahlenrechnung ist wegen ihrer Fehlerempfindlichkeit mit 6 Stellen durchgeführt worden.  
Der Bodendruck  $\bar{p}$  ist in Abb. 640a dargestellt.



Daher lautet die Differentialgleichung (968) für den Plattenmittelpunkt  $r = 0$

$$w^{IV}(0) + 2w^{IV}(0) - \frac{w^{IV}(0)}{2!} + \frac{w^{IV}(0)}{3!} + \frac{c}{N} w(0) = 0,$$

$$\frac{8}{3} w^{IV}(0) + \frac{c}{N} w(0) = 0,$$

oder in Differenzen ausgedrückt

$$\left(16 + \frac{cs^4}{N}\right) w_0 - \frac{64}{3} w_1 + \frac{16}{3} w_2 = 0.$$

4. Die Vorzahlen der Differenzgleichungen (969).

$k$	$\lambda_k$	$1 - \lambda_k$	$1 + \lambda_k$	$2 - \lambda_k$	$2 + \lambda_k$	$\lambda_k^2$	$[ ]_{k-1}$	$[ ]_{k+1}$	$6 + 2\lambda_k^2$
1	1	0	2	1	3	1	3,5	6,5	8
2	0,500	0,500	1,500	1,500	2,500	0,250	3,312500	5,187500	6,5
3	0,333	0,666	1,333	1,666	2,333	0,111	3,462964	4,759260	6,222
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\frac{cs^4}{N} = \frac{10000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,003432 \quad \text{oder} \quad \frac{200000 \cdot 0,9^4}{1916684} = 0,068462.$$

Mit  $p = \frac{P}{2r_s \cdot \pi \cdot s} = \frac{10P}{\pi r_s^2}$  wird für  $k = 5$  das Absolutglied  $\frac{p_5 s^4}{N} = \frac{P r_s^2}{1000 \pi N}$ , die übrigen sind Null.

5. Matrix der Differenzgleichungen (969) für  $c = 10 \text{ kg/cm}^3$ . (Die Matrix für  $c = 200 \text{ kg/cm}^3$  ergibt sich durch Addition von 0,065039 zu den Hauptgliedern.) Die Wurzeln  $w_{11}$  und  $w_{12}$  sind bereits durch die Randbedingungen eliminiert. Matrix und Auflösung s. S. 669.

7. Die Schnittkräfte. Für  $r = 0$  ist

$$M_{r,0} = M_{\alpha,0} = -N(1 + \mu) \frac{d^2 w}{dr^2} = -N(1 + \mu) \frac{2}{s^2} (w_1 - w_0) = +0,0384 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,0234 \frac{P}{\pi}\right).$$

Mit  $\frac{\mu s}{2r_k} = \frac{1}{12k}$ ,  $\frac{s}{2\mu r_k} = \frac{3}{k}$  ist nach (970) z. B.

$$M_{r,1} = -\frac{N}{s^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot 0 - 2w_1 + \left(1 + \frac{1}{12}\right) w_2 \right] = 0,043 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,019 \frac{P}{\pi}\right),$$

$$M_{r,2} = -\frac{N}{s^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{24}\right) w_1 - 2w_2 + \left(1 + \frac{1}{24}\right) w_3 \right] = 0,051 \frac{P}{\pi}, \quad \left(-0,011 \frac{P}{\pi}\right).$$

Die eingeklammerten Werte gelten für  $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ .

Die Schnittkräfte sind in Abb. 640b, c dargestellt.

Melan, E.: Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte. Eisenbau Bd. 11 (1920) S. 190. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Schleicher, F.: Kreisplatten auf elastischer Grundlage. Berlin 1926. — Crämer, H.: Die Beanspruchung von Kreisplatten mit veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1928 S. 382. — Flügge, W.: Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. Berlin 1928. — Pichler, O.: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Berlin 1928. — Haynal-Konyi: Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken bei zentralsymmetrischer Belastung. Berlin 1929. — Schmidt, H.: Ein Beitrag zur Theorie der Biegung homogener Kreisplatten. Ing.-Arch. 1930 S. 147.

69. Die Kreisplatte und die Kreisringplatte unter antimetrischer Belastung.

Die antimetrische Belastung ist graphisch durch Abb. 641, analytisch durch

$$p = p_0 \frac{r \cos \alpha}{a} \quad \text{und mit} \quad \frac{r}{a} = \varrho \quad \text{durch} \quad p = p_0 \varrho \cos \alpha \quad (971)$$

beschrieben. Sie kann als der antimetrische Teil der hydraulischen Belastung einer senkrecht oder schräg eingebauten Kreisplatte oder als der antimetrische Teil des



Bodendruckes  $\bar{p}$  eines Kreisplattenfundamentes angesehen werden, dessen Steifigkeit die Annahme des Gradliniengesetzes für  $\bar{p}$  rechtfertigt. Die Ordinaten der Biegefläche sind in diesem Falle von dem Winkel  $\alpha$  abhängig, so daß sich die Beziehungen zwischen Belastung, Formänderung und Beanspruchung der Platte nur durch den allgemeinen Ansatz auf S. 647 beschreiben lassen.

Die Lösung der Differentialgleichung (935) besteht aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung und aus vier mit den Integrationskonstanten  $C_1, \dots, C_4$  erweiterten Lösungen der homogenen Gleichung. Sie läßt sich daher in der folgenden Form anschreiben:

$$w = C(\varrho^5 + C_1\varrho^3 + C_2\varrho + C_3\varrho \ln \varrho + C_4\varrho^{-1}) \cos \alpha, \quad (972)$$

denn

$$A \Delta w = \frac{192}{a^4} C \varrho \cos \alpha = \frac{p_0 \varrho \cos \alpha}{N}, \quad \text{wenn } C = \frac{p_0 a^4}{192 N}. \quad (973)$$

Die Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen der Aufgabe bestimmt. Die Lösung vereinfacht sich für Kreisplatten, da  $C_3$  und  $C_4$  Null sein müssen, damit die Ausbiegung  $w$  für  $\varrho = 0$  endlich bleibt. Sie lautet in diesem Falle nach S. 650 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} w &= \frac{p_0 a^4}{192 N} (\varrho^5 + C_1 \varrho^3 + C_2 \varrho) \cos \alpha, & \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{p_0 a^3}{192 N} (5 \varrho^4 + 3 C_1 \varrho^2 + C_2) \cos \alpha, \\ M_r &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(5 + \mu) \varrho^3 + 2(3 + \mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_\alpha &= -\frac{p_0 a^2}{192} [4(1 + 5\mu) \varrho^3 + 2(1 + 3\mu) C_1 \varrho] \cos \alpha, \\ M_{rz} &= \frac{p_0 a^2}{192} (1 - \nu) (4 \varrho^3 + 2 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ Q_r &= -\frac{p_0 a}{96} (36 \varrho^2 + 4 C_1) \cos \alpha, & Q_\alpha &= \frac{p_0 a}{96} (12 \varrho^3 + 4 C_1 \varrho) \sin \alpha, \\ A_r &= \frac{p_0 a}{192} [4(17 + \nu) \varrho^2 + 2(3 + \nu) C_1] \cos \alpha. \end{aligned} \quad (974)$$

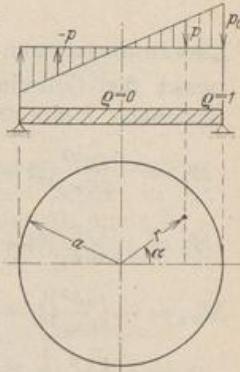


Abb. 641.

Freie Auflagerung am Rande  $\varrho = 1$ :  $w = 0, M_r = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 4(5 + \mu) + 2(3 + \mu) C_1 &= 0, \\ C_1 &= -2 \frac{5 + \mu}{3 + \mu}, & C_2 &= \frac{7 + \mu}{3 + \mu}. \end{aligned} \right\} \quad (975)$$

Einspannung am Rande  $\varrho = 1$ :  $w = 0, \partial w / \partial r = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 &= 0, & 5 + 3 C_1 + C_2 &= 0. \\ C_1 &= -2, & C_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (976)$$

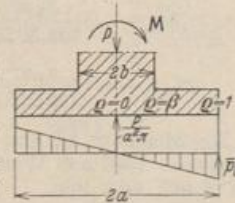


Abb. 642.

Bei einer Kreisringplatte sind die Integrationskonstanten  $C_3$  und  $C_4$  der allgemeinen Lösung von Null verschieden und durch die Randbedingungen  $M_r = 0, A_r = 0$  am freien Rande bestimmt. Bei einer Gründungsplatte, die sich aus einer Kreisringplatte und einem starren Kern zusammensetzt (Abb. 642), genügen 3 Randbedingungen. Für  $\varrho = 1$  sind  $M_r$  und  $A_r$  Null, während die Verdrehung der Elemente an der inneren Begrenzung der Ringplatte ( $r = b, \varrho = b/a = \beta$ ) durch die Verdrehung des starren Kerns vorgeschrieben ist.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{d\varrho} = \frac{w}{\beta}. \quad (977)$$



Aus diesen drei Bedingungsgleichungen wird mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} (3 + \mu) + (1 - \mu) \beta^4 &= \kappa_1, & 4(2 + \mu) + (1 - \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_2, \\ 4(2 + \mu) \beta^4 - (3 + \mu)(3 + \beta^4) \beta^2 &= \kappa_3, \\ C_1 &= -2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, & C_3 &= 12, & C_4 &= -2 \frac{\kappa_3}{\kappa_1}. \end{aligned} \right\} (978)$$

Liefere die äußeren Kräfte an dem Tragwerk ein Moment  $M$  in bezug auf den Mittelpunkt der Gründungsplatte, so ist  $\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3$  (Abb. 642). Das Ergebnis der Rechnung lautet dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (5 + \mu) \kappa_1 \varrho^3 - (3 + \mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} - (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_\alpha &= \frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} \{ (1 + 5\mu) \kappa_1 \varrho^3 - (1 + 3\mu) \kappa_2 \varrho + 3(1 + \mu) \kappa_1 \varrho^{-1} + (1 - \mu) \kappa_3 \varrho^{-3} \} \cos \alpha, \\ M_{r,\alpha} &= -\frac{\bar{p}_0 a^2}{48 \kappa_1} (1 - \mu) \{ \kappa_1 \varrho^3 - \kappa_3 \varrho + 3 \kappa_1 \varrho^{-1} + \kappa_3 \varrho^{-3} \} \sin \alpha, \\ Q_r &= \frac{\bar{p}_0 a}{24} (9 \varrho^2 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 3 \varrho^{-2}) \cos \alpha, \\ Q_\alpha &= -\frac{\bar{p}_0 a}{24} (3 \varrho^3 - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \varrho + 3 \varrho^{-1}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (979)$$

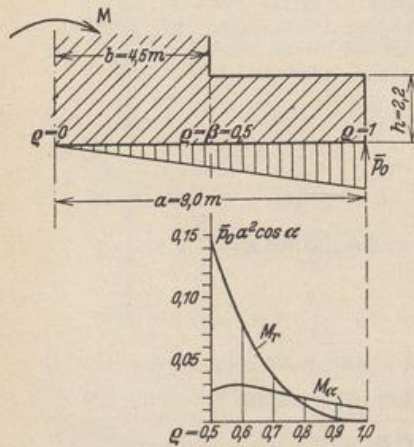


Abb. 643.

#### Berechnung der Gründungsplatte eines Schornsteins für antimetrische Belastung.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen der Platte nach Abb. 643. Der mittlere Teil, auf dem der Schornstein aufsitzt, wird als starr angenommen.

2. Belastung. Die Belastung besteht aus dem Moment  $M$  infolge Winddruck auf den Schornstein. Der Bodendruck wird geradlinig und antimetrisch angesetzt

$$\bar{p}_0 = 4M/\pi a^3.$$

3. Die Schnittkräfte. Nach (978) ist mit

$$\mu = 1/6: \quad \kappa_1 = 3,2188, \quad \kappa_2 = 9,3048, \quad \kappa_3 = -1,8827.$$

Damit wird nach (979)

$$M_r = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (16,6306 \varrho^3 - 29,4655 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} + 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_\alpha = \frac{\bar{p}_0 a^2}{154,5024} (5,9010 \varrho^3 - 13,9572 \varrho + 11,2661 \varrho^{-1} - 1,5689 \varrho^{-3}) \cos \alpha,$$

$$M_{r,\alpha} = -\frac{\bar{p}_0 a^2}{178,2651} (3,2188 \varrho^3 + 1,8827 \varrho + 9,6564 \varrho^{-1} - 1,8827 \varrho^{-3}) \sin \alpha.$$

Die Momente  $M_r$  und  $M_\alpha$  sind in Abb. 643 dargestellt. Das vollständige Kräftebild infolge zentrischer Last und Winddruck ergibt sich nach Abb. 642 durch Superposition der Ergebnisse von S. 665 oder 668.

Flügge, W.: Kreisplatten mit linear veränderlichen Belastungen. Bauing. 1929 S. 221.

## 70. Die rechteckige Platte.

Die Platte mit rechteckiger Begrenzung wird im Bauwesen selten einzeln, sondern in der Regel als Teil zusammenhängender Konstruktionen verwendet. Die Ränder der einfachen Platte sind entweder kräftefrei, eingespannt oder frei drehbar



aufgelagert, so daß Zug- und Druckkräfte auf den Unterbau übertragen werden (Abb. 644). Die Oberfläche erhält in der Regel gleichförmige Belastung, bei Verwendung der Platten im Behälterbau auch hydrostatische Belastung.

Die Biegesteifigkeit der Platte ist bei homogenem und isotropem Baustoff in jeder Richtung die gleiche. Die Beziehungen auf S. 646 zwischen der vorgeschrie-

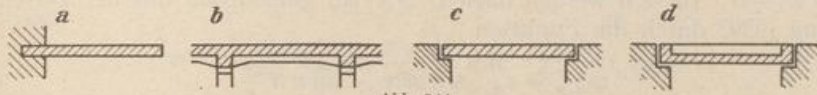


Abb. 644.

benen Belastung  $p(x,y)$  und den Ordinaten  $w(x,y)$  der ausgebogenen Mittelebene lassen sich jedoch auch auf Platten mit verschiedener Biegesteifigkeit in der Längs- und Querrichtung erweitern. Der Nachweis der Formänderung von Eisenbetonplatten oberhalb der Reißlast im Sinne des Stadiums II der Festigkeit ist ausgeschlossen.

Die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes besteht bei homogenem und isotropem Baustoff und den Annahmen auf S. 644 in der Integration der partiellen Differentialgleichung (929) für vorgeschriebene Randbedingungen an den Kanten  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$  (Abb. 645). Das Ergebnis kann in der Regel nur als Reihenentwicklung angegeben werden, deren Brauchbarkeit für die Zahlenrechnung nicht allein von der Konvergenz der Reihe  $w(x,y)$  selbst, sondern auch von der Konvergenz ihrer Ableitungen abhängt. Damit scheidet Näherungslösungen aus, welche nur die Durchbiegung, aber nicht die Krümmung der elastischen Fläche ausreichend beschreiben. Brauchbare Lösungen sind von L. Navier, A. Nadai, H. Hencky und einigen französischen Mathematikern angegeben worden. Sie bestehen entweder aus Gliedern  $w_h(x,y), h = 1, \dots, \infty$ , welche die Differentialgleichung (929) und die Randbedingungen für den Anteil  $p_h(x,y)$  der vorgeschriebenen Belastung  $p = \sum p_h, h = 1, \dots, \infty$  erfüllen oder aus einer partikulären Lösung  $w^*$  der inhomogenen Gleichung, welche die Randbedingungen nur teilweise befriedigt und in einer Lösung  $w^{**}$  der homogenen Gleichung  $\Delta \Delta w^{**} = 0$ , die mit  $w^*$  überlagert, das gesuchte Ergebnis darstellt.

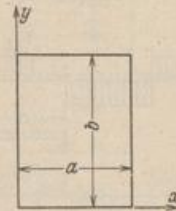


Abb. 645.

**Der Plattenstreifen unter einer Belastung  $p(x)$ .** Der Plattenstreifen ist in den Kanten  $x = 0$  und  $x = a$  gestützt (Abb. 646). Die Ableitungen der Durchbiegung  $w$  nach  $y$  sind Null, so daß aus (929) folgende Beziehung entsteht.

$$d^4 w / d x^4 = p(x) / N. \tag{980}$$

Die Lösung kann nach Abschn. 20 für die frei drehbare Auflagerung des Streifens unmittelbar angeschrieben werden.

a) Gleichförmige Belastung

$$w = \frac{p a^4}{24 N} \left( \frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right). \tag{981}$$

b) Hydrostatische Belastung (Abb. 646)

$$w = \frac{p_0 a^4}{360 N} \left( 7 \frac{x}{a} - 10 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x^5}{a^5} \right). \tag{982}$$



Abb. 646.

**Die rechteckige Platte mit frei drehbarer Auflagerung der Kanten.** Die Platte ist in den Punkten  $y \neq 0, x = 0$  oder  $x = a$  und  $x \neq 0, y = 0$  oder  $y = b$  gestützt. Die Durchbiegung  $w$  und ihre Ableitung  $\Delta w$  sind hier nach S. 647 Null. Die Biegemomente verschwinden an den Rändern, die Krümmung ist hier nach zwei winkelrechten Richtungen Null. Die Tangentialebene fällt also in den Ecken mit



der ursprünglichen Mittelebene zusammen. Die elastische Fläche zeigt daher von den Ecken ausgehende Grate, in denen die Krümmung und daher auch die Biegemomente groß sind. Die größten Auflagerkräfte  $A_{x_2}$ ,  $A_{y_2}$  in Kantenmitte sind bei gleichmäßiger Belastung vom Seitenverhältnis  $a/b$  der Platte nahezu unabhängig ( $0,42pa$  bis  $0,5pa$ ,  $a$  die kleinere Rechteckseite). Die Randbedingungen  $w = 0$ ,  $\Delta w = 0$  werden nach L. Navier gemeinsam mit der Differentialgleichung (929) durch die Funktion

$$w_{m,n} = c_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (983)$$

für die Belastung

$$p(x,y)_{m,n} = N c_{m,n} \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \quad (984)$$

erfüllt, wie sich an Hand der Gleichung (929) nachweisen läßt. Da nun jede Belastung  $p(x,y)$  über die Kanten der Platte hinaus nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt werden kann (Abb. 647), ohne die Randbedingungen  $w = 0$ ,  $\Delta w = 0$  zu verletzen, so kann sie nach Fourier in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

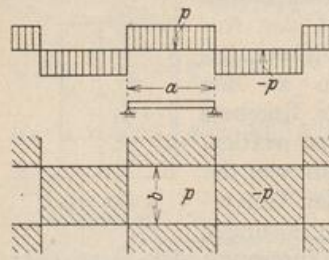


Abb. 647.

$$p(x,y) = \sum \sum a_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (985)$$

Die Koeffizienten sind nach bekannten mathematischen Regeln

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x,y) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} dx dy. \quad (986)$$

Daher ist bei gleichförmiger Belastung  $p$  der ganzen Platte

$$a_{m,n} = \frac{16 p_0}{m n \pi^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots). \quad (987)$$

Die gliedweise Gegenüberstellung von (984) mit (985) liefert  $c_{m,n}$  und damit

$$w = \frac{16 p_0}{N \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{m n \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (988)$$

In dieser Reihe wird zuerst  $m = 1$  und  $n = 1, 3, 5$  usw., darauf  $m = 3$  und  $n = 1, 3, 5$  usw. eingesetzt, so daß die Buchstaben  $m$  und  $n$  der Reihe nach alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Leider konvergiert die Reihe  $\sum w_{m,n}$  mit ihren Ableitungen nur bei gleichförmiger Belastung  $p$  der Oberfläche schnell genug, um darnach numerisch zu rechnen. Sie ist neuerdings von V. Lewe zur Untersuchung von Pilzdecken verwendet worden, indem die äußeren an der Platte angreifenden Kräfte aus der Auflast und der über die Fläche des Pilzkopfes gleichmäßig verteilten Stützkraft ähnlich wie nach (988) in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt werden.

Um Lösungen zu erhalten, welche die Differentialgleichung (929) für eine vorgeschriebene Belastung  $p(x)$  streng erfüllen und nur aus einfachen und besser konvergierenden Reihen bestehen, addiert A. Nadai zur Durchbiegung  $w^*$  des Plattenstreifens mit den Randbedingungen der Platte für  $x = 0$  und  $x = a$  die Durchbiegung  $w^{**}$  einer Platte mit Randkräften, welche die homogene Gleichung  $\Delta \Delta w^{**} = 0$  erfüllt und gemeinsam mit  $w^*$  die für  $w$  vorgeschriebenen Randbedingungen an allen vier Kanten befriedigt.



Bei gleichförmiger Belastung  $p$  und frei drehbarer Stützung in  $x = 0, x = a$  ist nach (981)

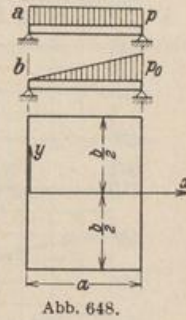
$$w^* = \frac{p a^4}{24 N} \left( \frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (989)$$

Der Ansatz

$$w^{**} = \sum Y_n \sin \frac{n \pi x}{a} \quad \text{mit} \quad Y_n = f_n(y) \quad (990)$$

erfüllt die Randbedingungen  $w^{**} = 0, \Delta w^{**} = 0$  in  $x = 0$  und  $x = a$  und die Differentialgleichung  $\Delta \Delta w^{**} = 0$  für

$$Y_n = a_n \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a} + b_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + c_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi y}{a} + d_n \frac{n \pi y}{a} \operatorname{Cof} \frac{n \pi y}{a}, \quad (991)$$



da jedes einzelne Glied eine Lösung der biharmonischen Gleichung ist. Die Freiwerte  $a_n, b_n, c_n, d_n$  ( $n = 1, \dots, \infty$ ) werden so bestimmt, daß die Funktion  $w = w^* + w^{**}$  die vier Randbedingungen für  $y = \pm b/2$  befriedigt (Abb. 648). Bei Symmetrie der Stützung genügen die in  $y$  geraden Funktionen der allgemeinen Lösung  $w^{**}$ . Das Ergebnis lautet nach A. Nadai mit

$$\xi_n = \frac{n \pi x}{a}, \quad \eta_n = \frac{n \pi y}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n \pi b}{2 a}, \quad (992)$$

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \frac{1}{n^5} \left[ 1 - \frac{2 \operatorname{Cof} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n + \alpha_n \operatorname{Sin} \alpha_n \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n \operatorname{Cof} \alpha_n}{1 + \operatorname{Cof} 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n \quad (993)$$

$(n = 1, 3, 5, \dots)$ .

Bei hydrostatischer Belastung (Abb. 648b)  $p = p_0 x/a$  ist

$$w = \frac{2 p_0 a^4}{N \pi^5} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \left[ 1 - \frac{(2 + \alpha_n \operatorname{Tg} \alpha_n) \operatorname{Cof} \eta_n - \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2 \operatorname{Cof} \alpha_n} \right] \sin \xi_n. \quad (994)$$

Die Reihen konvergieren schnell, so daß bereits das erste Glied als Näherung genügt. Mit  $w(x, y)$  sind nach S. 645 auch die Schnittkräfte  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}$  und die Stützkkräfte  $A_{xz}, A_{yz}$  der Platte bestimmt, so daß Richtung und Größe der Hauptbiegungs- und Hauptdrillungsmomente berechnet und darauf die Trajektorien und die Linien gleichen Hauptmomentes aufgetragen werden können. Um daran das Wesen der Plattenbiegung zu studieren, ist die Zahlenrechnung für zwei Platten unter gleichförmiger Belastung mit dem Seitenverhältnis 1 : 1 und 3 : 4 ausgeführt worden (s. S. 677). In Abb. 649 sind die Biegemomente  $M_x, M_y$  in den Symmetrieachsen der rechteckigen Platten mit dem Seitenverhältnis  $b/a = 1; 1,5; 2$  für  $\mu = 1/4$  dargestellt. Die Abhängigkeit der Momente und der Durchbiegung von dem Seitenverhältnis zeigt nach A. Nadai für  $\mu = 3/10$  Abb. 650.

Der gleichmäßig belastete Halbstreifen ist ein Sonderfall der rechteckig begrenzten Platte mit  $b \gg a$  und von A. Nadai in der gleichen Weise untersucht worden. Das Ergebnis ist hier wiedergegeben, um damit später andere Aufgaben zu lösen.

a) Die drei Seiten des Halbstreifens liegen frei auf (Abb. 651a)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\eta_n}{2} \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (995)$$



b) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist frei (Abb. 651b)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[ 1 + \frac{\mu}{3 + \mu} \left( \frac{1 + \mu}{1 - \mu} - \eta_n \right) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (996)$$

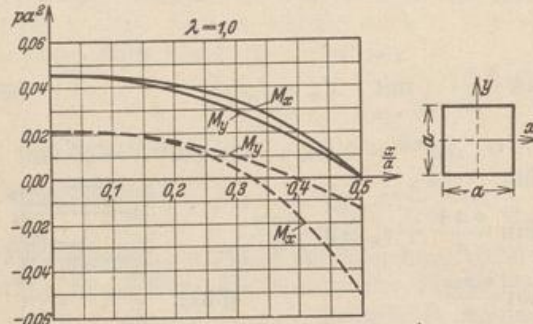
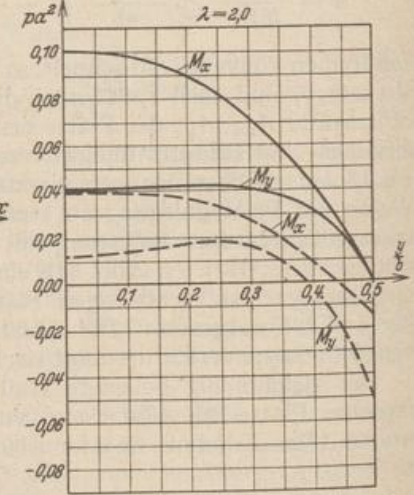
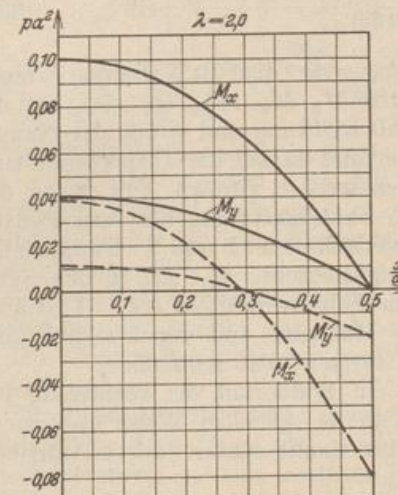
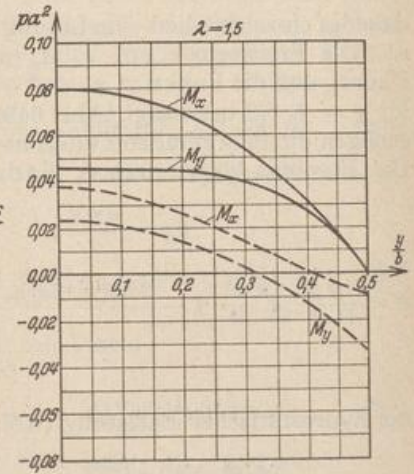
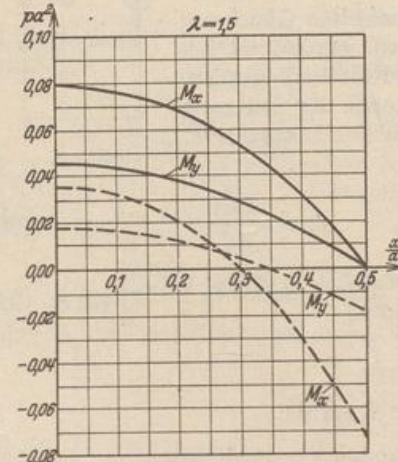


Abb. 649.

Biegemomente  $M_x$  und  $M_y$   
für rechteckige Platten mit  
 $b/a = \lambda = 1,0, 1,5, 2,0$ .  
 $\mu = 1/4$ .

Frei aufliegende Platten ———  
Eingespannte Platten - - - - -



c) Die Längsseiten des Halbstreifens liegen frei auf, die kurze Seite ist eingespannt (Abb. 651c)

$$w = \frac{4 p a^4}{N \pi^5} \sum \left[ 1 - (1 + \eta_n) e^{-\eta_n} \right] \frac{1}{n^5} \sin \xi_n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (997)$$



**Berechnung einer rechteckigen Platte nach A. Nadai.**

Untersucht wird eine rechteckige Platte mit  $b/a = 4/3$  unter gleichmäßig verteilter Belastung  $p$ . Mit der Abkürzung

$$\Phi_n = 2 \cos \alpha_n \cos \eta_n + \alpha_n \sin \alpha_n \cos \eta_n - \eta_n \sin \eta_n \cos \alpha_n$$

wird nach (993) die Durchbiegung

$$w = 0,01307 \frac{p a^4}{N} \sum \frac{1}{n^5} \left[ 1 - \frac{\Phi_n}{1 + \cos 2 \alpha_n} \right] \sin \xi_n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

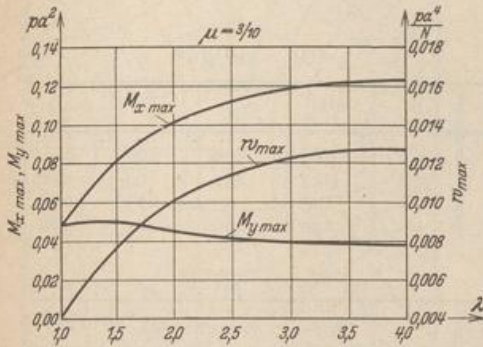


Abb. 650. Biegemomente  $M_{x \max}$ ,  $M_{y \max}$  und Durchbiegung  $w_{\max}$  der frei aufliegenden, rechteckigen Platte mit gleichmäßig verteilter Last  $p$  als Funktionen des Seitenverhältnisses  $b/a = \lambda$ .

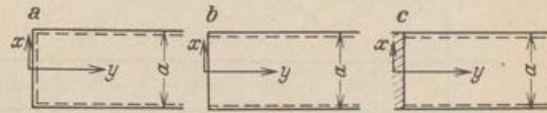


Abb. 651.

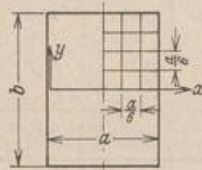


Abb. 652.

Die  $10^{-5} p a^4 / N$  fachen Ordinaten  $w$  in den Punkten eines Gitters (Abb. 652) mit  $\frac{a}{12} = \frac{b}{16}$  sind

$x \backslash y$	0	$a/12$	$a/6$	$a/4$	$a/3$	$5a/12$	$a/2$	$7a/12$
$a/2$	663	651	618	563	487	389	273	141
$7a/12$	641	631	599	545	471	377	264	138
$2a/3$	578	569	540	492	426	341	239	125
$3a/4$	476	468	445	406	351	281	198	103
$5a/6$	339	334	317	289	250	201	142	73
$11a/12$	176	174	165	151	131	105	74	38

Die Schnittkräfte werden nach (919) mit

$$M'_x = p x(a-x)/2, \quad M'_y = \mu p x(a-x)/2;$$

$$M_x = M'_x + (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[ a_n \cos \eta_n + b_n \left( \eta_n \sin \eta_n - \frac{2\mu}{1-\mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_y = M'_y - (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \sin \xi_n \left[ a_n \cos \eta_n + b_n \left( \eta_n \sin \eta_n + \frac{2}{1-\mu} \cos \eta_n \right) \right],$$

$$M_{xy} = - (1-\mu) p a^2 \pi^2 \sum n^2 \cos \xi_n \left[ a_n \sin \eta_n + b_n \left( \eta_n \cos \eta_n + \sin \eta_n \right) \right],$$

worin

$$a_n = - \frac{2(2 + \alpha_n \mathfrak{E} \alpha_n)}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad b_n = \frac{2}{n^5 \pi^3 \cos \alpha_n}, \quad \mu = 1/6.$$

$$a_1 = -0,0063928; \quad a_3 = -8,3204 \cdot 10^{-7}; \quad b_1 = 0,0015856; \quad b_3 = 1,0045 \cdot 10^{-7}.$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$
$a/2$	0,0672	0,0630	0,0501	0,0288	0,0421	0,0413	0,0376	0,0266
$2a/3$	0,0611	0,0573	0,0458	0,0264	0,0370	0,0363	0,0332	0,0239
$5a/6$	0,0405	0,0382	0,0313	0,0189	0,0223	0,0219	0,0203	0,0152



$$M_{xy} / p a^2$$

$x \backslash y$	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$2a/3$	0,0068	0,0141	0,0187	0,0210
$5a/6$	0,0120	0,0250	0,0343	0,0390
$a$	0,0140	0,0293	0,0407	0,0479

Damit ergeben sich nach (921) die Richtung und Größe der Hauptbiegungsmomente  $M_I$  u.  $M_{II}$  und die Hauptdrillungsmomente  $M_{I,II}$ .

$$M_I \cdot 10^4 / p a^2$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	672	630	501	288	0	421	413	376	266	0
$2a/3$	611	593	544	439	210	370	343	247	64	-210
$5a/6$	495	445	503	514	390	223	155	13	-173	-390
$a$	0	140	279	407	479	0	-140	-279	-407	-479

$$\alpha^0$$

$x \backslash y$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$
$a/2$	0	0	0	0	0	126	109	63	11	0
$2a/3$	0	16,5	32,5	43	45	121	125	148	188	210
$5a/6$	0	28	38,5	43	45	91	145	245	343	390
$a$	0	45	45	45	45	0	140	279	407	479

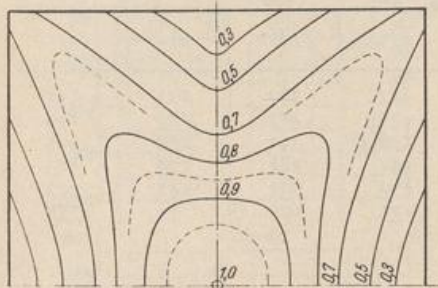


Abb. 653. Linien gleicher  $M_I$ .

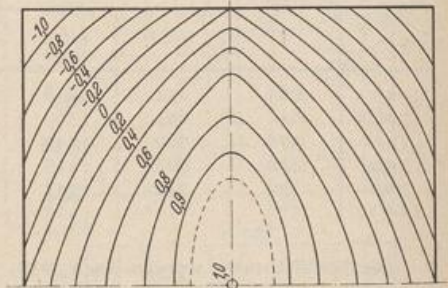


Abb. 654. Linien gleicher  $M_{II}$ .

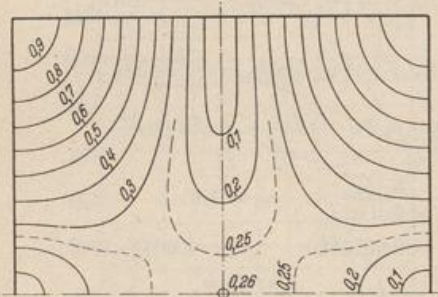


Abb. 655. Linien gleicher  $M_{I,II}$ .

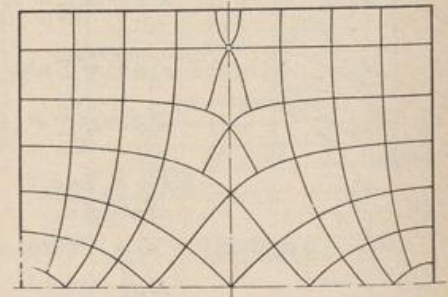


Abb. 656. Trajektorien der Hauptdrillungsmomente.

Die Linien gleicher Hauptmomente sind in Abb. 653 bis 655 dargestellt, ihre Bezifferung bedeutet den Bruchteil des größten Momentes. Abb. 656 zeigt die Trajektorien der Hauptdrillungsmomente, Abb. 657 die Trajektorien der Hauptbiegungsmomente, die in Abb. 658 mit denjenigen der quadratischen Platte verglichen werden. Der Mittelpunkt der quadratischen



Platte ist mit  $M_x = M_y$  ein singulärer Punkt, in dem sich 4 Trajektorien schneiden. Die rechteckige Platte hat zwei singuläre Punkte auf der langen Symmetrieachse, in denen sich je 3 Trajektorien schneiden.

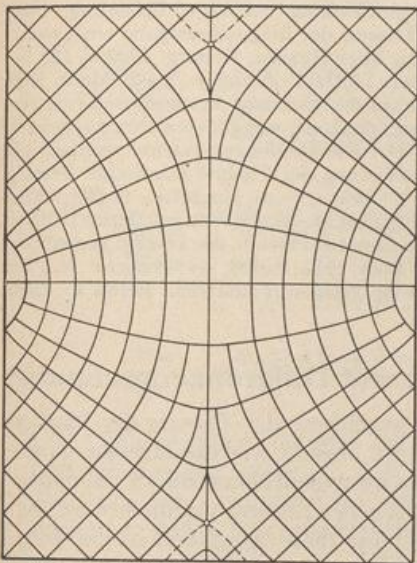


Abb. 657. Trajektorien der Hauptbiegemomente.

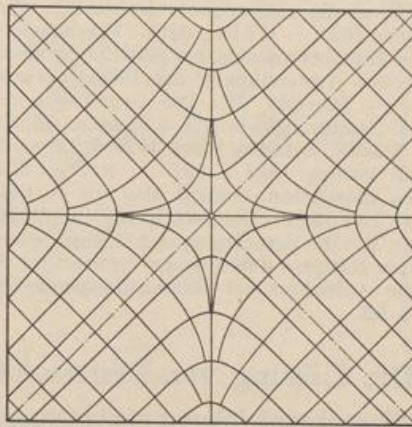


Abb. 658. Trajektorien der Hauptbiegemomente für die quadratische Platte.

### Die eingespannte Platte bei gleichmäßiger Belastung.

Nachdem die Tangentialebene an die Biegefläche der frei aufliegenden Platte in den Eckpunkten bereits mit der ursprünglichen Mittelebene zusammenfällt, sind hier die Biegemomente der eingespannten Platte Null und die Tangenten an die Kurven der Randmomente waagrecht. Längs des Randes sind auch die Drillungsmomente nach S. 648 Null und daher  $A_{xz} = Q_{xz}$ .

Um die Differentialgleichung (929) bei starrer Einspannung oder anderen Randbedingungen zu integrieren, wird die Lösung Naviers  $w_1$  für die frei aufliegende Platte (988) nach M. Levy durch eine allgemeine Lösung  $w_2$  der homogenen Gleichung  $\Delta\Delta w_2 = 0$  ergänzt. Sie enthält so viele Freiwerte, besteht also aus so vielen Partikularlösungen, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen durch die Reihenentwicklung für  $w = w_1 + w_2$  gliedweise erfüllt werden können. Die Fläche  $w_2$  entsteht darnach durch Randkräfte an der frei aufliegenden Platte. Der mechanische Sinn dieser mathematischen Operation läßt sich mit der Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte in Abschn. 24 vergleichen.

Die Aufgabe kann auch nach H. Hencky und A. Nadai durch Überlagerung einer Grundlösung  $w^*$  für die vorgeschriebene Belastung mit einem allgemeinen Integral  $w^{**}$  der homogenen Gleichung  $\Delta\Delta w^{**} = 0$  untersucht werden. Dieses läßt sich in einfach unendlichen Reihen anschreiben und enthält ebenso viele Freiwerte, also ebenso viele Partikularlösungen  $w_h^{**}$ , als andere Randbedingungen im Vergleich zur frei aufliegenden Platte vorhanden sind. Die Freiwerte werden auch hier gliedweise so bestimmt, daß die Funktion  $w = w^* + w^{**}$  die Differentialgleichung und die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Der mathematische Teil der Lösung bereitet hier jedoch wesentlich größere Schwierigkeiten als bei der frei aufliegenden Platte, so daß man sich bei diesen Aufgaben in der Regel mit Näherungslösungen begnügt.

Hencky, H.: Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten. München 1913. — Leitz, H.: Berechnung der frei aufliegenden Platte. Berlin 1914. — Nadai, A.: Die Formänderungen und die Spannungen von rechteckigen Platten. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Berlin 1915. — Leitz, H.: Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte. Z. Math. Physik 1917



S. 262. — Huber, M. T.: Über die Biegung einer rechteckigen Platte von ungleicher Biegefestigkeit in der Längs- und Querrichtung bei einspannungsfreier Stützung des Randes usw. Bauing. 1924 S. 259. — Derselbe: Über die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte und ihre Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten. Bauing. 1925 S. 878 — Si Luan Wei: Über die eingespannte rechteckige Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Diss. Göttingen 1925. — Huber, M. T.: Vereinfachte strenge Lösung der Biegungsaufgabe einer rechteckigen Eisenbetonplatte bei geradliniger freier Stützung aller Ränder. Bauing. 1926 S. 121. — Derselbe: Anwendungen der Biegetheorie orthotroper Platten. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 228. — Marcus, H.: Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten. Bauing. 1926 S. 577. — Crämer, H.: Die Biegungsgleichung von Platten stetig veränderlicher Stärke. Beton u. Eisen 1929 S. 12. — Marcus, H.: Die Drillungsmomente rechteckiger Platten. Bauing. 1929 S. 497. — Ritter, M.: Die Anwendung der Theorie elastischer Platten auf den Eisenbeton. Bericht über die II. Int. Tagung f. Brücken- u. Hochbau, S. 694. Wien 1929. — Inada, T.: Die Berechnung auf 4 Seiten gestützter rechteckiger Platten. Berlin 1930. — Müller, E.: Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern durch Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. 1931 S. 606. — Crämer, H.: Die bauliche Aufnahme der Randrillungsmomente vierseitig gelagerter Platten. Beton u. Eisen 1932 S. 95.

## 71. Die Lösung von Plattenaufgaben mit Differenzenrechnung.

**Differenzgleichung eines Gitters.** Die Anwendung der Theorie der Plattenbiegung bei beliebiger Belastung und Stützung ist ebenso wie die strenge Untersuchung ebener Spannungsprobleme im Bauwesen im wesentlichen durch die mathematischen Schwierigkeiten der Lösung verhindert worden.

Man begnügt sich daher für diese Aufgaben in der Regel mit qualitativ brauchbaren Näherungslösungen, zumal auch die Annahmen über die physikalischen Eigenschaften des Baustoffs und die Beschaffenheit der Stützung keineswegs streng erfüllt sind. Es liegt daher nahe, den stetigen Charakter des Ansatzes wie bei anderen Problemen der Mechanik aufzugeben und die Abhängigkeit zwischen Spannungs-, Verschiebungs- und Belastungszustand an endlichen Abschnitten der Platte zu beschreiben. Die stetiggekrümmte Biegefläche erscheint dabei als Vielkant, dessen Kanten sich im Grundriß je nach der Art der Koordinaten in Abständen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  rechtwinklig schneiden oder als Strahlenbündel mit einer Schar konzentrischer Polygone erscheinen. Die Eckpunkte  $k$  des Vielkantes sind Punkte der Biegefläche, die Kanten beschreiben ein elastisches Gitter. Die geometrische Abwandlung der Fläche zum Vielkant bedeutet mathematisch den Übergang vom Längendifferential zur Differenz zweier Strecken und vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten. Er ist zur numerischen Lösung von Aufgaben der Plattenbiegung zuerst von H. Marcus vollzogen worden.

Die Mittelebene der rechteckigen Platte wird zur Vorbereitung der Untersuchung durch zwei Systeme äquidistanter, sich winkelrecht kreuzender Geraden geteilt. Die Abstände  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  sind in der Regel gleichgroß ( $\Delta x = \Delta y = s$ ).

Die Differentialquotienten werden nach ihrer geometrischen Bedeutung durch Funktionen der Ordinaten  $w_k$  der Gitterknoten ersetzt (Abschn. 20). Danach ist in Verbindung mit Abb. 659

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \Delta x}, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_t - w_i}{2 \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{i+1} - w_{i-1} - w_{t+1} + w_{t-1}}{4 \Delta x \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_k &\rightarrow \frac{w_t - 2w_k + w_i}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

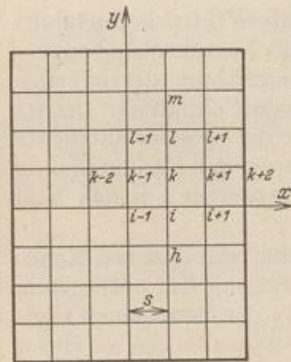


Abb. 659.



$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_k &\rightarrow \frac{\Delta^2 w_{k+1} - \Delta^2 w_{k-1}}{2 \Delta x^3} = \frac{w_{k+2} - 2 w_{k+1} + 2 w_{k-1} - w_{k-2}}{2 \Delta x^3}, \\
 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 2 w_l + 2 w_i - w_n}{2 \Delta y^3}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_k \rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i}{\Delta y^2} \\
 &\rightarrow \frac{4 w_k - 2 (w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_i) + (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1} + w_{i-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_k &\rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k+1} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k-1}}{\Delta x^2} \\
 &\rightarrow \frac{w_{k+2} - 4 w_{k+1} + 6 w_k - 4 w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}, \\
 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_k &\rightarrow \frac{w_m - 4 w_l + 6 w_i - 4 w_n}{\Delta y^4}.
 \end{aligned} \tag{998}$$

Die Differentialgleichungen der Plattenbiegung (929) und (931), (932) werden Differenzgleichungen, so daß der Zusammenhang zwischen der Belastungsintensität  $p_k$ , den Ordinaten  $w_k$  der Biegefläche und den Momentensummen  $M_k$  in folgender Weise beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &\frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} = \frac{p_k}{N}, \\
 \text{II.} \quad &\frac{\Delta^2 M_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M_k}{\Delta y^2} = -p_k, \quad \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} = -\frac{M_k}{N}.
 \end{aligned}$$

Daraus entsteht an jedem freien Maschenknoten mit den Differenzenquotienten (998) und mit  $\Delta y^2 / \Delta x^2 = \alpha$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &w_k \left[ 6 \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + 8 \right] - 4 \left[ (1 + \alpha) (w_{k+1} + w_{k-1}) + \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) (w_l + w_i) \right] \\
 &+ 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + \alpha (w_{k+2} + w_{k-2}) \\
 &+ \frac{1}{\alpha} (w_m + w_n) = \frac{p_k \Delta x^4}{N}, \\
 \text{II.} \quad &2 (1 + \alpha) M_k - \alpha (M_{k+1} + M_{k-1}) - (M_l + M_i) = p_k \alpha \Delta x^2, \\
 &2 (1 + \alpha) w_k - \alpha (w_{k+1} + w_{k-1}) - (w_l + w_i) = \frac{M_k}{N} \alpha \Delta x^2.
 \end{aligned} \tag{999}$$

Bei gleich großen Abständen  $\Delta x = \Delta y = s$  des Gitters ist

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad &20 w_k - 8 (w_{k-1} + w_l + w_{k+1} + w_i) + 2 (w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) \\
 &+ (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_n) = \frac{p_k s^4}{N}.
 \end{aligned} \tag{1000}$$

$$\text{II.} \quad 4 M_k - M_{k-1} - M_l - M_{k+1} - M_i = + p_k s^2, \tag{1001}$$

$$4 w_k - w_{k-1} - w_l - w_{k+1} - w_i = + \frac{M_k}{N} s^2. \tag{1002}$$

**Schnittkräfte.** Die Schnittkräfte der Platte sind nach (919) Funktionen von Differentialquotienten der Plattenbiegung und daher jetzt Funktionen von Differenzenquotienten, so daß die Schnittkräfte am Maschenknoten  $k$  in folgender Weise von den Verschiebungen des Gitters abhängen:



$$\left. \begin{aligned}
 M_{x,k} &= -N \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} + \mu(-w_i + 2w_k - w_l)], \\
 M_{y,k} &= -N \left( \mu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [\mu(-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}) - w_i + 2w_k - w_l], \\
 M_k &= -N \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) = \frac{N}{s^2} [-w_i - w_{k-1} + 4w_k - w_{k+1} - w_l], \\
 M_{xy,k} &= -N(1 - \mu) \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y} = \frac{N(1 - \mu)}{4s^2} [w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1}].
 \end{aligned} \right\} (1003)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{xz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta x} = \frac{1}{2s} (M_{k+1} - M_{k-1}) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (w_{l-1} + w_{l+1}) - (w_{l+1} + w_{l-1}) - w_{k+2} + 4(w_{k+1} - w_{k-1})], \\
 Q_{yz,k} &= \frac{\Delta M_k}{\Delta y} = \frac{1}{2s} (M_l - M_i) \\
 &= \frac{N}{2s^3} [w_k + (w_{i+1} + w_{i-1}) - (w_{i+1} + w_{i-1}) - w_m + 4(w_l - w_i)].
 \end{aligned} \right\} (1004)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_{xz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_{k+1} - M_{k-1} + M_{xy,l} - M_{xy,i}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_{k-2} + (6 - 2\mu)(w_{k+1} - w_{k-1}) \\
 &\quad + (2 - \mu)(w_{i-1} + w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i+1}) - w_{k+2}], \\
 A_{yz,k} &= -\frac{1}{2s} [M_l - M_i + M_{xy,k+1} - M_{xy,k-1}] \\
 &= -\frac{N}{2s^3} [w_k + (6 - 2\mu)(w_l - w_i) \\
 &\quad + (2 - \mu)(w_{i+1} + w_{i-1} - w_{l-1} - w_{l+1}) - w_m].
 \end{aligned} \right\} (1005)$$

Die Teilung  $\Delta x, \Delta y$  des Gitters ist in beiden Richtungen konstant. Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, um so besser ist die Angleichung des Verschiebungszustandes des Gitters an die elastische Fläche der Platte, um so größer aber auch die Anzahl der linearen Gleichungen (1000) und der Umfang der Zahlenrechnung. Die Zerlegung des Integrationsbereiches in quadratische Maschen ( $\Delta x = \Delta y = s$ ) vereinfacht die Differenzgleichungen der Wurzeln  $M_k, w_k$  und die Ansätze für die Schnittkräfte. Die Poisson'sche Zahl beträgt bei Eisenbetonplatten  $\mu = 1/6$ , sie kann aber auch zur einfachen Berechnung der Schnittkräfte, vor allem bei  $\Delta x \neq \Delta y$  im Sinne dieser Näherungslösung Null gesetzt werden.

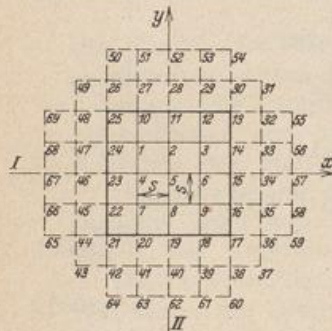


Abb. 660.

**Die Bedingungen am Rande des Gitters und an den singulären Stellen der Belastungsfunktion.** Um den Zusammenhang zwischen der Biegefläche  $w(x, y)$  der Platte und der vorgeschriebenen Belastung auch am

Plattenrande in endlichen Abschnitten  $\Delta x, \Delta y$  zu beschreiben, und die Schnitt- und Stützkkräfte nach (1003)ff. abzuleiten, wird die elastische Fläche unabhängig von der Stützung erweitert, indem das Gitter und die Belastung  $p(x, y)$  stetig über den Plattenrand hinaus fortgesetzt werden. Damit ist die Bedingung  $\Delta \Delta w = p/N$  auch außerhalb des Randes erfüllt (Abb. 660). Unter dieser Voraus-



setzung gelten die Ansätze (1004) für die Schnittkräfte  $Q_{xz}$ ,  $Q_{yz}$ ,  $M_{xy}$  und die Ansätze (1005) für die Auflagerkräfte  $A_{xz}$ ,  $A_{yz}$ . In diesen lassen sich dann die Verschiebungen  $w$  der Nebenknoten außerhalb des Randes eliminieren, so daß sich die Auflagerkräfte folgendermaßen berechnen lassen:

a) Frei aufliegende Platte. Für den Randknoten  $k$  folgt nach (1003) aus  $M_k = 0$  und  $w_i = w_k = w_l = 0$

$$w_{k+1} = -w_{k-1}. \quad (1006)$$

Die Differenzgleichung (1001) liefert mit  $M_l = M_k = M_l = 0$

$$M_{k+1} = -M_{k-1} - p_k s^2$$

und die Differenzgleichung (1002) für den Nebenknoten  $(k+1)$  ergibt

$$4w_{k+1} - w_{l-1} - w_{k+2} - w_{i+1} = \frac{M_{k+1}}{N} s^2 = -\frac{M_{k-1}}{N} s^2 - \frac{p_k s^4}{N}$$

oder mit (1006)

$$w_{k+2} = 4w_{k+1} + w_{l-1} + w_{i+1} + \frac{M_{k-1}}{N} s^2 + \frac{p_k s^4}{N}.$$

Nach (1002) ist für den Punkt  $(k-1)$

$$\frac{M_{k-1}}{N} s^2 = 4w_{k-1} - w_{k-2} - w_{l-1} - w_{l-1},$$

also

$$w_{k+2} = -w_{k-2} + \frac{p_k s^4}{N}. \quad (1007)$$

Damit geht Gl. (1005) über in

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 4(3-\mu)w_{k-1} - 2w_{k-2} - 2(2-\mu)(w_{l-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1008)$$

Ebenso wird erhalten

$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 4(3-\mu)w_i - 2w_k - 2(2-\mu)(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1009)$$

b) Starr eingespannte Platte. Für den Randknoten  $k$  folgt nach (998) aus  $dw/dx = 0$

$$w_{k+1} = w_{k-1}. \quad (1010)$$

Die Differenzgleichung (1000) liefert mit  $w_i = w_k = w_l = 0$  und (1010)

$$w_{k+2} = \frac{p_k s^4}{N} + 16w_{k-1} - 4(w_{l-1} + w_{l-1}) - w_{l-2}, \quad (1011)$$

so daß nach (1005)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{l-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right] \quad (1012)$$

und ebenso

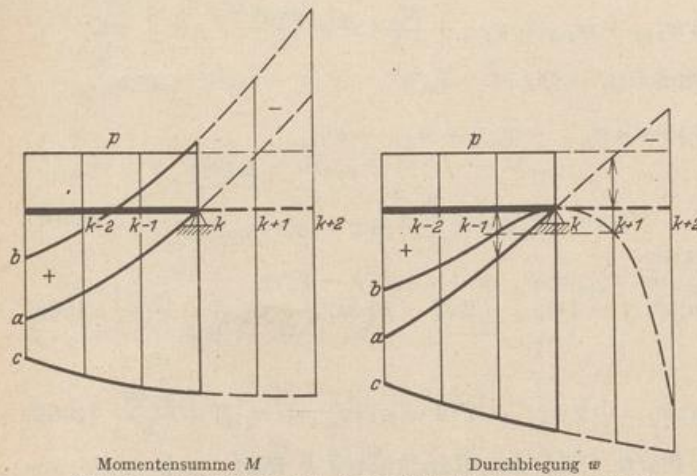
$$A_{yz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_i - 2w_k - 4(w_{i-1} + w_{i+1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right]. \quad (1013)$$

Die Erweiterung der Fläche  $M_k$  und der elastischen Fläche  $w_k$  über den Rand hinaus zeigt Abb. 661 für einen Schnitt  $y = \text{const.}$  a) Frei aufliegende Platte, b) starr eingespannte Platte, c) freier Rand. Die Belastungsfunktion  $p$  ist dabei konstant angenommen worden.

Man kann aber auch zur Formulierung der Randbedingungen auf die Erweiterung der elastischen Fläche verzichten und die Differenzgleichungen und Schnittkräfte allein mit den Verschiebungen der Hauptknoten des Gitters anschreiben, wenn an Stelle des einzelnen Plattenelementes eine nach allen Seiten durchlaufende Platte mit den gleichen Stützenbedingungen untersucht wird. Die durchlaufende Platte



wird auf Schneiden gestützt und antimetrisch oder symmetrisch belastet. Die Formänderung der benachbarten Felder ist dann antimetrisch oder symmetrisch zur Formänderung des Hauptfeldes, so daß die Verschiebungen der Nebenknöten antimetrisch oder symmetrisch mit den Verschiebungen der Hauptknöten übereinstimmen. Die Differenzgleichungen der Randknöten enthalten jedoch dann neben der Belastungsintensität  $p$  die singulären Stützkräfte. Sie können also nur angeschrieben werden, wenn diese bekannt sind. Das gilt auch von den singulären Stützkräften bei Pilzdecken. Daher ist die Lösung mit Differenzen nur dann möglich, wenn an diesen Punkten die Randwerte der Unbekannten Null oder vorgeschrieben sind. Beim frei aufliegenden Rand ist  $M_k = 0$  und  $w_k = 0$ , die Lösung also nach (1001), (1002) in zwei Stufen durchführbar. Beim eingespannten Rand ist  $M_k \neq 0$ ,  $w_k = 0$ , so daß nur der allgemeine Ansatz (1000) verwendet werden kann. Bei Pilzdecken ist über den Stützen  $w_k = 0$ , also ebenfalls nur der allgemeine Ansatz anwendbar, doch ist es zweckmäßig, den Stützendruck als statisch überzählige Größe zu berechnen.



Momentensumme  $M$   
Abb. 661. a frei aufliegender, b starr eingespannter, c freier Rand.

Werden die Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung ersetzt, so lassen sich die Stützkräfte  $A_{xz}$ ,  $A_{yz}$  nicht mehr nach (1005) ermitteln. Sind aber die Verschiebungen  $w_k$  bekannt, so können die Differenzgleichungen für die singulären Punkte nunmehr zur Bestimmung der singulären Stützkräfte dienen. Z. B. ist für die starr eingespannte Platte am Randknöten  $k$  nach (1000) mit

$$w_i = w_k = w_l = 0, \quad w_{k+1} = w_{k-1}, \quad w_{k+2} = w_{k-2},$$

$$2w_{k-2} + 4(w_{i-1} + w_{l-1}) - 16w_{k-1} = \bar{p}_k \frac{s^4}{N},$$

wobei  $\bar{p}_k$  die Belastungsintensität unter Berücksichtigung der Stützkraft bedeutet. Nach Abb. 662 ist

$$\bar{p}_k s^2 = -2A_{xz,k} s + p_k s^2,$$

womit wiederum wie in (1012)

$$A_{xz,k} = \frac{N}{2s^3} \left[ 16w_{k-1} - 2w_{k-2} - 4(w_{i-1} + w_{l-1}) + \frac{p_k s^4}{N} \right].$$

Den Verlauf von  $M_k$  und  $w_k$  für einen Schnitt  $y = \text{const}$  am Rande bei Ersatz der Randbedingungen durch Bedingungen über die Antimetrie oder Symmetrie der Formänderung zeigt Abb. 662. Die Belastungsfunktion  $p$  ist dabei konstant angenommen worden. Sie hat im Randknöten beim eingespannten Rand eine Singularität, beim frei aufliegenden Rand einen Sprung.

1. Freie Auflagerung der Ränder. Die Verschiebungen  $w_{10}$  bis  $w_{25}$  und die Momentensummen  $M_{10}$  bis  $M_{25}$  in den Randpunkten sind nach S. 647 Null (Abb. 660). Daher werden zunächst die Momentensummen  $M_1$  bis  $M_9$  der Hauptknöten nach (1001) und daraus die Verschiebungen  $w_1$  bis  $w_9$  des Gitters nach



(1002) berechnet. Damit sind nach (1003) auch die Biegemomente  $M_{x,1}$  bis  $M_{x,9}$ ,  $M_{y,1}$  bis  $M_{y,9}$  bekannt. Um die Drillungsmomente für alle Maschenknoten nach (1003) zu berechnen, sind auch die Verschiebungen der dem Rande benachbarten Nebenknoten notwendig. Diese ergeben sich aus der Bedingung (938) für die Momentensummen am Rande.

$$w_{27} = -w_1 \text{ usw.}, \quad w_{33} = -w_3 \text{ usw.}, \quad \text{an der Ecke } w_{31} = w_3 \text{ usw.} \quad (1014)$$

Die Berechnung der Querkräfte  $Q_{10}$  bis  $Q_{25}$  und der Stützkkräfte  $A_{10}$  bis  $A_{25}$  nach (1004), (1005) setzt außerdem noch die Kenntnis über die Größe der Momentensummen  $M_{26}$  bis  $M_{48}$  in denselben Nebenknoten voraus. Sie ergeben sich aus den Differenzgleichungen (1001) für die Randpunkte.

$$M_1 + M_{27} = -p_{10} s^2 \text{ usw.}, \quad M_3 + M_{33} = -p_{14} s^2 \text{ usw.}$$

Eine andere Lösung mit Hilfe der Verschiebungen ist bereits auf S. 683 angegeben worden.

2. Starre Einspannung der Ränder. Die Verschiebungen  $w_{10}$  bis  $w_{25}$  sind Null, dagegen die Momentensummen  $M_{10}$  bis  $M_{25}$  von Null verschieden (Abb. 660). Daher werden die Verschiebungen  $w_1$  bis  $w_9$  der Hauptknoten mit dem allgemeinen Ansatz (1000) in einer Stufe berechnet.

Hierbei gehen die Verschiebungen der am Rande benachbarten Nebenknoten in die Gleichungen ein. Diese sind durch die Randbedingungen (942) bestimmt, da mit

$$\partial w / \partial y = 0: \quad w_{27} = w_1 \text{ usw.}, \quad \partial w / \partial x = 0: \quad w_{33} = w_3 \text{ usw.} \quad (1015)$$

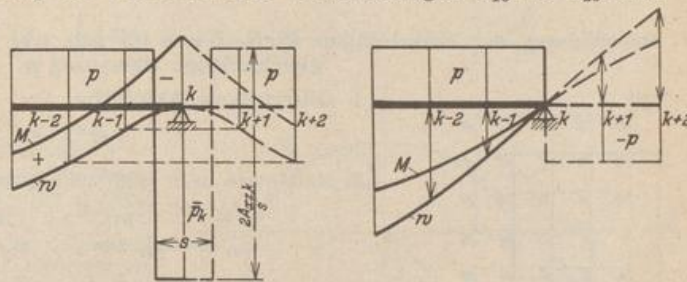
Mit den Wurzelwerten  $w_k$  sind nach (1003) alle Biege- und Drillungsmomente in den Knoten 1 bis 25 bestimmt. Die Drillungsmomente in den Randpunkten ergeben sich nach Vorschrift zu Null. Die Berechnung der Auflagerkraft ist bereits auf S. 683 abgeleitet worden.

3. Zwei anschließende Ränder (10 bis 17) der Platte sind kräftefrei, die beiden anderen (18 bis 25) frei aufgelagert (Abb. 660). Die Verschiebungen und Momentensummen in den Randknoten 17 bis 25 sind Null, so daß damit auch die Verschiebungen der Nebenknoten 38 bis 48 als antimetrisch zu den Verschiebungen der symmetrisch liegenden Hauptknoten bekannt sind. Damit können die Differenzgleichungen für die Punkte 1 bis 16 angeschrieben werden. Als Wurzeln erscheinen nur noch die unbekanntenen Verschiebungen der Nebenknoten 26 bis 36 und 51 bis 58. Diese müssen durch die Bedingungen  $M_{y,25}$  bis  $M_{y,13} = 0$ ,  $M_{x,13}$  bis  $M_{x,17} = 0$ ,  $A_{y,10}$  bis  $A_{y,13} = 0$ ,  $A_{x,13}$  bis  $A_{x,16} = 0$  und  $C_{13} = 0$  eliminiert werden.

Die beliebige Belastung von achsensymmetrischen Platten (freie Auflagerung oder starre Einspannung aller vier Ränder) wird durch die Umordnung der Belastung nach den beiden Achsen im Sinne von Abschn. 27 in vier unabhängige Teile zerlegt, so daß in (1001), (1002) nur die Momentensummen  $^{(1)}M_k \dots ^{(4)}M_k$  und die Verschiebungen  $^{(1)}w_k \dots ^{(4)}w_k$  eines Quadranten als Wurzeln auftreten.

$$M_k = ^{(1)}M_k + \dots + ^{(4)}M_k, \quad w_k = ^{(1)}w_k + \dots + ^{(4)}w_k. \quad (1016)$$

Die Momentensummen und Verschiebungen in Punkten der Symmetrieachsen I, II



Symmetrie von  $M_k, w_k$  am Rande der eingespannten Platte (Belastungsfunktion mit Singularität).

Antimetrie von  $M_k, w_k$  am Rande der frei aufliegenden Platte (Belastungsfunktion mit Sprung).

Abb. 662.



sind bei Antimetrie der Belastung nach I und II Null. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht. Sind mehrere Belastungsfälle, also auch die Einflußflächen von Verschiebungen oder Schnittkräften zu untersuchen, so wird nach Abschn. 29 die konjugierte Matrix zu den Differenzgleichungen (1000) oder (1001), (4002) gebildet.

Flächenlasten, die nicht mit der Teilung des Gitters in Beziehung stehen, werden maschenweise zu Einzellasten zusammengefaßt und nach dem Hebelgesetz auf die Maschenknoten verteilt.

Der Umfang der Zahlenrechnung nimmt wesentlich zu, wenn die Symmetrieeigenschaften der Stützung ganz oder teilweise wegfallen. Die Art der Untersuchung nach S. 684 wird jedoch nicht geändert. Der Spannungszustand an kräftefreien Ecken  $k$  liefert stets 5 Bedingungen. Neben denjenigen des kräftefreien Randes mit

$$M_{x,k} = 0, \quad M_{y,k} = 0, \quad A_{xz,k} = 0, \quad A_{yz,k} = 0$$

ist nach den Bemerkungen auf S. 648 auch  $M_{xy,k} = M_{yx,k} = 0$ , also

$$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_k = 0.$$

**Berechnung der rechteckigen Platte  $b/a = 4/3$  mit frei aufliegenden Rändern für gleichmäßige Belastung  $p$ .**

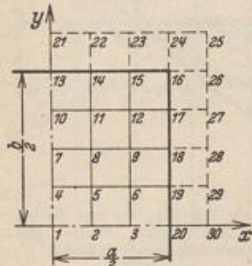


Abb. 663.

1. Gitterteilung (Abb. 663)

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014).

$$M_{13} \text{ bis } M_{20} = 0, \quad w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0.$$

$$w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}, \quad w_{30} = -w_3 \text{ usw.}$$

$$w_{24} = w_{26} = 0, \quad w_{25} = w_{12}.$$

3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte.

$$p_k s^2 = \frac{10^4}{36} \cdot \frac{p a^2}{10^4}, \quad \frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k}{10^{-4} p a^2} \cdot \frac{10}{36} \cdot \frac{p a^4}{10^5 N}.$$

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\frac{p a^2}{10^4}$	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
4	-2		-2									277,8	256,3
-1	4	-1		-2								277,8	229,7
	-1	4			-2							277,8	147,2
-1			4	-2		-1						277,8	244,1
	-1		-1	4	-1		-1					277,8	219,1
		-1		-1	4			-1				277,8	140,8
			-1			4	-2		-1			277,8	204,7
				-1		-1	4	-1		-1		277,8	184,4
					-1		-1	4			-1	277,8	120,0
						-1			4	-2		277,8	128,8
							-1		-1	4	-1	277,8	117,2
								-1		-1	4	277,8	78,3



4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$M_k$	923	827	530	879	789	507	737	664	432	464	422	282	$10^{-4} p a^2$
$w_k$	661	577	339	617	539	317	486	425	251	273	239	142	$10^{-5} p a^4 / N$

5. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1008), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[ -577 + 2 \cdot 661 - 577 + \frac{1}{6} (-617 + 2 \cdot 661 - 617) \right] = 0,066 p a^2,$$

$$M_{y,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[ \frac{1}{6} (-577 + 2 \cdot 661 - 577) - 617 + 2 \cdot 661 - 617 \right] = 0,042 p a^2,$$

$$M_{xv,16} = \frac{36 N}{4 a^2} \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \frac{10^{-5} p a^4}{N} [-142 - 142 - 142 - 142] = -0,043 p a^2,$$

$$A_{z,20} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[ 4 \cdot \left( 3 - \frac{1}{6} \right) 339 - 2 \cdot 577 - 2 \left( 2 - \frac{1}{6} \right) (317 + 317) \right] + \frac{p a}{12} = 0,475 p a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 664 dargestellt. Sie stimmen gut mit den genauen Werten S. 677 überein. Der Auflagerdruck ergibt sich nach der gestrichelten Linie und ist an den Ecken nicht Null wie bei der strengen Lösung. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab. Der Auflagerdruck ist daher nach den Ecken zu kleiner als die Zahlenrechnung angibt und verläuft etwa nach der ausgezogenen Linie.

Um die Abhängigkeit des Ergebnisses der Differenzenmethode von der Gitterteilung zu zeigen, ist eine quadratische, frei aufliegende, gleichmäßig belastete Platte für  $s = a/4$  und  $a/8$  berechnet worden. Die Ergebnisse weichen nur wenig voneinander ab (Abb. 665).

In Abb. 666 sind die Ergebnisse für eine Einzellast in Plattenmitte mit  $s = a/4, a/8, a/12$  dargestellt. Sie weichen nur in geringer Umgebung der Last von einander ab. Daher genügt es, die Berechnung für ein grobes Gitter durchzuführen und nur im Lastbereich ein feineres Gitter einzuschalten. Für das grobe Gitter  $s = a/4$  (Abb. 665a) lauten die Differenzgleichungen (1001)

$M_1$	$M_2$	$M_3$	$P$	
4	-4			I
-1	4	-2		o
	-2	4		o

mit dem Ergebnis

$$M_1 = 0,374 P,$$

$$M_2 = 0,125 P,$$

$$M_3 = 0,0624 P.$$



a) Gitterteilung.

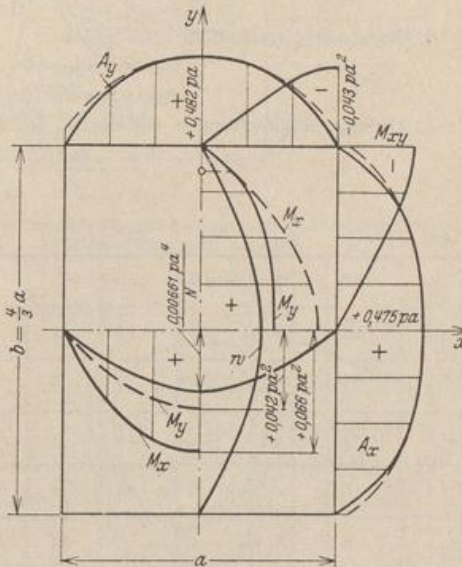
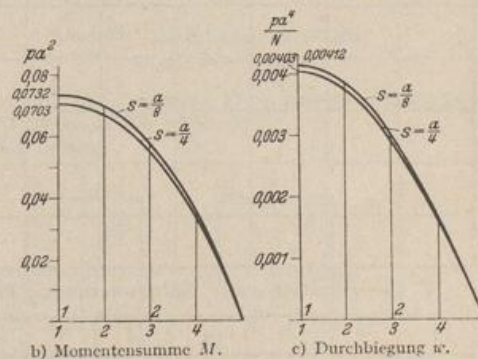


Abb. 664. Schnittkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung p.



b) Momentensumme M.

c) Durchbiegung w.

Abb. 665.



Für das eingeschaltete feinere Gitter mit  $s = a/8$  (Abb. 667) lauten die Gleichungen (1001)

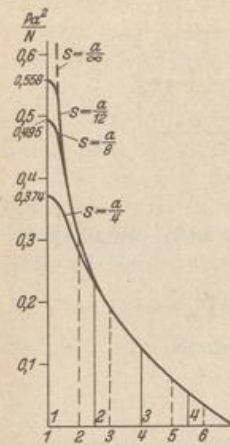


Abb. 666. Momentensumme  $M$ .

$M_1$	$M_4$	$M_5$	
4	-4		I
-1	4	-2	$0 + M_2$
	-2	4	$0 + 2 M_6$

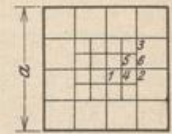


Abb. 667. Gitterteilung mit eingeschaltetem feinerem Gitter.

Mit  $M_2 = 0,125 P$  und  $M_6 = M_2 - \frac{1}{4}(M_2 - M_3) = 0,112 P$  aus einer quadratischen Interpolation ergibt sich  $M_4 = 0,243 P$ ,  $M_1 = 0,493 P$ . Die Werte stimmen nach Abb. 666 mit dem Ergebnis für das 8teilige Gitter gut überein.

**Berechnung der rechteckigen Platte  $b/a=4/3$  mit eingespannten Rändern und gleichmäßiger Belastung  $p$ .**

1. Gitterteilung (Abb. 668).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}$$

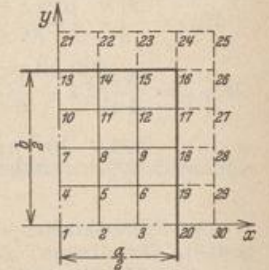


Abb. 668.

2. Randwerte nach (942) und (1015).

$$w_{13} \text{ bis } w_{20} = 0, \quad w_{21} = w_{10} \text{ usw.},$$

$$w_{30} = w_3 \text{ usw.}, \quad w_{25} = w_{12}.$$

3. Differenzgleichungen (1000) für die 12 Gitterpunkte.

$$\frac{p_k s^4}{N} = \frac{10^5}{6^4} \cdot \frac{p a^4}{10^5 N}$$

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$w_{11}$	$w_{12}$	$\frac{p a^4}{10^5 N}$
20	-16	2	-16	8		2						77,17
-8	21	-8	4	-16	4		2					77,17
1	4	21	-16	2	-8	4		2				77,17
-8	4		21	-16	2	-8	4		1			77,17
2	-8	2	-8	22	-8	2	-8	2		1		77,17
	2	-8	1	-8	22		2	-8			1	77,17
1			-8	4		20	-16	2	-8	4		77,17
	1		2	-8	2	-8	21	-8	2	-8	2	77,17
		1		2	-8	1	-8	21		2	-8	77,17
			1			-8	4		21	-16	2	77,17
				1		2	-8	2	-8	22	-8	77,17
					1		2	-8	1	-8	22	77,17

4. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$10^{-5} p a^4 / N$
$w_k$	227	187	86	207	171	79	149	124	59	67	56	27	



5. Schnittkräfte nach (1003ff.) und (1012), z. B.

$$M_{x,1} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[ -187 + 2 \cdot 227 - 187 + \frac{1}{6} (-207 + 2 \cdot 227 - 207) \right] = 0,032 p a^2,$$

$$M_{x,20} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} \left[ -86 + 2 \cdot 0 - 86 + \frac{1}{6} \cdot 0 \right] = -0,062 p a^2,$$

$$A_{x,20} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{10^{-5} p a^4}{N} [16 \cdot 86$$

$$- 2 \cdot 187 - 4(79 + 79)] + \frac{p a}{12} = 0,49 p a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 669 dargestellt. Da der Auflagerdruck nach der strengen Lösung an der Ecke Null ist, wird das Ergebnis der Rechnung berichtigt (ausgezogene Linie). Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

**Berechnung der rechteckigen Platte  $b/a = 4/3$  mit frei aufliegenden Rändern und einer Einzellast.**

1. Gitterteilung (Abb. 670).

$$s = \frac{a}{6} = \frac{b}{8}.$$

2. Randwerte nach (938) und (1014).

Am ganzen Rand ist

$$M = 0 \text{ und } w = 0, \quad w_{21} = -w_{10} \text{ usw.}$$

3. Belastungsumordnung. Zur Berechnung der Durchbiegung nach (1002) sind 35 Differenzgleichungen auf-

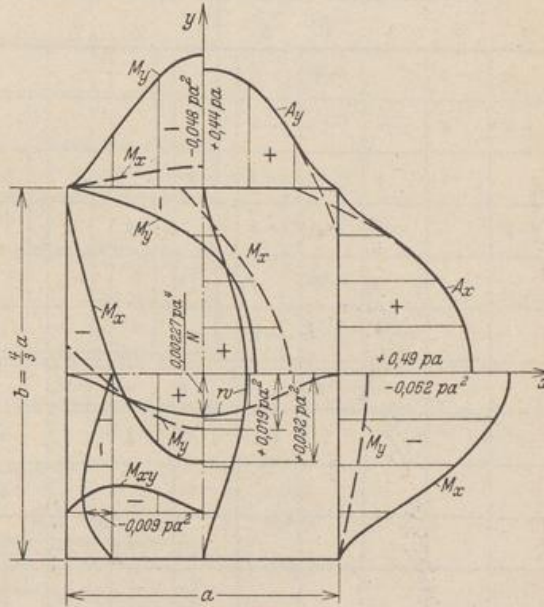


Abb. 669. Schnittkräfte der eingespannten rechteckigen Platte mit gleichmäßiger Belastung  $p$ .

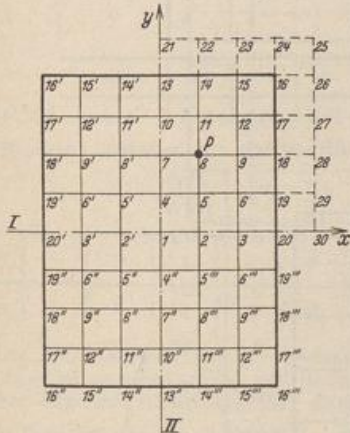


Abb. 670. Gitterteilung.

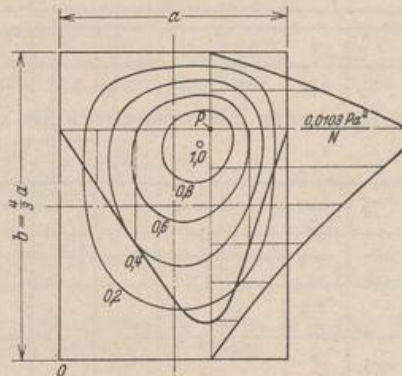


Abb. 671. Linien gleicher Durchbiegung.

$$w_{\max} = 0,0107 Pa^2/N.$$

zulösen. Es ist daher zweckmäßiger, die Belastung nach Abschn. 27 in die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile zu den Achsen  $I, II$  umzuordnen (Abb. 672).

In den Antimetrieachsen ist  $w = 0$  und daher bekannt.

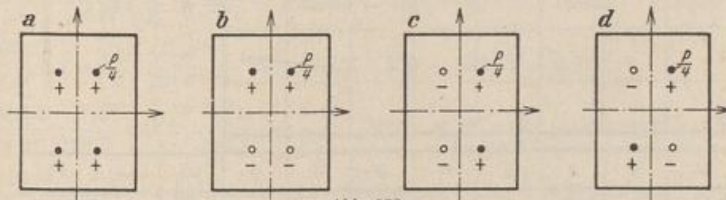


Abb. 672.



4. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 12 Gitterpunkte im 1. Quadranten.  
 Im Punkt 8 ist

$$p_k s^2 = \frac{P}{4}, \quad \frac{M_k}{N} s^2 = \frac{4 M_k}{P} \cdot \frac{10^5}{144} \cdot \frac{P a^2}{10^5 N}$$

In allen anderen Punkten sind die Belastungsglieder Null.

a) 4 symmetrische Einzellasten  $P/4$  (Abb. 672a).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-2		-2									0	228
-1	4	-1		-2								0	205
	-1	4			-2							0	113
-1			4	-2		-1						0	249
	-1		-1	4	-1		-1					0	230
		-1		-1	4			-1				0	124
			-1			4	-2		-1			0	287
				-1		-1	4	-1		-1		1	380
					-1		-1	4			-1	0	144
						-1			4	-2		0	147
							-1		-1	4	-1	0	150
								-1		-1	4	0	73

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^I =$	729	637	365	709	624	355	613	557	307	343	305	172	$Pa^2/10^5 N$

b) 4 Einzellasten  $P/4$ , symmetrisch zur  $y$ -Achse, antimetrisch zur  $x$ -Achse (Abb. 672b).

4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-2		-1						0	114
-1	4	-1		-1					0	121
	-1	4			-1				0	57
-1			4	-2		-1			0	214
	-1		-1	4	-1		-1		1	315
		-1		-1	4			-1	0	107
			-1			4	-2		0	114
				-1		-1	4	-1	0	121
					-1		-1	4	0	57

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$w^{II} =$	0	0	0	180	164	90	277	265	138	180	164	90	$Pa^2/10^5 N$



c) 4 Einzellasten  $P/4$ , symmetrisch zur  $x$ -Achse, antimetrisch zur  $y$ -Achse (Abb. 672c).

	2	3	5	6	8	9	11	12	$P/4$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-1	-2							0	50,7
-1	4		-2						0	37,6
-1		4	-1	-1					0	82,8
	-1	-1	4		-1				0	49,8
		-1		4	-1	-1			1	230,8
			-1	-1	4		-1		0	79,3
				-1		4	-1		0	66,8
					-1	-1	4		0	36,5

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$w_k^{III} =$	0	69	60	0	82	67	0	111	75	0	55	41

$Pa^2/10^5 N$

d) 4 antimetrische Einzellasten (Abb. 672d).

	5	6	8	9	11	12	$\frac{P}{4}$	$\frac{Pa^2}{10^5 N}$
4	-1	-1					0	64,6
-1	4		-1				0	34,4
-1		4	-1	-1			1	224,2
	-1	-1	4		-1		0	73,2
			-1		4	-1	0	64,6
				-1	-1	4	0	34,4

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$w_k^{IV} =$	0	0	0	0	49	36	0	96	60	0	49	36

$Pa^2/10^5 N$

Die Superposition der Einzelergebnisse liefert die Ausbiegung infolge  $P = 1$  im Punkt 8 mit  $w_k = w_k^I + w_k^{II} + w_k^{III} + w_k^{IV}$  nach der Zusammenstellung auf S. 692. Das Ergebnis ist in Abb. 671 dargestellt.

5. Schnittkräfte nach (1003)ff. und (1008), z. B.

$$M_{x,8} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[ -890 + 2 \cdot 1029 - 580 + \frac{1}{6} (-919 + 2 \cdot 1029 - 573) \right] = 0,246 P.$$

$$M_{y,8} = \frac{36 N}{a^2} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[ \frac{1}{6} (-890 + 2 \cdot 1029 - 580) - 919 + 2 \cdot 1029 - 573 \right] = 0,239 P.$$

$$M_{x,16} = \frac{36 N}{4 a^2} \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \frac{Pa^2}{10^5 N} [-339 - 339 - 339 - 339] = -0,102 P.$$

$$A_{z,18} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[ 4 \left( 3 - \frac{1}{6} \right) 580 - 2 \cdot 1029 - 2 \left( 2 - \frac{1}{6} \right) (548 + 339) \right] = 1,36 P/a.$$

$$A_{y,13} = \frac{216 N}{2 a^3} \cdot \frac{Pa^2}{10^5 N} \left[ 4 \left( 3 - \frac{1}{6} \right) 523 - 2 \cdot 890 - 2 \left( 2 - \frac{1}{6} \right) (573 + 365) \right] = 1,38 P/a.$$



Die Schnittkräfte sind in Abb. 673 dargestellt. Der Auflagerdruck ergibt sich etwas zu groß, da das Integral längs des ganzen Randes etwa  $1,4 P$  wird. Der Fehler nimmt mit der Gitterteilung ab.

			$P a^2/N$	$P a^2/N$	$P a^2/N$	$P a^2/N$
12			0,00339			
11			0,00573			
10			0,00523			
9			0,00580			
8			0,01029			
7			0,00890			
6			0,00548			
5			0,00919			
4			0,00889			
3			0,00425			
2			0,00706			
1			0,00729			
	$w_k$					
	$w_{k'}$					
	$w_{k''}$					
	$w_{k'''}$					

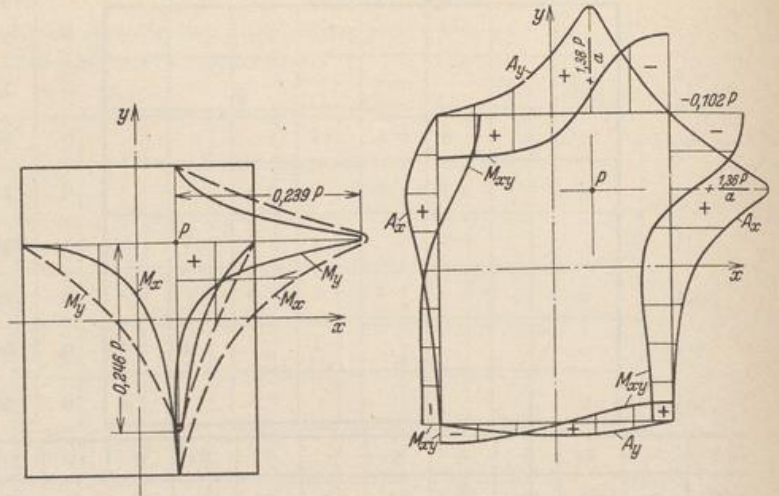


Abb. 673.

a) Biegemomente der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P. b) Randkräfte der frei aufliegenden rechteckigen Platte mit einer Einzellast P.

Die Aufgabe kann auch mit einem Ansatz gelöst werden, wenn ein gröberes Gitter gewählt wird. Für das Gitter nach Abb. 674 lauten z. B. die Differenzgleichungen mit  $s = a/3$

						$P$	$P a^2$
						4	$10^5 N$
8''	8'''	2'	2	8'	8	0	218
-1	4		-1			0	313
-1		4	-1	-1		0	552
	-1	-1	4		-1	0	1035
		-1		4	-1	0	958
			-1	-1	4	4	3275

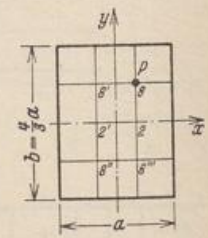


Abb. 674.

$k =$	8''	8'''	2'	2	8'	8	
$w_k =$	285	345	575	786	680	1186	$P a^2/10^5 N$

Diese Werte sind als Näherung durchaus noch brauchbar, wie der Vergleich mit der Zahlentafel am Rande der Seite zeigt. Für die Schnittkräfte sind dagegen größere Abweichungen zu erwarten.

So ist z. B.  $M_{x,8} = 0,176 P$  gegenüber  $0,246 P$ . Genauere Werte ergeben sich, wenn die Biegefläche mit den Näherungswerten aufgezeichnet wird und die Ordinaten zur Bestimmung der Momente für eine engere Teilung der Zeichnung entnommen werden. Auf diese Weise wird z. B.  $M_{x,8} = 0,255 P$ .

**Berechnung einer Behälterwand mit hydrostatischer Belastung.**

Die rechteckige Seitenwand eines Behälters mit quadratischem Grundriß ist am oberen Rande frei, am unteren elastisch eingespannt und an den Seiten starr eingespannt. Sie kann



daher in erster Annäherung als Platte berechnet werden, die an drei Seiten starr eingespannt und an einer Seite kräftefrei ist.

Um die Rechnung abzukürzen, ist  $\mu = 0$  angenommen worden.

1. Gitterteilung (Abb. 675).

$$s = \frac{a}{3} = \frac{b}{4}.$$

2. Randwerte nach (938) und (943). An den eingespannten Rändern ist

$$w_k = 0, \quad w_{18} = w_6 \text{ usw.}, \quad w_{25} = w_1 \text{ usw.}$$

Am freien Rand ist  $M_y = 0, A_y = 0$ . Mit (1003) folgt daraus

$$w_7 = 2w_5 - w_3, \quad w_8 = 2w_6 - w_4, \quad w_9 = 0.$$

Diese Beziehungen liefern mit (1005)

$$w_{10} = w_1 - 12w_3 + 8w_4 + 12w_5 - 8w_6,$$

$$w_{11} = w_2 + 4w_3 - 12w_4 - 4w_5 + 12w_6.$$

3. Die Belastungszahlen. Die hydrostatische Belastung wird nach S. 682 über den Plattenrand hinaus stetig fortgesetzt und nach dem Hebelgesetz auf die Gitterpunkte verteilt (Abb. 675).

$$p_5 = p_6 = 0, \quad p_3 = p_4 = \frac{1}{3} p_0, \quad p_1 = p_2 = \frac{2}{3} p_0, \quad p_{17} = p_{16} = p_0.$$

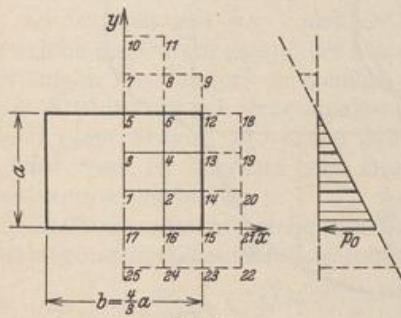


Abb. 675.

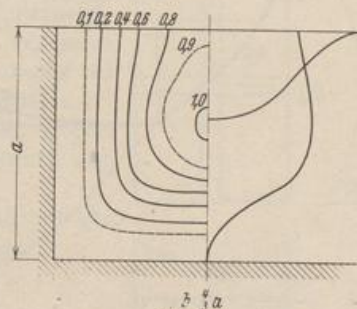


Abb. 676.

4. Differenzengleichungen (1000) für die Gitterpunkte 1 bis 6. Beim Aufstellen der Differenzengleichungen werden die Randbedingungen unter 2 berücksichtigt.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$\frac{p_0 a^4}{1000 N}$
21	-16	-8	4	1		8,23
-8	23	2	-8		1	8,23
-8	4	19	-16	-6	4	4,12
2	-8	-8	21	2	-6	4,12
2		-12	8	16	-16	0
	2	4	-12	-8	18	0

5. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	
$w_k =$	2,003	1,362	2,265	1,728	2,321	1,442	$p_0 a^4 / 1000 N$

Die Biegefläche ist in Abb. 676 dargestellt.



6. Schnittkräfte nach (1003) ff. und (1012), z. B.

$$M_{y,17} = \frac{9N}{a^2} \frac{p_0 a^4}{1000N} [-2,003 - 2,003] = 0,036 p_0 a^2,$$

$$M_{x,12} = \frac{9N}{a^2} \frac{p_0 a^4}{1000N} [-1,442 - 1,442] = 0,026 p_0 a^2,$$

$$A_{y,17} = \frac{27N}{2a^3} \frac{p_0 a^4}{1000N} [16 \cdot 2,003 - 2 \cdot 2,658 - 4 \cdot 2,724] + \frac{p_0 a}{6} = 0,38 p_0 a.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 677 eingetragen.

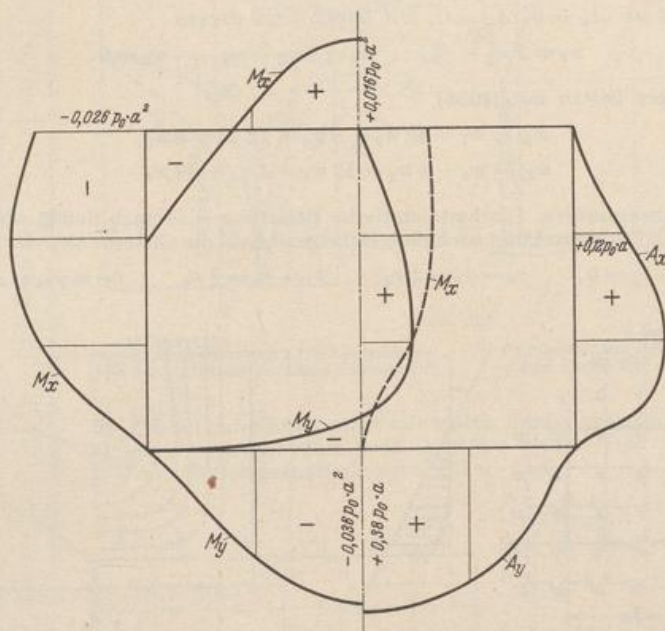


Abb. 677.

Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924, u. Arm. Beton 1919 S. 107. — Nielsen, N. S.: Bestemmelse af Spøendinger in Plader ved anvendelse af Differensligninger. Kopenhagen 1920. — Kirsten, O.: Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platte mit beliebigen Randbedingungen. Diss. Dresden 1924.

## 72. Die Abschätzung des Spannungszustandes in rechteckigen Platten nach H. Marcus.

Die Anwendung der Plattenstatik im Bauwesen ist durch die Beschreibung der statischen und geometrischen Zusammenhänge mit Differenzen und Differenzgleichungen aus den Ordinaten  $w_k$  der elastischen Fläche wesentlich gefördert worden, da die Aufgaben mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln für die Bedürfnisse der Technik hinreichend genau gelöst werden. Da es jedoch in vielen Fällen genügt, das Spannungsbild zur Beurteilung der Sicherheit des Tragwerks in elementarer Weise summarisch zu erfassen, wird die Plattenbiegung in erster Annäherung mit der Formänderung zweier sich rechtwinklig kreuzender Trägerschaaren  $l_x, l_y$  verglichen, die sich unabhängig voneinander durchbiegen und die an den Enden unter denselben Bedingungen gelagert sind, wie der Plattenrand. Die Formänderung der Träger  $l_x$  entsteht durch eine Belastung  $p(x)$ , diejenige der Träger  $l_y$  aus einer Belastung  $p(y)$ . Ihre Summe ist an jedem Kreuzungspunkt  $(x, y)$  gleich der vorgeschriebenen Belastung  $p = p(x) + p(y)$  (Abb. 678). Bilden die Trägerschaaren



einen Rost (Abschn. 65), dessen Elemente sich an den Kreuzungspunkten nicht mehr relativ zueinander verschieben, so entstehen für  $\phi(x)$  und  $\phi(y)$  Bedingungengleichungen, die sich jedoch nur dann einfach anschreiben lassen, wenn allein zwei ausgezeichnete Träger  $l_x, l_y$  betrachtet werden. Hierfür werden die Träger mit der größten Durchbiegung ausgewählt.

Bei freier Auflagerung der Platte (Abb. 678) sind die größten Durchbiegungen der Träger in Trägermitte

$$\delta_x = \frac{5}{384} \frac{p_x l_x^4}{E J_x}, \quad \delta_y = \frac{5}{384} \frac{p_y l_y^4}{E J_y},$$

wenn  $\phi(x), \phi(y)$  in erster Annäherung konstant angenommen werden. Da  $\phi = \phi_x + \phi_y$  und  $\delta_x = \delta_y$ , so ist für  $J_x = J_y$

$$\phi_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \phi, \quad \phi_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} \phi. \quad (1017)$$

Die Anteile  $\phi_x, \phi_y$  von  $\phi$  ändern sich mit der Art der Stützung des Plattenrandes. Ihre Größe ist für jeden Fall in der Übersicht S. 698 enthalten.

Die Formänderung der Platte unterscheidet sich von derjenigen eines Trägers  $l_x, l_y$  durch die Verdrillung der Plattenstreifen infolge von Schubspannungen an den Streifenrändern. Sie bilden an Streifen mit  $x = \text{const}$  Drillungsmomente  $M_{xy}$ , an Streifen mit  $y = \text{const}$  Drillungsmomente  $M_{yx}$ , welche die Durchbiegung der Platte im Vergleich zu derjenigen des Trägers verkleinern und daher bei gleicher Ausbiegung die Tragfähigkeit der Platte im Vergleich zum Träger vergrößern (Abb. 678). Dieses Bild wird von H. Marcus zur Beschreibung der Plattenbiegung verwendet.

Die Drillungsmomente stehen nach S. 645 mit der Plattenbiegung in folgendem Zusammenhang:

$$M_{xy} = M_{yx} = -N(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Sie ändern sich beim Fortschreiten in der  $x$ - oder  $y$ -Richtung um  $\partial M_{xy}/\partial x$  oder  $\partial M_{yx}/\partial y$ , so daß an einem Plattenstreifen  $l_x$  oder  $l_y$  von der Breite  $b$  ein Unterschied  $M_x, M_y$  der Drillungsmomente entsteht,

$$M_x = b \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad M_y = b \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad (1018)$$

der sich als Belastung der Streifen  $l_x, l_y$  durch ein stetig verteiltes Kräftepaar  $M_x, M_y$  deuten läßt. Dieses erzeugt die Biegemomente  $M'_x, M'_y$ , die mit den Biegemomenten  $M_x, M_y$  aus der Belastung  $\phi_x, \phi_y$  überlagert werden. Das Ergebnis  $M_x^*, M_y^*$  zeigt folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} M_x^* &= M_x + M'_x = M_x \left( 1 + \frac{M'_x}{M_x} \right) = M_x (1 - \varphi_x), \\ M_y^* &= M_y + M'_y = M_y \left( 1 + \frac{M'_y}{M_y} \right) = M_y (1 - \varphi_y). \end{aligned} \right\} \quad (1019)$$

$$M'_x = -b \int \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx + C_1 = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_1 = -N(1 - \mu) b \frac{1}{\rho_y^2} + C_1,$$

$$M'_y = -b \int \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dy + C_2 = -N(1 - \mu) b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_2 = -N(1 - \mu) b \frac{1}{\rho_x^2} + C_2.$$

Die Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  sind bei achsensymmetrischer Belastung und frei drehbarer Auflagerung der Streifenenden Null. Die Biegemomente  $M'_x, M'_y$

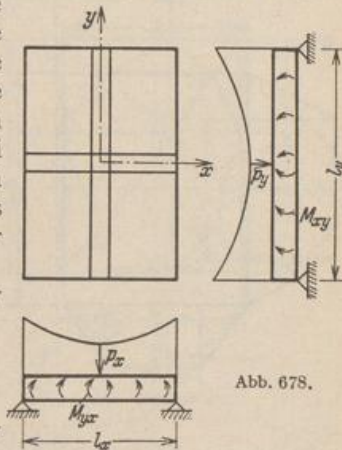


Abb. 678.



werden also von der Verkantung der Streifen  $l_x, l_y$  bestimmt. Sie erzeugen allein die Ausbiegung  $w'_x, w'_y$ , die mit der Ausbiegung  $w_x, w_y$  aus der Belastung  $p_x, p_y$  überlagert, die Formänderung  $w_x^*, w_y^*$  der Streifen der Plattenbiegung angleicht.

$$w_x^* = w_x + w'_x, \quad w_y^* = w_y + w'_y.$$

Wird der Verlauf der Biegemomente  $M'_x, M'_y$  in erster Annäherung als ähnlich zu demjenigen von  $M_x, M_y$  angenommen, so ist ebenfalls in erster Annäherung

$$w'_x/w_x = w'_y/w_y = c \quad \text{und} \quad w'_x = c w_x, \quad w'_y = c w_y$$

und mit  $w_x^* = w_y^*$  ebenso wie auf S. 695

$$w_x = w_y, \quad \text{also} \quad p_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} p, \quad p_y = \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4} p.$$

Die Biegemomente  $M'_x, M'_y$  der Streifen  $l_x, l_y$  aus den Drillungsmomenten sind von H. Marcus durch den Vergleich mit den Ergebnissen der strengen Theorie in Plattenmitte abgeleitet worden.

Die Grenzwerte der Biegemomente  $M'_x = -\varphi_x M_x, M'_y = -\varphi_y M_y$  zweier ausgezeichneten Plattenstreifen  $l_x, l_y$  mit dem Unterschied  $M_x, M_y$  der Drillungsmomente an den Intervallgrenzen als Belastung können nach H. Marcus durch

$$\varphi_x = c_y \left(\frac{l_x}{l_y}\right)^2, \quad \varphi_y = c_x \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^2 \quad (1020)$$

angegeben werden. Die Beiwerte  $c_x, c_y$  beschreiben dabei im wesentlichen die Randbedingungen der Platte. Sie werden von H. Marcus aus einem Vergleich mit denselben Biegemomenten der Plattentheorie abgeschätzt.

$$c_y = \frac{5}{6} \frac{M_{x \max}}{M_{0x}}, \quad c_x = \frac{5}{6} \frac{M_{y \max}}{M_{0y}}. \quad (1021)$$

In diesem Ansatz sind  $M_{x \max}, M_{y \max}$  die größten Biegemomente aus der Belastung  $p_x, p_y$  der Plattenstreifen  $l_x, l_y$  mit den vorgeschriebenen Rand-

bedingungen,  $M_{0x}, M_{0y}$  die größten Biegemomente zweier frei aufliegender Plattenstreifen  $l_x, l_y$  für die volle Belastung  $p = p_x + p_y$ . Die größten Biegemomente der drillungssteifen Platte  $M_{x \max}^*, M_{y \max}^*$  entstehen daher nach H. Marcus in erster Annäherung aus einer einheitlichen Lösung

$$M_{x \max}^* = M_{x \max} (1 - \varphi_x) = M_{x \max} \nu_x, \quad M_{y \max}^* = M_{y \max} (1 - \varphi_y) = M_{y \max} \nu_y, \quad (1022)$$

deren Ergebnisse sich mit denjenigen der Plattentheorie vergleichen lassen.

An den eingespannten Plattenrändern sind nach (942) keine Drillungsmomente vorhanden. Die Schaulinien der Biegemomente am Rande berühren die Bezugsachsen an den Ecken (S. 679). Als Mittelwerte  $M_{xr}, M_{yr}$  genügen die Einspannungsmomente der ausgezeichneten Plattenstreifen  $l_x, l_y$  aus der Belastung  $p_x, p_y$  (Abb. 679).

$$M_{xr} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad M_{yr} = -\frac{p_y l_y^2}{12} < -\frac{p l_x^2}{24} \quad \text{bei} \quad l_x < l_y. \quad (1023)$$

Der Grenzwert kann nach H. Marcus mit

$$M_{x \min} = -\frac{p_x l_x^2}{12 \nu_x}, \quad M_{y \min} = -\frac{p_y l_y^2}{12 \nu_y} \approx -\frac{p l_x^2}{20} \quad (1024)$$

angenommen werden.

Das Bild der Biegemomente in den mittleren Querschnitten ist durch die strengen Lösungen der Aufgabe in Abb. 649 gegeben. Das Ergebnis ist in der

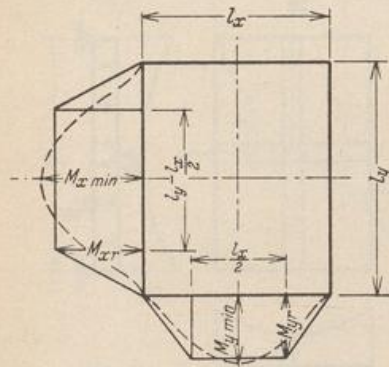


Abb. 679.



Tab. 65 enthalten und wird in den bekannten Bestimmungen des Deutschen Ausschusses (§ 23) verwendet. Die Platten Abb. 685 und 686 sind danach gerechnet worden.

Die Rechenvorschriften für die rechteckige Platte lassen sich auch zur Abschätzung der Biegemomente in durchgehenden Platten anwenden, da die Randbedingungen der einzelnen Felder bei gleichförmiger Belastung angenähert mit denjenigen der einzelnen Platte mit frei aufliegenden oder eingespannten Rändern übereinstimmen. Schachbrettartige Belastung wird umgeordnet und besteht dann aus der gleichförmigen Belastung  ${}^{(1)}p = p/2$  und aus abwechselnder Belastung der Felder mit  ${}^{(2)}p = \pm p/2$ , so daß  $p = {}^{(1)}p + {}^{(2)}p$ . Die Randbedingungen der Felder sind für  ${}^{(2)}p$ , unendliche Ausdehnung der Platte angenommen, mit freier Auflagerung identisch.

**Drillungsmomente.** Die Tragfähigkeit einer Platte beruht, verglichen mit dem Trägerrost, auf der Mitwirkung der Drillungsmomente. Die größten Biegemomente von Platte und Rost stehen nach (1022) im Verhältnis  $\nu_x, \nu_y$ . Im übrigen wird die Festigkeit der Platte durch die Hauptbiegemomente  $M_I, M_{II}$  bestimmt, die sich nach (921) aus  $M_x^*, M_y^*$  und den Drillungsmomenten zusammensetzen. Diese treten nach (919) in folgende Beziehung zum Verschiebungszustand  $w(x, y)$  der Platte:

$$\begin{aligned} M_{xy} = M_{yx} &= -N(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= -N(1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1025)$$

Das Drillungsmoment ist daher bei achsensymmetrischer Belastung an allen Punkten der Biegefläche Null, in denen die Tangentialebene an die Biegefläche parallel zur  $x$ - oder  $y$ -Achse ist, und wechselt auf diesen ausgezeichneten Parallelen das Vorzeichen. Es ist im ersten und dritten Quadranten negativ, im zweiten und vierten Quadranten positiv. Die Funktion  $M_{xy}$  erhält einen Extremalwert, wenn

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (1026)$$

Die Bedingungen sind in einem Punkte  $S$  erfüllt, in welchem die Schnitte  $x = \text{const}$  und  $y = \text{const}$  der elastischen Fläche einen gemeinsamen Wendepunkt besitzen. Die Ordinaten  $M_{xy}$  beschreiben daher vier Körper, deren Grundriß mit  $M_{xy} = 0$  durch die ausgezeichneten Geraden  $x = s_A, y = t_A$  bestimmt ist, die sich in dem Punkte  $O$  mit  $w = w_{\max}$  schneiden. Der Inhalt  $V$  eines Körpers ist durch Integration nach Abb. 680

$$V = \int_0^{s_A} \int_0^{t_A} M_{xy} dx dy = -N(1-\mu) \int_0^{s_A} \int_0^{t_A} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = -N(1-\mu) w_{\max}, \quad (1027)$$

also proportional zur größten Ausbiegung der Platte. Da nun die Drillungsmomente in erster Annäherung als lineare Funktionen angenommen werden können und bei starrer Einspannung längs des Randes Null sind, approximiert H. Marcus den Körper als Pyramide und setzt

$$\begin{aligned} V &= -N(1-\mu) w_{\max} = \frac{1}{3} s_A t_A M_{xy, \max}^{(A)} = -\frac{1}{3} s_B t_B M_{xy, \max}^{(B)} \\ &= \frac{1}{3} s_C t_C M_{xy, \max}^{(C)} = -\frac{1}{3} s_D t_D M_{xy, \max}^{(D)}. \end{aligned} \quad (1028)$$

Die größte Durchbiegung  $w_{\max}$  ist durch die Biegemomente  $M_{x \max}^*$  oder  $M_{y \max}^*$  und durch die Spannungsmomente  $M_{xr}, M_{yr}$  der beiden ausgezeichneten

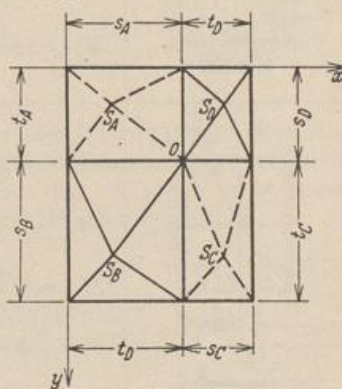


Abb. 680.



Tabelle 65. Abschätzung der größten Biegemomente in rechteckigen Platten mit gleichmäßig verteilter Last nach H. Marcus.

$\lambda = l_y/l_x$ , ..... frei aufliegender, // // // // // eingespannter Rand.

	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{8} v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{5}{6} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v$ $M_{x_r} = M_{y_r} = 0, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{72} v$
	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{5}{18} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{24} v$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{24}, \quad (l_x < l_y), \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{192} \frac{v}{1 + v^2}$
	$p_x = p \frac{5 \lambda^4}{2 + 5 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{75}{32} \frac{\lambda^2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{9}{128} p_x l_x^2 v_x$ $p_y = p \frac{2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{5}{3} \frac{\lambda^2}{2 + 5 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{720} (1,064 + 2,815 v_x)$
	$p_x = p \frac{5 \lambda^4}{1 + 5 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{25}{18} \frac{\lambda^2}{1 + 5 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v_x$ $p_y = p \frac{1}{1 + 5 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{5}{6} \frac{\lambda^2}{1 + 5 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{p_y l_y^2}{8} v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{12}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{360} v_y$
	$p_x = p \frac{2 \lambda^4}{1 + 2 \lambda^4}, \quad v_x = 1 - \frac{5}{9} \frac{\lambda^2}{1 + 2 \lambda^4}, \quad M_{x \max} = \frac{p_x l_x^2}{24} v_x$ $p_y = p \frac{1}{1 + 2 \lambda^4}, \quad v_y = 1 - \frac{15}{32} \frac{\lambda^2}{1 + 2 \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{9}{128} p_y l_y^2 v_y$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{192} \frac{v_x}{1 + v_x}$
	$p_x = p \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}, \quad v_x = v_y = v, \quad M_{x \max} = \frac{9}{128} p_x l_x^2 v$ $p_y = p \frac{1}{1 + \lambda^4}, \quad v = 1 - \frac{15}{32} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^4}, \quad M_{y \max} = \frac{9}{128} p_y l_y^2 v$ $M_{x_r} = -\frac{p_x l_x^2}{8}, \quad M_{y_r} = -\frac{p_y l_y^2}{8}, \quad N w_{\max} = \frac{p_x l_x^4}{720} (1,064 + 2,815 v)$



Plattenstreifen  $l_x, l_y$  nach Abschn. 20 bestimmt. Sie ist in der Tabelle S. 698 angegeben, so daß damit nach Gl. (1028) die Drillungsmomente errechnet werden können. Außerdem werden von H. Marcus mit Abb. 681 und  $\mu = 0$  noch die Quadraturen (1029) verwendet. Der Ursprung des Koordinatensystems ist dabei im Punkte  $O$  mit  $w = w_{\max}$  angenommen.

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x M_x dx &= -N \int_0^x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = - \left[ N \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^x = -N \frac{\partial w}{\partial x} = F_x, \\ \int_0^y M_y dy &= -N \int_0^y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy = - \left[ N \frac{\partial w}{\partial y} \right]_0^y = -N \frac{\partial w}{\partial y} = F_y, \\ \int_y^b M_{xy} dy &= -N \int_y^b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy = + \left[ N \frac{\partial w}{\partial x} \right]_y^b = +N \frac{\partial w}{\partial x} = F_{xy}, \\ \int_x^a M_{yx} dx &= -N \int_x^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx = + \left[ N \frac{\partial w}{\partial y} \right]_x^a = +N \frac{\partial w}{\partial y} = F_{yx}. \end{aligned} \right\} (1029)$$

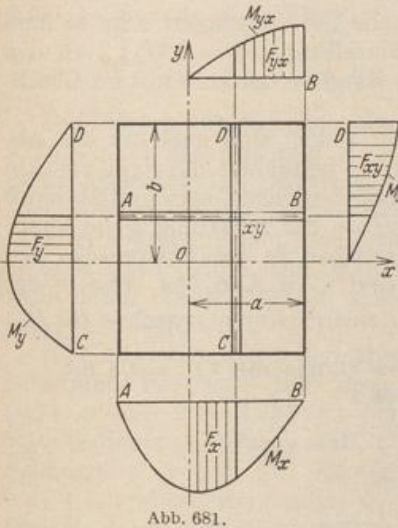


Abb. 681.

Daher gelten für die Flächen aus den Biege- und Drillungsmomenten über zugeordneten Abschnitten der Strecken  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  folgende Beziehungen:

$$F_x = -F_{xy}, \quad F_y = -F_{yx} \quad (1030)$$

Sie dienen zur Nachprüfung der größten Drillungsmomente  $M_{xy, \max}$ .

**Die Auflagerkräfte der Platte.** Die Querkräfte und Drillungsmomente an den Rändern der Platte werden entweder von einem Unterbau oder von Randträgern aufgenommen. Der Anteil aus den Querkräften läßt sich bei den gleichen Randbedingungen an

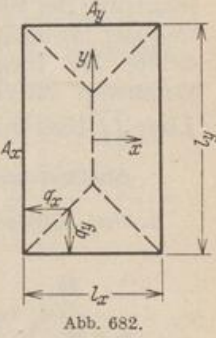


Abb. 682.

allen vier Rändern angenähert aus der Unterteilung der Grundfläche durch die Winkelhalbierenden in den Ecken angeben. Nach Abb. 682 ist mit  $l_y/l_x = \lambda > 1$

$$\int_{-l_y/2}^{+l_y/2} q_x dy = Q_x = \frac{1}{4} p l_x^2 (2\lambda - 1), \quad \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} q_y dx = Q_y = \frac{1}{4} p l_x^2. \quad (1031)$$

Bei verschiedener Lagerung der Ränder kann nach H. Marcus

$$Q_x = \frac{1}{2} p_x l_x l_y, \quad Q_y = \frac{1}{2} p_y l_x l_y,$$

gesetzt werden, wobei jedoch für die kurzen Ränder dasjenige  $p_x$  oder  $p_y$  zu wählen ist, das der quadratischen Platte entspricht.

Die Drillungsmomente an eingespannten Rändern sind Null. Der Verlauf der Drillungsmomente am Rande des ersten Quadranten einer freiaufliegenden Platte



ist in Abb. 683 dargestellt. Sie können durch einen Randträger aufgenommen werden, der auf diese Weise eine Momentenbelastung mit entgegengesetztem Dreh-sinn erhält und damit nach Abb. 678 am Rande  $l_y$  Biegemomente im Betrage von  $-\int_y^{l_y/2} M_{xy} dy$ , am Rande  $l_x$  Biegemomente im Betrage von  $-\int_x^{l_x/2} M_{yx} dx$

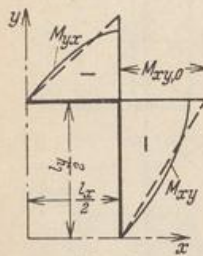


Abb. 683.

erhält. Wird der Verlauf der Drillungsmomente in erster Annäherung linear mit  $M_{xy,0}$  am Eckpunkt angenommen, so sind die Biegemomente in der Mitte der Randträger

$$-\int_0^{l_y/2} M_{xy} dy = -\frac{M_{xy,0} l_y}{4},$$

$$-\int_0^{l_x/2} M_{yx} dx = -\frac{M_{yx,0} l_x}{4}.$$

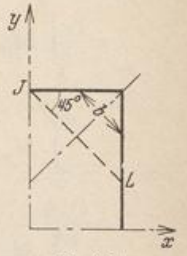


Abb. 684.

Da jedoch die Randträger aufliegen, tritt zu den Stützkraften  $Q_x, Q_y$  aus der Querkraft am Rande noch der Anteil

$$Q'_x = Q'_y = -2 M_{xy,0} = \frac{p v_x}{3} l_y^2 \frac{\lambda}{1 + \lambda^4}. \quad (1032)$$

Würde die Platte ohne Versteifungsträger am Rande frei aufgelagert sein, so muß die ihnen zugewiesene Kraftwirkung durch 4 Einzelkräfte  $C = 2 M_{xy,0}$  an den Ecken ersetzt werden, die mit der stetig über dem Rand verteilten Kraft im Gleichgewicht stehen.

Die äußeren Kräfte am Rande im Bereich der Ecken sind auch für die Abschätzung der Biegemomente wichtig. H. Marcus betrachtet die Ecke zur Abschätzung der Biegungsspannungen als Stab mit veränderlicher Querschnittsbreite  $b$  und der Winkelhalbierenden als Achse. Er trägt neben der Belastung  $p$  die Randkräfte. Die Biegemomente  $M_1$  des Stabes erreichen in der Plattenecke den Größt-wert im Betrage von  $-M_{xy,0}$  mt/m und sind nach Abb. 654 etwa in der Linie  $\bar{J}L$  Null (Abb. 684). Diese kennzeichnet daher einen Spannungswechsel für  $M_1$ .

**Abschätzung der Schnittkräfte in rechteckigen Platten mit  $l_y/l_x = 4/3$  für gleichmäßige Belastung  $p$ .**

1. Frei aufliegende Platte.

$$\lambda = 4/3 = 1,333, \quad \lambda^2 = 1,778, \quad \lambda^4 = 3,160.$$

Nach Tabelle 65 ist

$$p_x = p \frac{3,160}{4,160} = 0,759 p,$$

$$p_y = p \frac{1}{4,160} = 0,241 p,$$

$$v = 1 - \frac{5}{6} \frac{1,778}{4,160} = 0,644,$$

$$M_{x, \max} = \frac{0,759}{8} \cdot 0,644 p l_x^2 = 0,061 p l_x^2,$$

$$M_{y, \max} = \frac{0,241}{8} \cdot 0,644 p l_y^2 = 0,0194 p l_y^2 = 0,035 p l_x^2,$$

$$N w_{\max} = \frac{0,759}{72} \cdot 0,644 p l_x^4 = 0,00678 p l_x^4.$$

Nach (1028) ist

$$\frac{1}{3} M_{xy,0} \frac{l_x}{2} \frac{l_y}{2} = -0,00678 p l_x^4, \quad M_{xy,0} = -0,061 p l_x^2.$$

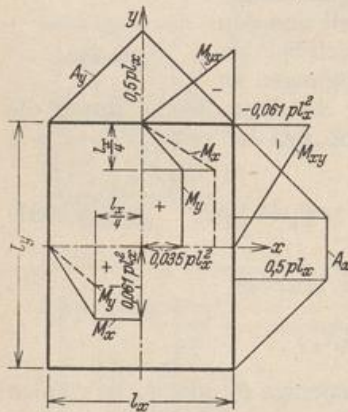


Abb. 685.



2. Eingespannte Platte.

$$\lambda = 4/3 = 1,333,$$

$$p_x = 0,759 p, \quad p_y = 0,241 p,$$

$$\nu = 1 - \frac{5}{18} \cdot \frac{1,778}{4,160} = 0,881,$$

$$M_{x, \max} = \frac{0,759}{24} \cdot 0,881 p l_x^2 = 0,028 p l_x^2,$$

$$M_{y, \max} = \frac{0,241}{24} \cdot 0,881 p l_y^2 = 0,00885 p l_y^2 = 0,016 p l_x^2,$$

$$M_{x, r} = -\frac{0,759}{12} p l_x^2 = -0,063 p l_x^2,$$

$$M_{y, r} = -\frac{p l_y^2}{24} = -0,042 p l_x^2,$$

$$N w_{\max} = \frac{0,759}{192} \cdot \frac{0,881}{1 + 0,881^2} p l_x^4 = 0,00196 p l_x^4.$$

Nach (1028) ist

$$\frac{1}{3} M_{xv,0} \frac{l_x}{2} \frac{l_y}{2} = -0,00196 p l_x^4, \quad M_{xv,0} = -0,018 p l_x^2.$$

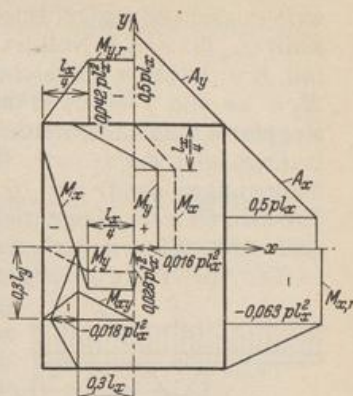


Abb. 686.

Klagas: Auswertung der Marcusschen Formeln für vierseitig gelagerte Platten. Bauing. 1927 S. 251. — Marcus, H.: Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 2. Aufl. Berlin 1929.

### 73. Die Pilzdecke.

Die Platten mit Zwischenstützung in Punkten oder Flächen sind von A. Nadai, V. Lewe, H. Marcus und N. J. Nielsen untersucht worden. Dabei wurden zunächst gleichförmige Belastung und unbegrenzte Ausdehnung nach beiden Seiten angenommen, um die Aufgabe durch Symmetriebetrachtungen zu vereinfachen. Die äußeren Kräfte und die Randbedingungen für den Spannungs- und Verschiebungszustand eines Feldes sind in diesem Falle bekannt. Die Lösung kann daher ebenso wie für eine rechteckige Platte nach S. 674 angegeben werden.

A. Nadai betrachtet den Abschnitt Abb. 687 der gleichförmig belasteten Pilzdecke mit den Randbedingungen  $\partial w / \partial x = 0$ ,  $Q_{xz} = 0$  und  $P = 4ab\phi$  in den Schnitten  $x = \pm a$  und den Randbedingungen  $\partial w / \partial y = 0$ ,  $Q_{yz} = 0$  und  $P = 4ab\phi$  in den Schnitten  $y = \pm b$ . Die Randkräfte  $P/4$ ,  $Q_{xz}$ ,  $P/4$  am Rande  $x = \pm a$  und die Randkräfte  $P/4$ ,  $Q_{yz}$ ,  $P/4$  am Rande  $y = \pm b$  können durch eine Fouriersche Reihe als stetige Funktion angegeben werden. Die Verschiebungen bestehen wiederum aus einer Teillösung  $w^*$  für den Plattenstreifen mit  $\partial w / \partial y = 0$  in  $y = \pm b$  und aus einer zweiten Teillösung  $w^{**}$ , welche zusammen mit  $w^*$  die vorgeschriebenen Randbedingungen des Abschnitts erfüllt. A. Nadai bemerkt auf Grund des Ergebnisses, daß um jeder Stütze eine geschlossene Linie vorhanden ist, auf der das Biegemoment  $M_r$  um die Tangente verschwindet. Sie schneidet die Diagonale des quadratischen Feldes mit der Seitenlänge  $2a$  in einer Entfernung von  $0,46a$ , die Verbindungslinie der Stützen in einer Entfernung  $0,42a$  vom Stützpunkt und läßt sich durch einen Kreis mit dem Halbmesser  $0,44a$  ersetzen. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher in dem Bereiche der Pilzdecke um den Stützpunkt mit guter Annäherung für eine frei drehbar angeschlossene Kreisplatte angeschrieben werden, die neben der gleichförmigen Belastung  $\phi$  in  $O$  eine Einzellast  $P = -4a^2\phi$  trägt, deren Querkraft an der Begrenzung  $r = 0,44a$  bekannt und deren Verschiebung  $w_0$  Null ist.



Abb. 687.



Eine ähnliche Näherungslösung ist von V. Lewe formuliert worden. Sie wird auf eine ringsum beweglich eingespannte Kreisplatte vom Radius  $R$  bezogen, deren Querkraft  $Q_{rz}$  für  $r = R$  Null ist (Abb. 688). Daher ist  $R$  aus der Bedingung  $\pi R^2 = 4 a^2$  mit  $R = 1,1286 a$  vorgeschrieben. Die Platte liegt auf einem kreisförmigen Pilz mit  $R_1 = \alpha a$  und  $J = \infty$ , so daß die Pilzdecke im Bereich der Stütze mit einer Kreisringplatte verglichen werden kann, deren Formänderung in  $r = R_1$  durch die Randbedingungen  $dw/dr = 0$ ,  $Q_{rz} = -p(R^2 - R_1^2)/2 R_1$ , in  $r = R$  durch die Randbedingungen  $dw/dr = 0$ ,  $Q_{rz} = 0$  bestimmt ist. Beide Lösungen können mit den Tabellen 63 u. 64 angeschrieben und auch für zwischengeschaltete kreisrunde Platten nach Abb. 689 erweitert werden.

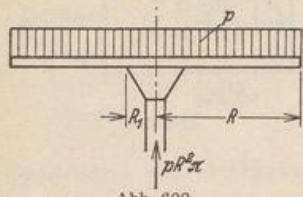


Abb. 688.

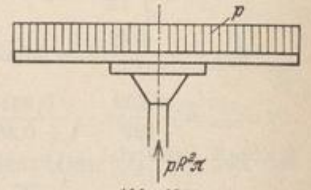


Abb. 689.

Die von V. Lewe angegebene strenge Lösung für die beiderseits unbegrenzte gleichförmig belastete und regelmäßig unterstützte Pilzdecke beruht, wie bereits auf S. 674 bemerkt, in der Entwicklung einer bekannten, aus der Belastung  $p$  und dem Flächendruck  $\bar{p}$  bestehenden periodischen Funktion in eine doppelte trigonometrische Reihe. Damit kann die Lösung für das Feld Abb. 687 ebenso wie bei der rechteckigen Platte (983) nach Navier angeschrieben werden. Leider konvergieren die Reihen vor allem für die Schnittkräfte schlecht, so daß die Zahlenrechnung mühsam und umfangreich ist. Sie wird durch eine Anzahl von Tabellen erleichtert, die Lewe seinem mehrfach erwähnten Buche beigegeben hat. Diese enthalten auch Angaben für zweiseitig und allseitig begrenzte Pilzdecken mit Streifen- und Schachbrettbelastung. Die Anwendung der Differenzenrechnung auf die Untersuchung des Spannungs- und Verschiebungszustandes von Pilzdecken ist von H. Marcus und N. J. Nielsen gezeigt worden.

**Die Berechnung einer nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.**

**Ansatz.** Die Aufgabe kann mit Differenzen in einer Stufe nach (1000) oder in zwei Stufen nach (1001), (1002) gelöst werden. Da die Iteration einer Anfangslösung in beiden Fällen infolge der schlechten Konvergenz versagt, bleibt nur die algebraische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß übrig, um die Ausbiegung  $w$  so genau angeben zu können, daß die Schnittkräfte trotz der Fehlerempfindlichkeit der Rechnung nach (1003) ff. brauchbar sind. Die algebraische Auflösung in zwei Stufen ist naturgemäß einfacher, obwohl dann für die Stützpunkte wegen ihrer singulären Eigenschaften keine Differenzengleichungen angeschrieben werden können, solange die Stützkräfte unbekannt sind. Deshalb werden diese als statisch unbestimmte Größen eines Hauptsystems, des frei aufliegenden Plattenstreifens, berechnet.

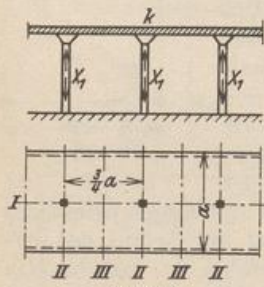


Abb. 690.

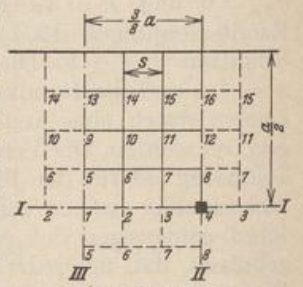


Abb. 691.

Bezeichnet  $w_1$  die senkrechte Verschiebung eines Punktes des Streifens infolge  $-X_1 = 1$ ,  $w_0$  diejenige infolge der Belastung, so ist

$$w = w_0 - X_1 w_1, \tag{1033}$$

an der Stütze  $k$ :  $w_k = 0 = w_{k0} - X_1 w_{k1}$ ,

$$X_1 = w_{k0} / w_{k1}. \tag{1034}$$

**Belastung.** Die Schnittkräfte werden für gleichmäßig verteilte Last, Schachbrettlast und Streifenlast angegeben. Bei gleichmäßig verteilter Last ist der Spannungs- und Form-



änderungszustand durch die Symmetrieachsen *I, II, III* Abb. 690 ausgezeichnet, so daß es genügt, einen von diesen Achsen begrenzten Abschnitt zu untersuchen (Abb. 691). Durch Belastungsumordnung ergeben sich daraus auch die Schnittkräfte für Schachbrettlast und Streifenlast.

**I. Berechnung für gleichmäßig verteilte Last  $p \text{ t/m}^2$ .**

A. Belastung des Hauptsystems durch  $-X_1 = 1$  in allen Angriffspunkten der Zwischenstützen.

1. Gitterteilung,  $s = a/8$ .
2. Randwerte.  $M$  und  $w$  sind zu den Achsen *I, II, III* symmetrisch; am Rande Null.
3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für 16 Gitterpunkte (Abb. 691).

Die Belastungszahlen  $p_k s^2$  der ersten Stufe sind bis auf diejenige für den Angriffspunkt (4) der Zwischenstütze Null, dagegen ist  $p_4 s^2 = 1$ . Die Belastungszahlen der zweiten Stufe sind

$$\frac{M_k s^2}{N} = \frac{M_k a^2}{64 N}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$a^2/N$
4	-2				-2												o $M_1/64$
-1	4	-1				-2											o $M_2/64$
	-1	4	-1				-2										o $M_3/64$
		-2	4					-2									1 $M_4/64$
-1				4	-2				-1								o $M_5/64$
	-1			-1	4	-1				-1							o $M_6/64$
		-1			-1	4	-1				-1						o $M_7/64$
			-1			-2	4					-1					o $M_8/64$
				-1				4	-2				-1				o $M_9/64$
					-1			-1	4	-1				-1			o $M_{10}/64$
						-1			-1	4	-1				-1		o $M_{11}/64$
							-1				-2	4				-1	o $M_{12}/64$
								-1					4	-2			o $M_{13}/64$
									-1				-1	4	-1		o $M_{14}/64$
										-1				-1	4	-1	o $M_{15}/64$
											-1				-2	4	o $M_{16}/64$

4. Auflösung. Um den Ansatz für die Anwendung des Gaußschen Algorithmus zu vereinfachen, wird das System partieller Differenzgleichungen zweiter Ordnung in simultane Gruppen totaler Differenzgleichungen verwandelt. Das Verfahren ist von H. Marcus allgemein gezeigt worden. Die partielle Differenzgleichung jeder der beiden Stufen enthält neben drei Wurzeln  $M$  oder  $w$  mit den Fußziffern  $(k-1), k, (k+1)$  einer Zeile  $k$  noch zwei Vorzahlen mit den Fußziffern  $i, l$  der benachbarten Zeilen. Daher besteht der Sinn der Transformation darin, die Wurzeln einer Zeile  $k$  derart durch ebenso viele unabhängige neue Unbekannte zu ersetzen, daß in den transformierten Gleichungen nur die Fußziffern dreier aufeinanderfolgender Zeilen erscheinen. Auf diese Weise entstehen hier vier voneinander unabhängige Gruppen von totalen Differenzgleichungen, von denen jede soviel dreigliedrige Gleichungen und Unbekannte enthält, als Gitterpunkte auf einer Zeile liegen.

Das Gitter Abb. 691 zur Berechnung der Pilzdecke besteht aus vier Zeilen und vier Normalen, die sich in 16 Gitterpunkten schneiden. Daher lassen sich in der Matrix unter 3 vier Gruppen von



je 4 Differenzgleichungen unterscheiden. Von diesen wird eine mittlere mit den Gitterpunkten  $5 \equiv k$  bis  $8 \equiv k+3$  herausgegriffen, um an einem Beispiel die Transformation zu zeigen. Die dieser Gruppe zugeordneten Gitterzeilen werden mit  $i \equiv 1$ ,  $k \equiv 5$ ,  $l \equiv 9$  unterschieden.

$M_i$	$M_{i+1}$	$M_{i+2}$	$M_{i+3}$	$M_k$	$M_{k+1}$	$M_{k+2}$	$M_{k+3}$	$M_l$	$M_{l+1}$	$M_{l+2}$	$M_{l+3}$	
-1				4	-2			-1				$g_k$
	-1			-1	4	-1			-1			$g_{k+1}$
		1-			-1	4	-1			-1		$g_{k+2}$
			-1			-2	4				-1	$g_{k+3}$

Die Gleichungen werden mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  multipliziert und darauf addiert. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 M_i - \alpha_2 M_{i+1} - \alpha_3 M_{i+2} - \alpha_4 M_{i+3} + (4\alpha_1 - \alpha_2) M_k + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3) M_{k+1} \\ & + (-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4) M_{k+2} + (-\alpha_3 + 4\alpha_4) M_{k+3} - \alpha_1 M_l - \alpha_2 M_{l+1} - \alpha_3 M_{l+2} - \alpha_4 M_{l+3} \\ & = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}; \end{aligned} \quad (1035)$$

es wiederholt sich nach Eintauschung der zugeordneten Fußziffern bei jeder der vier Gruppen. Um unabhängige Wurzeln totaler Differenzgleichungen zu erhalten, werden die Vorzahlen derart bestimmt, daß

$$\frac{4\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2} = \frac{-\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{-\alpha_3 + 4\alpha_4}{\alpha_4} = c \quad (1036)$$

ist. Damit geht Gl. (1035) über in

$$\begin{aligned} & -(\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3}) + c(\alpha_1 M_k + \alpha_2 M_{k+1} + \alpha_3 M_{k+2} + \alpha_4 M_{k+3}) \\ & -(\alpha_1 M_l + \alpha_2 M_{l+1} + \alpha_3 M_{l+2} + \alpha_4 M_{l+3}) = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}, \end{aligned} \quad (1037)$$

und mit der Substitution

$$\alpha_1 M_i + \alpha_2 M_{i+1} + \alpha_3 M_{i+2} + \alpha_4 M_{i+3} = T_i \quad (1038)$$

wird daraus

$$-T_i + c T_k - T_l = \alpha_1 g_k + \alpha_2 g_{k+1} + \alpha_3 g_{k+2} + \alpha_4 g_{k+3}. \quad (1039)$$

Die Gl. (1036) läßt sich folgendermaßen umformen

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 2\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = c - 4 = \mu.$$

Daraus entsteht das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \mu + \alpha_2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \mu + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \mu + 2\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 \mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1040)$$

Mit  $\alpha_1 = 1$  liefern die ersten drei Gleichungen

$$\alpha_2 = -\mu, \quad \alpha_3 = \mu^2 - 2, \quad \alpha_4 = \frac{\mu}{2}(3 - \mu^2) \quad (1041)$$

und aus der letzten folgt die algebraische Gleichung 4ten Grades für  $\mu$ :

$$\mu^4 - 5\mu^2 + 4 = 0 \quad (1042)$$

mit den vier Wurzeln  $\mu_{1,2} = \pm 1$ ,  $\mu_{3,4} = \pm 2$ , so daß mit (1040) vier Systeme von  $\alpha$  Vorzahlen bestimmt sind.

$\mu$	+1	-1	+2	-2
$\alpha_1$	1	1	1	1
$\alpha_2$	-1	1	-2	2
$\alpha_3$	-1	-1	2	2
$\alpha_4$	1	-1	-1	1

(1043)



Sie werden nach (1038) zu der folgenden Substitution verwendet.

$$\left. \begin{aligned} \mu = 1: & \quad M_k - M_{k+1} - M_{k+2} + M_{k+3} = T_k, & c = 5, \\ \mu = -1: & \quad M_k + M_{k+1} - M_{k+2} - M_{k+3} = U_k, & c = 3, \\ \mu = 2: & \quad M_k - 2M_{k+1} + 2M_{k+2} - M_{k+3} = V_k, & c = 6, \\ \mu = -2: & \quad M_k + 2M_{k+1} + 2M_{k+2} + M_{k+3} = W_k, & c = 2. \end{aligned} \right\} \quad (1044)$$

Die Gl. (1035) geht damit in vier neue, voneinander unabhängige Gleichungen über.

$$\left. \begin{aligned} -T_i + 5T_k - T_i &= g_k - g_{k+1} - g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_T, \\ -U_i + 3U_k - U_i &= g_k + g_{k+1} - g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_U, \\ -V_i + 6V_k - V_i &= g_k - 2g_{k+1} + 2g_{k+2} - g_{k+3} = \lambda_V, \\ -W_i + 2W_k - W_i &= g_k + 2g_{k+1} + 2g_{k+2} + g_{k+3} = \lambda_W. \end{aligned} \right\} \quad (1045)$$

Sind die neuen Unbekannten  $T, U, V, W$  dieser Gleichungen berechnet, so folgt aus (1044)

$$\left. \begin{aligned} M_k &= \frac{1}{6} (2T_k + 2U_k + V_k + W_k), \\ M_{k+1} &= \frac{1}{6} (-T_k + U_k - V_k + W_k), \\ M_{k+2} &= \frac{1}{6} (-T_k - U_k + V_k + W_k), \\ M_{k+3} &= \frac{1}{6} (2T_k - 2U_k - V_k + W_k). \end{aligned} \right\} \quad (1046)$$

Die Anwendung der Substitution (1044) auf die Matrix S. 703 liefert die vier folgenden, voneinander unabhängigen Gleichungssysteme.

Zur bequemeren Superposition werden gleich die Werte  $T/6, U/6, V/6, W/6$  ausgerechnet und jeweils die erste der Gleichungen durch 2 dividiert, um symmetrische Matrizen zu erhalten.

$T_1/6$	$T_5/6$	$T_9/6$	$T_{13}/6$	$a^2/N$	$U_1/6$	$U_5/6$	$U_9/6$	$U_{13}/6$	$a^2/N$
2,5	-1			1/12 $\lambda_{T,1}/12$	1,5	-1			-1/12 $\lambda_{U,1}/12$
-1	5	-1		o $\lambda_{T,2}/6$	-1	3	-1		o $\lambda_{U,2}/6$
	-1	5	-1	o $\lambda_{T,3}/6$		-1	3	-1	o $\lambda_{U,3}/6$
		-1	5	o $\lambda_{T,4}/6$			-1	3	o $\lambda_{U,4}/6$

$V_1/6$	$V_5/6$	$V_9/6$	$V_{13}/6$	$a^2/N$	$W_1/6$	$W_5/6$	$W_9/6$	$W_{13}/6$	$a^2/N$
3	-1			-1/12 $\lambda_{V,1}/12$	1	-1			1/12 $\lambda_{W,1}/12$
-1	6	-1		o $\lambda_{V,2}/6$	-1	2	-1		o $\lambda_{W,2}/6$
	-1	6	-1	o $\lambda_{V,3}/6$		-1	2	-1	o $\lambda_{W,3}/6$
		-1	6	o $\lambda_{V,4}/6$			-1	2	o $\lambda_{W,4}/6$

Die  $\lambda$ -Zahlen beziehen sich auf die zweite Stufe des Ansatzes.

Die Auflösung dieser Gleichungen für die erste Stufe liefert

$T_1/6$	0,036369	$U_1/6$	-0,074468	$V_1/6$	-0,029463	$W_1/6$	0,333332
$T_5/6$	0,007390	$U_5/6$	-0,028369	$V_5/6$	-0,005055	$W_5/6$	0,249999
$T_9/6$	0,001581	$U_9/6$	-0,010638	$V_9/6$	-0,008666	$W_9/6$	0,166666
$T_{13}/6$	0,000316	$U_{10}/6$	-0,003546	$V_{13}/6$	-0,000144	$W_{13}/6$	0,083333

Die Superposition nach (1046) ergibt die Momentensummen

$M_1$	0,227672	$M_5$	0,203388	$M_9$	0,147686	$M_{13}$	0,076729
$M_2$	0,251957	$M_6$	0,219096	$M_{10}$	0,155314	$M_{14}$	0,079615
$M_3$	0,341968	$M_7$	0,265724	$M_{11}$	0,174857	$M_{15}$	0,086419
$M_4$	0,584470	$M_8$	0,326973	$M_{12}$	0,191972	$M_{16}$	0,091202

die, durch 64 dividiert, nach S. 703 die Absolutglieder der zweiten Stufe sind. Aus diesen werden nach (1045) die Absolutglieder der transformierten Gleichungen gebildet.



$\lambda_{T,1}/12$	0,000284136	$\lambda_{U,1}/12$	-0,000581782	$\lambda_{V,1}/12$	-0,000230178	$\lambda_{W,1}/12$	0,002604156
$\lambda_{T,2}/6$	0,000118596	$\lambda_{U,2}/6$	-0,000443262	$\lambda_{V,2}/6$	-0,000078982	$\lambda_{W,2}/6$	0,003906250
$\lambda_{T,3}/6$	0,000024708	$\lambda_{U,3}/6$	-0,000166223	$\lambda_{V,3}/6$	-0,000013540	$\lambda_{W,3}/6$	0,002604167
$\lambda_{T,4}/6$	0,000004942	$\lambda_{U,4}/6$	-0,000055408	$\lambda_{V,4}/6$	-0,000002257	$\lambda_{W,4}/6$	0,001302083

Die Auflösung für die zweite Stufe liefert

$T_1/6$	0,000135	$U_1/6$	-0,000694	$V_1/6$	-0,000086	$W_1/6$	0,028645
$T_5/6$	0,000054	$U_5/6$	-0,000460	$V_5/6$	-0,000029	$W_5/6$	0,026042
$T_9/6$	0,000017	$U_9/6$	-0,000242	$V_9/6$	-0,000007	$W_9/6$	0,019531
$T_{13}/6$	0,000004	$U_{13}/6$	-0,000099	$V_{13}/6$	-0,000002	$W_{13}/6$	0,010417

Die Superposition nach (1046) ergibt die Durchbiegung  $w_1$ .

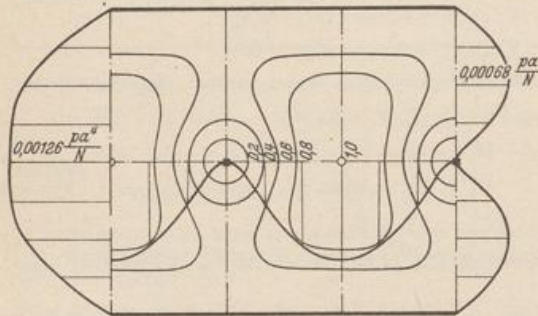


Abb. 692. Durchbiegung.

$w_{1,1}$	0,027441	$w_{5,1}$	0,025202
$w_{2,1}$	0,027903	$w_{6,1}$	0,025557
$w_{3,1}$	0,029119	$w_{7,1}$	0,026419
$w_{4,1}$	0,030392	$w_{8,1}$	0,027098
$w_{9,1}$	0,019074	$w_{13,1}$	0,010226
$w_{10,1}$	0,019280	$w_{14,1}$	0,010315
$w_{11,1}$	0,019749	$w_{15,1}$	0,010510
$w_{12,1}$	0,020055	$w_{16,1}$	0,010625

B. Gleichmäßig verteilte Belastung des Hauptsystems mit  $p \text{ t/m}^2$ . Die Lösung (981) für den gleichmäßig belasteten Halbstreifen liefert

$$w_{1,0} = 0,013021 p a^4/N, \quad w_{5,0} = 0,012055 p a^4/N,$$

$$w_{9,0} = 0,009277 p a^4/N, \quad w_{13,0} = 0,005056 p a^4/N.$$

Die Durchbiegungen der Punkte einer waagerechten Zeile des Gitters sind gleich.

C. Der Stützendruck der gleichmäßig belasteten Pilzdecke.

Nach (1034) ist

$$X_1 = P = \frac{w_{4,0}}{w_{4,1}} = \frac{0,013021 p a^4 N}{0,030392 N a^2} = 0,428436 p a^2.$$

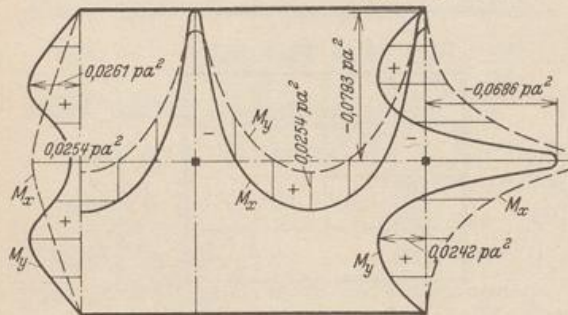


Abb. 693. Biegemomente.

D. Die Formänderung der Pilzdecke.

Die Superposition nach (1033) ergibt

$w_1$	0,0012639	$w_5$	0,0012572
$w_2$	0,0010664	$w_6$	0,0011051
$w_3$	0,0005453	$w_7$	0,0007358
$w_4$	0	$w_8$	0,0004447
$w_9$	0,0011054	$w_{13}$	0,0006748
$w_{10}$	0,0010170	$w_{14}$	0,0006365
$w_{11}$	0,0008162	$w_{15}$	0,0005530
$w_{12}$	0,0006850	$w_{16}$	0,0005037

Die Durchbiegung ist in Abb. 692 dargestellt.

E. Die Schnittkräfte.

Die Schnittkräfte ergeben sich aus der Durchbiegung nach (1003)ff. Die Biegemomente  $M_x$  und  $M_y$  sind in Abb. 693 für die drei Symmetrieachsen eingetragen.

### II. Berechnung für Schachbrettlast (Abb. 694).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last  $+ p/2$  und eine abwechselnde Belastung  $\pm p/2$ . Formänderung und Schnittkräfte der Pilzdecke für die verteilte Last sind aus I bekannt. Die abwechselnde Belastung bewirkt, daß sich jedes gleichartig belastete Feld wie eine ringsum frei aufliegende Platte verhält, die nach Abschn. 70 oder 71 berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 695 dargestellt.



III. Berechnung für die halbseitige Streifenlast (Abb. 696).

Die Belastung wird umgeordnet in eine gleichmäßig verteilte Last  $+ p/2$  und zwei abwechselnde Streifenlasten  $\pm p/2$  nach Abb. 696. Diese bewirkt, daß sich jeder gleichartig belastete Streifen wie ein beiderseits frei aufliegender Plattenstreifen verhält, der nach (981) berechnet wird. Formänderungen und Schnittkräfte sind in Abb. 697 dargestellt.

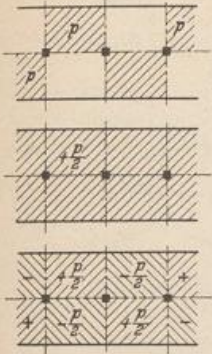
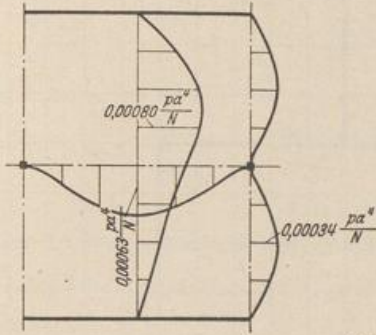


Abb. 694.



a) Durchbiegung.

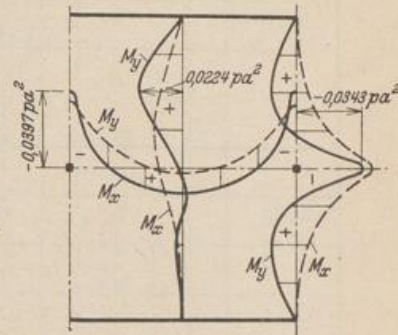


Abb. 695.

b) Biegemomente.

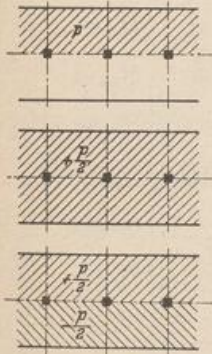
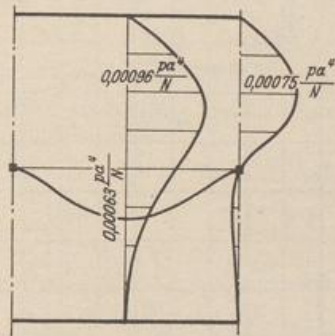


Abb. 696.



Durchbiegung.

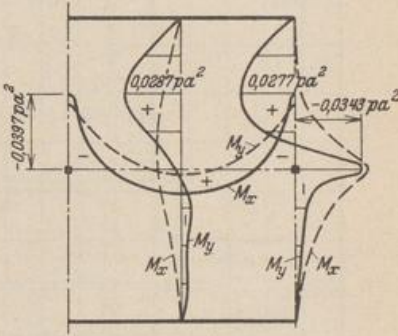


Abb. 697.

Biegemomente.

Die Berechnung einer nach einer Seite unendlich langen Pilzdecke mit einer Stützenreihe und frei aufliegenden Rändern.

Die Berechnung wird auf das Endstück mit der Länge  $b = \frac{3}{4} a$  beschränkt (Abb. 698). Da die Randwerte  $M$  und  $w$  auf der Geraden  $II$  unbekannt sind, werden hier in erster Annäherung die Formänderungen und Schnittkräfte der nach zwei Seiten unendlich langen Pilzdecken zugrunde gelegt. Der Fehler ist um so kleiner, je größer  $b$  gewählt wird. Die Rechnung wird in zwei Stufen durchgeführt und der Stützendruck als überzählige Größe berechnet. Das Hauptsystem ist ein Plattenhalbstreifen. Die Belastung sei gleichmäßig verteilt.

A. Belastung des Hauptsystems mit  $-X_1 = 1$ .

1. Gitterteilung (Abb. 699).  $s = a/8$ .

2. Randwerte.  $M$  und  $w$  sind an den aufliegenden Rändern Null, zur Achse  $I$  symmetrisch und auf der Geraden  $II$  vorgeschrieben.

$M_{21,1}$	0,091202	$w_{21,1}$	0,010625 $a^2/N$
$M_{22,1}$	0,191972	$w_{22,1}$	0,020055 "
$M_{23,1}$	0,326973	$w_{23,1}$	0,027098 "
$M_{24,1}$	0,584470	$w_{24,1}$	0,030392 "

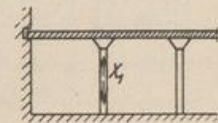


Abb. 698.



3. Differenzgleichungen (1001), (1002) für die 20 Gitterpunkte (Abb. 699).

$M_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$a^2/N$	
4	-1																			o	$M_1/64$
-1	4	-1																		o	$M_2/64$
																				o	$M_3/64$
																				o	$M_4/64$
																				$M_{24,1}$	$M_5/64 + w_{24,1}$
-1																				o	$M_6/64$
																				o	$M_7/64$
																				o	$M_8/64$
																				o	$M_9/64$
																				$M_{23,1}$	$M_{10}/64 + w_{23,1}$
																				o	$M_{11}/64$
																				o	$M_{12}/64$
																				o	$M_{13}/64$
																				o	$M_{14}/64$
																				$M_{22,1}$	$M_{15}/64 + w_{22,1}$
																				o	$M_{16}/64$
																				o	$M_{17}/64$
																				o	$M_{18}/64$
																				o	$M_{19}/64$
																				$M_{21,1}$	$M_{20}/64 + w_{21,1}$



Abb. 699.

4. Auflösung. Die Auflösung wird wieder nach S. 704ff. durchgeführt. Mit  $c-4=\mu$  lauten die Gleichungen für die  $\frac{1}{2}$  Vorzahlen.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mu + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \mu + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \mu + \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 \mu + \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_4 + \alpha_5 \mu &= 0. \end{aligned}$$

Ihre Lösung ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = -\mu, \quad \alpha_3 = -(1 - \mu^2), \quad \alpha_4 = \mu(2 - \mu^2), \quad \alpha_5 = 1 - 3\mu^2 + \mu^4, \\ \mu^5 - 4\mu^3 + 3\mu &= 0, \\ \mu_{1,2} &= \pm 1, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_{4,5} = \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$



Die 5 Systeme  $\alpha$ -Vorzeichen sind daher

$\mu$	1	-1	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\alpha_1$	1	1	1	1	1
$\alpha_2$	-1	1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha_3$	0	0	-1	2	2
$\alpha_4$	1	-1	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha_5$	-1	-1	1	1	1

Sie führen zu der Substitution

$$\left. \begin{aligned}
 \mu = 1: & \quad M_k - M_{k+1} & + M_{k+3} & - M_{k+4} = S_k, & c = 5, \\
 \mu = -1: & \quad M_k + M_{k+1} & - M_{k+3} & - M_{k+4} = T_k, & c = 3, \\
 \mu = 0: & \quad M_k & - M_{k+2} & + M_{k+4} = U_k, & c = 4, \\
 \mu = \sqrt{3}: & \quad M_k - \sqrt{3} M_{k+1} + 2 M_{k+2} - \sqrt{3} M_{k+3} + M_{k+4} = V_k, & c = 4 + \sqrt{3}, \\
 \mu = -\sqrt{3}: & \quad M_k + \sqrt{3} M_{k+1} + 2 M_{k+2} + \sqrt{3} M_{k+3} + M_{k+4} = W_k, & c = 4 - \sqrt{3}.
 \end{aligned} \right\} (1047)$$

aus der sich rückwärts ergibt

$$\left. \begin{aligned}
 M_k &= \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} (3 S_k + 3 T_k + 4 U_k + V_k + W_k), \\
 M_{k+1} &= \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} (-3 S_k + 3 T_k - \sqrt{3} V_k + \sqrt{3} W_k), \\
 M_{k+2} &= \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} (-4 U_k + 2 V_k + 2 W_k), \\
 M_{k+3} &= \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} (3 S_k - 3 T_k - \sqrt{3} V_k + \sqrt{3} W_k), \\
 M_{k+4} &= \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} (-3 S_k - 3 T_k + 4 U_k + V_k + W_k).
 \end{aligned} \right\} (1048)$$

Die Substitution (1047) führt zu den fünf unabhängigen Gleichungsgruppen:

$S_{1/12}$	$S_{6/12}$	$S_{11/12}$	$S_{16/12}$		$T_{1/12}$	$T_{6/12}$	$T_{11/12}$	$T_{16/12}$	
2,5	-1			$-M_{24,1/24}$	1,5	-1			$-M_{24,1/24}$
-1	5	-1		$-M_{23,1/12}$	-1	3	-1		$-M_{23,1/12}$
	-1	5	-1	$-M_{22,1/12}$		-1	3	-1	$-M_{22,1/12}$
		-1	5	$-M_{21,1/12}$			-1	3	$-M_{21,1/12}$

$U_{1/12}$	$U_{6/12}$	$U_{11/12}$	$U_{16/12}$		$V_{1/12}$	$V_{6/12}$	$V_{11/12}$	$V_{16/12}$	
2	-1			$M_{24,1/24}$	$2 + \sqrt{3}/2$	-1			$M_{24,1/24}$
-1	4	-1		$M_{23,1/12}$	-1	$4 + \sqrt{3}$	-1		$M_{23,1/12}$
	-1	4	-1	$M_{22,1/12}$		-1	$4 + \sqrt{3}$	-1	$M_{22,1/12}$
		-1	4	$M_{21,1/12}$			-1	$4 + \sqrt{3}$	$M_{21,1/12}$

$W_{1/12}$	$W_{6/12}$	$W_{11/12}$	$W_{16/12}$	
$2 - \sqrt{3}/2$	-1			$M_{24,1/24}$
-1	$4 - \sqrt{3}$	-1		$M_{23,1/12}$
	-1	$4 - \sqrt{3}$	-1	$M_{22,1/12}$
		-1	$4 - \sqrt{3}$	$M_{21,1/12}$



Das Ergebnis der Auflösung lautet:

$w_{1,1}$	0,0043143	$w_{6,1}$	0,0039742	$w_{11,1}$	0,0030156	$w_{16,1}$	0,0015832
$w_{2,1}$	0,0088332	$w_{7,1}$	0,0081319	$w_{12,1}$	0,0061787	$w_{17,1}$	0,0033220
$w_{3,1}$	0,0137215	$w_{8,1}$	0,0126033	$w_{13,1}$	0,0095488	$w_{18,1}$	0,0051605
$w_{4,1}$	0,0190674	$w_{9,1}$	0,0174222	$w_{14,1}$	0,0130990	$w_{19,1}$	0,0069916
$w_{5,1}$	0,0247991	$w_{10,1}$	0,0224350	$w_{15,1}$	0,0167029	$w_{20,1}$	0,0088288

B. Belastung des Hauptsystems mit gleichmäßig verteilter Last  $p$  t/m. Die Durchbiegung des Halbstreifens wird nach (995) berechnet.

$w_{1,0}$	0,00249	$w_{6,0}$	0,00231	$w_{11,0}$	0,00180	$w_{16,0}$	0,00099
$w_{2,0}$	0,00473	$w_{7,0}$	0,00439	$w_{12,0}$	0,00340	$w_{17,0}$	0,00187
$w_{3,0}$	0,00663	$w_{8,0}$	0,00615	$w_{13,0}$	0,00475	$w_{18,0}$	0,00260
$w_{4,0}$	0,00817	$w_{9,0}$	0,00757	$w_{14,0}$	0,00585	$w_{19,0}$	0,00320
$w_{5,0}$	0,00938	$w_{10,0}$	0,00869	$w_{15,0}$	0,00671	$w_{20,0}$	0,00366

$w_{24,0} = 0,01032$ .

C. Der Stützendruck.

$$X_1 = \frac{w_{24,0}}{w_{24,1}} = \frac{0,01032}{0,30392} = 0,339563 p a^2.$$

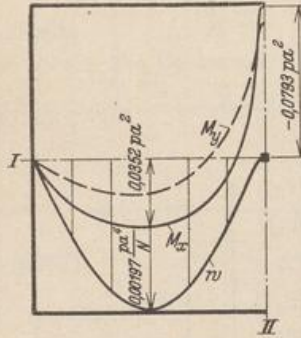


Abb. 700.

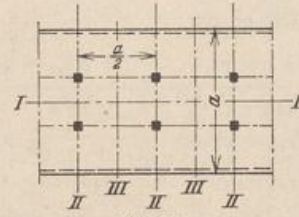


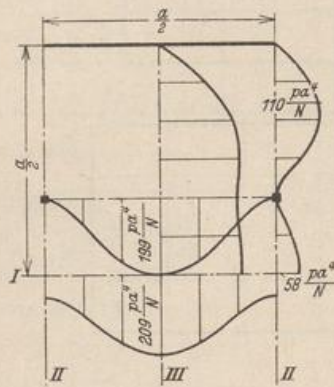
Abb. 701.

D. Formänderung und Schnittkräfte. — Die Durchbiegung beträgt nach (1033)

$$w_k = w_{k,0} - X_1 w_{k,1}.$$

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	
0,001025	0,001731	0,001971	0,001695	0,000959	$p a^4/N$

Schnittkräfte nach (1003) ff. Abb. 700 zeigt Durchbiegung und Schnittkräfte in der Symmetrieachse I.



a) Durchbiegung  $10^6 w$ .

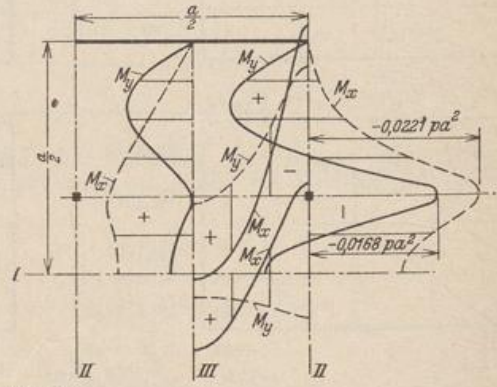


Abb. 702.

b) Biegemomente.

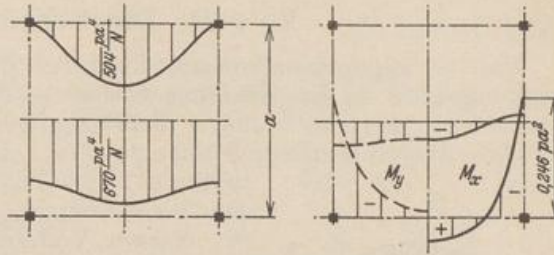
Die nach zwei Seiten unendlich lange Pilzdecke mit zwei Stützenreihen und frei aufliegenden Rändern (Abb. 701) ist für die Teilung 3:2 bereits von H. Marcus berechnet worden<sup>1</sup>. Das Ergebnis ist zum Vergleich mit den Verschiebungen und mit den Schnittkräften auf S. 706 in der Abb. 702 eingetragen.

<sup>1</sup> Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe 2. Aufl. S. 274. Berlin 1932.



H. Marcus hat in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit auch das quadratische Mittelfeld einer nach allen Seiten unendlich ausgedehnten Pilzdecke untersucht. Die Ergebnisse sind in der Abb. 703 enthalten, um sie mit den Schnittkräften zu vergleichen, die im Bereiche der Stützen nach den Bemerkungen auf S. 701 weiter unten als Näherung berechnet worden sind.

**Biegemomente im Bereich der Stütze für die nach allen Seiten unendlich ausgedehnte Pilzdecke mit quadratischen Feldern.**



a) Durchbiegung  $10^5 w$ . b) Biegemomente.

1. Lösung nach A. Nadai (S. 701).  
 Stützenabstand  $2l$ . Radius der stellvertretenden Kreisplatte  $a = 0,44 l$ .  
 $P = 4 p l^2$ ,  $Q = (P - p a^2 \pi) / 2 a \pi$ . Die Lösung wird durch Superposition der Schnittkräfte der frei aufliegenden Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last  $p$  und bei einer Einzellast  $P$  gefunden. Nach Tabelle 63 ist mit  $\mu = 1/6$  (Abb. 704 u. 706 a)

$$M_r = \frac{p a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1 + \frac{P}{4\pi} (1 + \mu) \Phi_3 = (0,0382 \Phi_1 + 0,3761 \Phi_3) p l^2,$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [2(1 - \mu) + (1 + 3\mu) \Phi_1] - \frac{P}{4\pi} [(1 - \mu) - (1 + \mu) \Phi_3]$$

$$= (-0,2452 + 0,0182 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2.$$

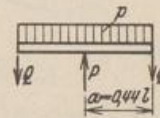


Abb. 704.

2. Lösung nach V. Lewe (S. 702).  
 Stützenabstand  $2l$ . Radius der stellvertretenden Kreisplatte  $a = R = 1,1286 l$ ,  $R_1 = 0$ .  $P = 4 p l^2$ ,  $M$  aus  $dw/dr = 0$  am Rand. Die Lösung ergibt sich durch Superposition der Schnittkräfte der eingespannten Kreisplatte bei gleichmäßig verteilter Last  $p$  und bei einer Einzellast  $P$ . Nach Tabelle 63 ist (Abb. 705 u. 706 b)

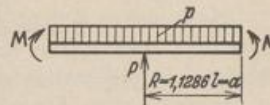


Abb. 705.

$$M_r = \frac{p a^2}{16} [(3 + \mu) \Phi_1 - 2] + \frac{P}{4\pi} [1 + (1 + \mu) \Phi_3] = (0,1593 + 0,2521 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2,$$

$$M_t = \frac{p a^2}{16} [(1 + 3\mu) \Phi_1 - 2\mu] + \frac{P}{4\pi} [\mu + (1 + \mu) \Phi_3] = (0,0266 + 0,1194 \Phi_1 + 0,3716 \Phi_3) p l^2.$$

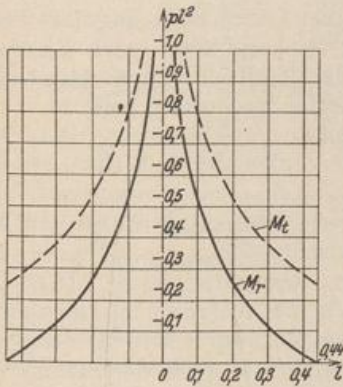


Abb. 706 a.

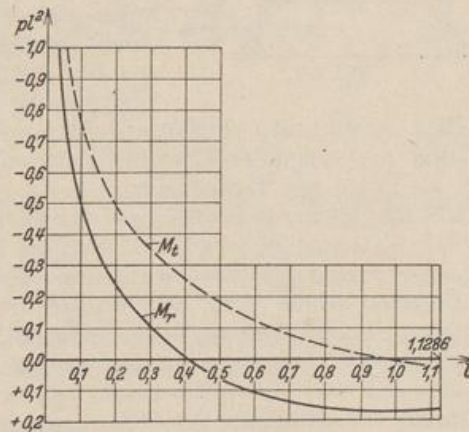


Abb. 706 b.

Nadai, A.: Die elastischen Platten 1925. — Frey, K.: Die gleichförmig belastete, in gleichen Abständen unterstützte Gerade der allseitig unendlichen Platte und deren Anwendung in der strengen Theorie der trägerlosen Decken. Bauing. 1926 S. 21. — Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1928. — Lewe, V.: Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetondecken. Berlin 1929.



## B. Die Scheiben.

### 74. Die Scheiben.

Um die allgemeine Problemstellung der Elastizitätstheorie zu vereinfachen, wird entweder der in  $y$ -Richtung unendlich lange Körper mit unveränderlichem Querschnitt und gleichförmiger Belastung  $\mathfrak{F}(x, z)$  oder die dünne, durch zwei parallele Ebenen begrenzte Scheibe  $\Delta y \cdot F(x, z)$  betrachtet (Abb. 707), deren Mittelebene am Rande durch äußere Kräfte belastet ist. Auf diese Weise entstehen Grenzfälle der allgemeinen Lösung mit ebenem Verzerrungszustand ( $v = \text{const}$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ,  $\gamma_{yx} = 0$ ) oder mit ebenem Spannungszustand ( $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ,  $\tau_{yx} = 0$ ).

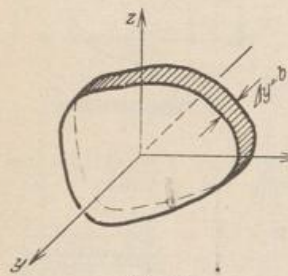


Abb. 707.

Die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  der Scheibe sind parallel zur Mittelebene und bedeuten bei endlicher Dicke  $\Delta y = b$  Mittelwerte, an deren Stelle auch die auf die Scheibendicke  $b$  bezogenen Längs- und Schubkräfte  $N_x$ ,  $N_z$ ,  $N_{xz}$  treten können. Die Beanspruchung und die Verzerrung der Scheibe infolge der Querdehnung des Baustoffs senkrecht zur Mittelebene werden vernachlässigt. Die begrenzenden Ebenen der Scheibe sind also auch nach der Formänderung eben und parallel.

Die inneren Kräfte der Scheibe bilden in jedem Punkte einen Tensor mit der aus (920) bekannten Komponententransformation. Danach ist die Summe  $s$  der beiden Längsspannungen ebenso wie die Momentensumme  $M$  der Plattenbiegung unabhängig vom Koordinatensystem und eine skalare Funktion in  $x$  und  $z$ . Mit  $\psi \rightarrow \psi_0$  oder  $\psi \rightarrow \psi'_0$  nach (921) entstehen die Hauptlängsspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und die Hauptschubspannungen  $\tau_{12} = \tau_{21}$ , die sich zu Isoklinen, Trajektorien und Linien mit gleichgroßer Hauptlängsspannung und gleichgroßer Hauptschubspannung zusammenfassen lassen. Von diesen besitzt das Feld der Hauptlängsspannungen für die bauliche Ausgestaltung der Scheiben besondere Bedeutung. Es besteht aus den Zug- und Druckkraftlinien und enthält meist auch noch singuläre Punkte, deren Existenz, deren Lage und deren Eigenschaften für das Bild des Kraftfeldes und damit für die Übertragung der Kräfte Bedeutung besitzen.

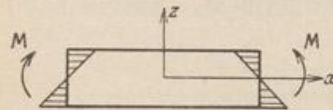


Abb. 708.

Man unterscheidet singuläre Nullpunkte, singuläre Punkte mit endlicher Kraftwirkung und singuläre Unendlichkeitspunkte als Folge der Scheibenbegrenzung oder als Folge von Einzellasten.

Um die Spannungen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (910) und damit statisch bestimmt zu berechnen, wird die Normalspannung  $\sigma_x$  nach Navier linear in  $z$  angenommen. Die Lösung gilt streng für einen ebenen Streifen, an dessen Enden Kräftepaare wirken (Abb. 708), und genügt mit der bei technischen Aufgaben notwendigen Genauigkeit auch bei anderen Belastungen von Scheiben, deren Höhe gegenüber der Länge zwischen den Stützpunkten klein ist, wenn der Bereich neben Einzellasten oder neben Unstetigkeiten der Begrenzung ausscheidet. Die statisch bestimmte Beschreibung des Spannungszustandes ist daher bei hohen Trägern mit kleiner Stützweite und im Bereich von Ecken, Knickstellen und Verzweigungen des Streifens unzureichend.

**Der statisch unbestimmte Spannungszustand.** 1. Annahmen und Abkürzungen nach S. 643. Der Spannungszustand ist eben und durch  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  bestimmt.  $\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$ . Die Komponenten  $\varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{yx}$  der Verzerrung sind



klein im Vergleich zu den übrigen Komponenten  $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$  und werden daher vernachlässigt ( $\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_{yx} = 0$ ).

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad s = \sigma_x + \sigma_z, \quad \Delta = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right].$$

$s$  ist gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems invariant.

$Z$  bedeutet die auf die Einheit bezogene konstante Massenkraft (Eigengewicht).

2. Gleichgewichtsbedingungen nach S. 643.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (1049)$$

3. Elastizitätsgesetz nach S. 643.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_x - \frac{s}{m+1} \right), & \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left( \sigma_z - \frac{s}{m+1} \right), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right), & \sigma_z &= 2G \left( \varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right), & e &= \frac{1}{2G} s \frac{m-2}{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (1050)$$

4. Verträglichkeitsbedingungen nach S. 18.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1051)$$

Die Verwendung der Beziehungen 3. und 4. in 2. liefert folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$G \left( \Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} \right) = 0, \quad G \left( \Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} \right) + Z = 0. \quad (1052)$$

Aus der Addition der beiden nach  $x$  und  $z$  differenzierten Gleichungen entsteht mit  $\partial Z / \partial z = 0$  die Bedingung

$$\Delta e = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta s = 0, \quad \text{also} \quad -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1053)$$

Soll diese allgemeine Differentialbeziehung des Spannungszustandes durch eine Veränderliche  $F$  beschrieben werden, so muß diese die Gleichgewichtsbedingungen (1049) erfüllen. Dies geschieht nach G. B. Airy mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - Zx, \quad (1054a)$$

bei fehlenden Massenkraften auch mit

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \quad (1054b)$$

so daß der ebene Spannungszustand nach (1053) und (1054) durch folgende Bedingung bestimmt ist:

$$\Delta s = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0. \quad (1055)$$

Die Gleichung kann ebenso wie auf S. 646 in zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zerlegt und nach (935) in Polarkoordinaten angeschrieben werden.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = s, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, \quad s = \sigma_x + \sigma_z. \quad (1056)$$

$$\Delta \Delta F = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)^2 F = 0 \quad (1057)$$

mit

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{rt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (1058)$$



Die Funktion  $F$  ist unter dem Namen Airysche Spannungsfunktion bekannt. Sie genügt nach (929) der Differentialgleichung einer an der Oberfläche kräftefreien Platte, so daß die Ordinaten  $F$  mit den Verschiebungen  $w$  einer elastischen, durch Randkräfte erzeugten Biegefläche mit den durch (1061) vorgeschriebenen Randbedingungen verglichen werden können. Die Fläche wird Airysche Fläche oder Spannungsfläche genannt, da ihre Krümmungen nach (1054b) die Längsspannungen der Scheibe beschreiben. Diese Erkenntnis ist von K. Wieghardt verwendet worden, um die Spannungen der Scheibe an der Formänderung eines dünnen Bleches auszumessen.

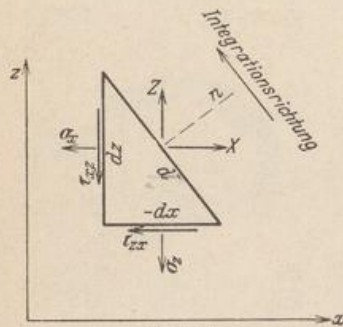


Abb. 709.

Die Randbedingungen. Die analytische Untersuchung des Spannungszustandes besteht in der Ermittlung einer Funktion  $F(x, z)$ , welche die partielle Differentialgleichung (1055) und die von Randkräften  $X(x, z)$ ,  $Z(x, z)$  vorgeschriebenen Bedingungen für  $\sigma_n$  und  $\tau_{nl}$  erfüllt. Um diese auch bei einer allgemeinen Begrenzung der Scheibe in einfacher Form auszusprechen, wird das Gleichgewicht der Kräfte an einem Randabschnitt der Scheibe betrachtet. Nach Abb. 709 ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{zx} \cos(n, z) &= X, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \sigma_z \cos(n, z) &= Z \end{aligned} \right\} \quad (1059)$$

und mit (1054b) und

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{dz}{dl}, & \cos(n, z) &= -\frac{dx}{dl}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dl} &= X, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dl} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{dl} &= Z, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \int_0^k X dl = R_x, & \frac{\partial F}{\partial x} &= -\int_0^k Z dl = -R_z. \end{aligned} \right\} \quad (1060)$$

Danach lassen sich die Randbedingungen der Spannungsfunktion bei beliebiger Begrenzung und Belastung der Scheibe in folgender Weise anschreiben:

$$\int \left( \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = F = \int (R_x dz - R_z dx),$$

$$F_k = \int_0^k [X(z_k - z) - Z(x_k - x)] dl. \quad (1061a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -R_z \cos(l, z) + R_x \cos(l, x) = -R_l. \quad (1061b)$$

Die Spannungsfunktion  $F$  und ihre Normalableitung  $\partial F/\partial n$  sind daher in einem beliebigen Punkte  $K$  des Randes bis auf die in (1061a) und (1061b) nicht enthaltenen Integrationskonstanten durch das Moment und die Tangentialkomponente  $R_l$  der Resultierenden der Randbelastung im Punkte  $k$  des Scheibenrandes bestimmt. Der Anfangspunkt der Integration ist beliebig. Durch seine Wahl würden nur die Integrationskonstanten in (1061a) und (1061b) festgelegt werden, welche auf die Spannungen und Verschiebungen ohne Einfluß sind, da diese nur von zweiten und höheren Differentialquotienten abhängen. Die Ableitung der Spannungsfunktion nach der Tangente des Scheibenrandes ist an einspringenden Ecken und an den Angriffspunkten von Einzellasten unstetig. Die Krümmung der Spannungsfläche wird daher hier unendlich. Dasselbe gilt von der Längsspannung.

Die formale Lösung der Aufgabe ist nur in einzelnen Fällen möglich. Zwar lassen sich ebenso wie bei der Integration der Plattengleichung (929) leicht Funktionen anschreiben, welche die Differentialgleichung (1055) erfüllen, dagegen gelingt



die Befriedigung der Randbedingungen durch eine rechnerisch brauchbare Reihenentwicklung nur bei denjenigen Scheiben, die nach drei und vier Seiten unbegrenzt sind oder parallele Ränder besitzen. Das sind die Ebene und geradlinig, keilförmig oder kreisförmig begrenzte Abschnitte der Ebene. Aus diesem Grunde ist auch die Umordnung der Belastung bei symmetrisch ausgebildeten Scheiben nützlich. Die Randbedingungen werden auf diese Weise symmetrisch oder antimetrisch. Die Anzahl der in einem Ansatz zu befriedigenden Randbedingungen ist dann kleiner und der Ansatz selbst kürzer. Er muß die Differentialgleichung und nach (1060) oder (1061) differenziert die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen.

**Spannungszustand in einer Halbscheibe.** Randbedingungen für  $z = 0$ :  $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0$  oder vorgeschrieben.

a) Belastung durch die Einzellast  $P_1$  winkelrecht zur Begrenzung (Abb. 710).

$$F = \frac{P_1}{\pi} r \alpha \sin \alpha, \quad \sigma_r = \frac{2 P_1}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0, \quad (1062a)$$

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2 \alpha, \quad \sigma_x = \sigma_r \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xz} = -\sigma_r \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1062b)$$

In rechtwinkligen Koordinaten lauten die Gleichungen (1062b) mit  $\xi = x/a, \zeta = z/a$

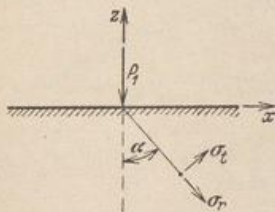


Abb. 710.

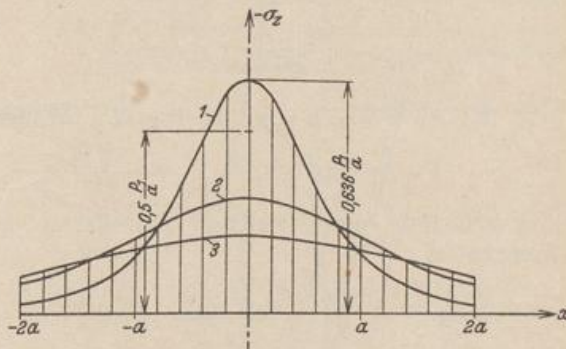


Abb. 711 a. Spannungen  $\sigma_z$  in den Schnitten  $z = -a$  (Kurve 1),  $z = -2a$  (Kurve 2),  $z = -3a$  (Kurve 3).

$$\sigma_x = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi^2 \zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)^2},$$

$$\sigma_z = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\zeta^3}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}, \quad -\tau_{xz} = \frac{2 P_1}{\pi a} \frac{\xi \zeta^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^2}.$$

Die Abb. 711a enthält die Spannung  $\sigma_z$  für mehrere Schnitte  $z = \text{const}$ , die Abb. 711b, c die Spannungen  $\sigma_x, \tau_{xz}$  für mehrere Schnitte  $x = \text{const}$ . Die Span-

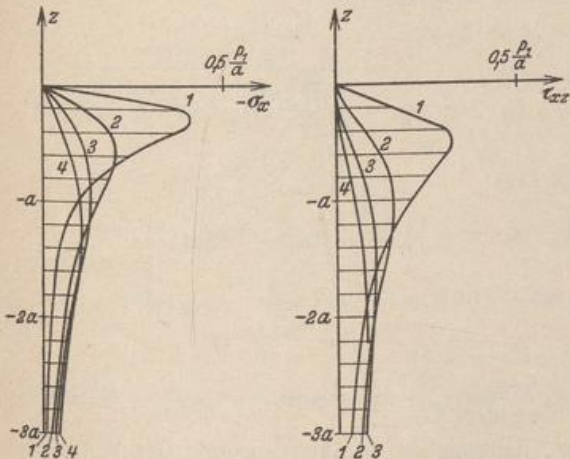


Abb. 711 b, c. Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$  in den Schnitten  $x = a/2$  (Kurve 1),  $x = a$  (Kurve 2),  $x = 3a/2$  (Kurve 3),  $x = 2a$  (Kurve 4).

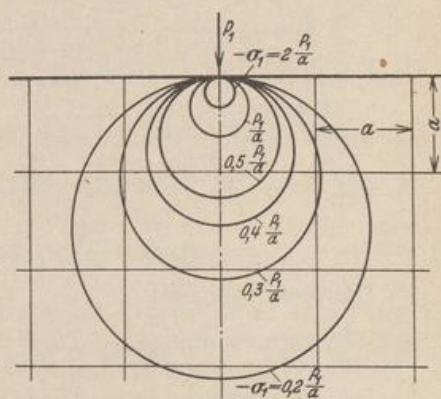


Abb. 712. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .



nung  $\sigma_x$  wechselt in diesen Schnitten nicht ihr Vorzeichen, so daß  $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$  einen von  $x$  unabhängigen endlichen Wert besitzen muß, der zu  $-P_1/\pi$  gefunden wird.

Die Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$  sind Kreise durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Gleichung

$$\xi^2 + \left(\zeta - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad n = \sigma_1 / \frac{P_1}{\pi a}.$$

Die Spannung  $\sigma_2$  ist überall gleich Null (Abb. 712).

Die Längsspannungstrajektorien sind Kreise um den Koordinatenanfangspunkt oder die von dort ausgehenden Radien (Abb. 713).

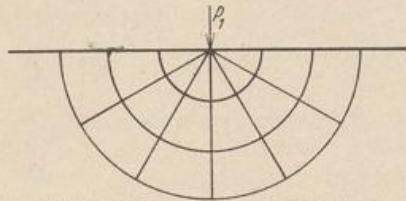


Abb. 713. Längsspannungstrajektorien.

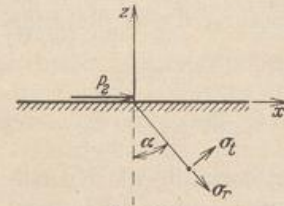


Abb. 714.

b) Belastung durch die Einzellast  $P_2$  parallel zur Begrenzung (Abb. 714).

$$F = \frac{P_2}{\pi} r \alpha \cos \alpha, \quad \sigma_r = -\frac{2P_2}{\pi} \frac{\sin \alpha}{r}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1063)$$

c) Belastung durch mehrere Einzellasten  $P_k$  (Abb. 715). Superposition der Lösungen a).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos^3 \alpha_k}{r_k}, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \cos \alpha_k \sin^2 \alpha_k}{r_k}, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \sum \frac{P_k \sin \alpha_k \cos^2 \alpha_k}{r_k}. \quad (1064)$$

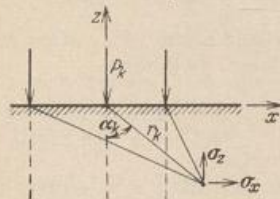


Abb. 715.

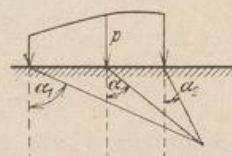


Abb. 716.

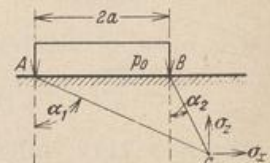


Abb. 717.

d) Stetige Streckenlast  $dP = p dx$  (Abb. 716).

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \cos^2 \alpha d\alpha, \quad \sigma_x = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin^2 \alpha d\alpha, \quad \tau_{xz} = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin \alpha \cos \alpha d\alpha. \quad (1065)$$

Sonderfall  $p = p_0 = \text{const}$  (Abb. 717):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1], & \tau_{xz} &= +\frac{p_0}{2\pi} [\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1], \\ \sigma_x &= +\frac{p_0}{2\pi} [2(\alpha_2 - \alpha_1) - (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (1066a)$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) + \sin(\alpha_2 - \alpha_1)], \quad \sigma_2 = \frac{p_0}{\pi} [(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]. \quad (1066b)$$

Die Hauptspannung  $\sigma_1$  fällt in die Richtung der Halbierungslinie des Winkels  $ACB$  (Abb. 717).



Spannungen  $\sigma_z$  in Schnitten  $z=\text{const}$ : Abb. 718 a  
 „  $\sigma_x$  „ „  $x=\text{const}$ : „ 718 b  
 „  $\tau_{xz}$  „ „  $x=\text{const}$ : „ 718 c

Auch hier ist  $\int_{-\infty}^0 \sigma_x dz$  von Null verschieden und gleich  $-2 p_0 a / \pi$ . Die Linien gleicher Hauptspannungen  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  (Abb. 719 a) sind Kreise durch die Endpunkte der Belastung, da beide Hauptspannungen nur von der Differenz der Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  abhängen. Die Längsspannungstrajektorien sind in Abb. 719 b dargestellt.

**Keilförmig begrenzte Scheiben mit einer Einzellast an der Spitze** (Abb. 720). Die Normalspannungen  $\sigma_t$  und die Schubspannungen  $\tau_{rt}$  der Halbscheibe in

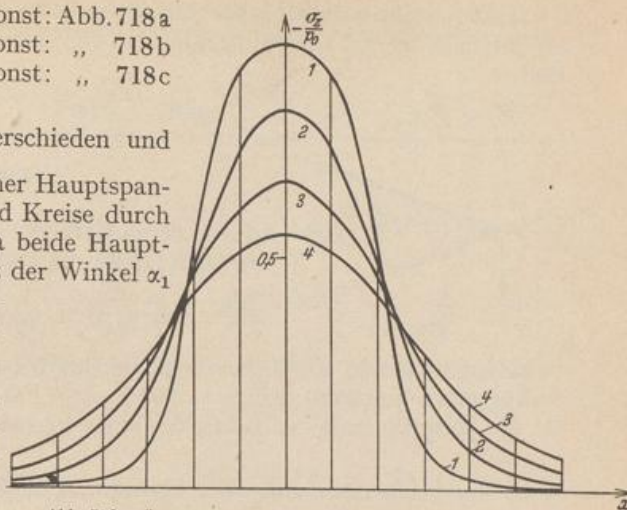


Abb. 718 a. Spannungen  $\sigma_z$  in den Schnitten  $z = -0,5a$  (Kurve 1),  $z = -a$  (Kurve 2),  $z = -1,5a$  (Kurve 3),  $z = -2a$  (Kurve 4).

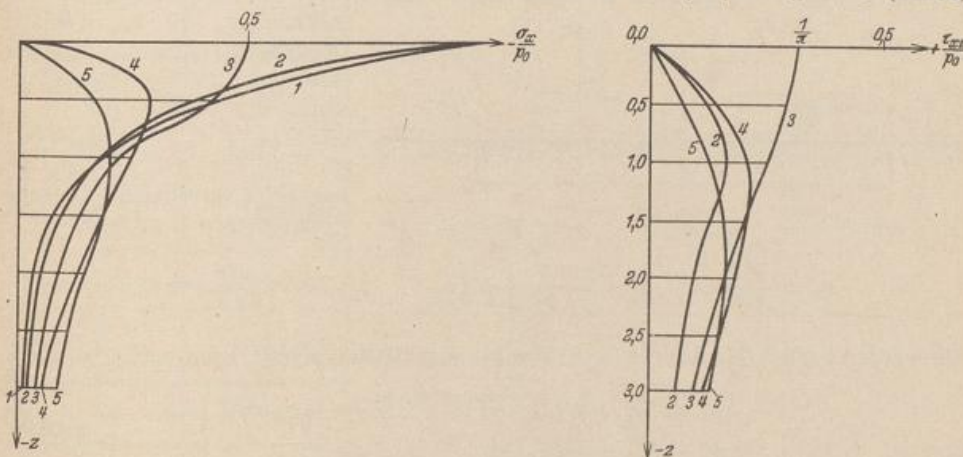


Abb. 718 b, c. Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$  in den Schnitten  $x = 0$  (Kurve 1),  $x = 0,5a$  (Kurve 2),  $x = a$  (Kurve 3),  $x = 1,5a$  (Kurve 4),  $x = 2a$  (Kurve 5).

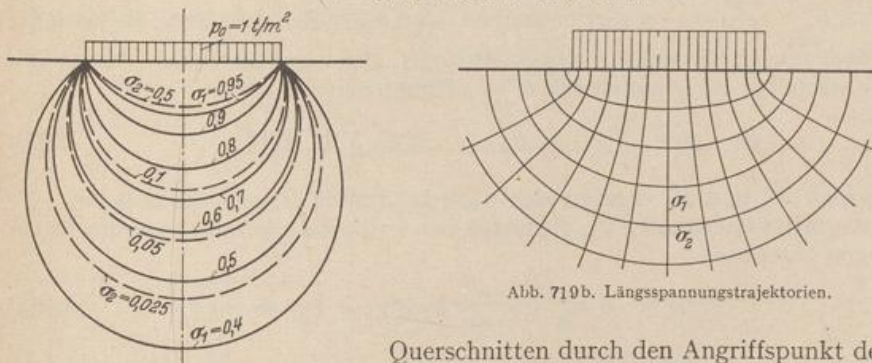


Abb. 719 a. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$ .

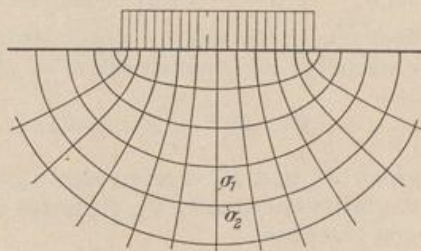


Abb. 719 b. Längsspannungstrajektorien.

Querschnitten durch den Angriffspunkt der Lasten  $P_1, P_2$  sind Null. Der Spannungszustand bleibt daher in einem danach abgetrennten Keil unverändert.

$$\sigma_r = \frac{2 P_1 \cos \alpha}{r(2 \beta + \sin 2 \beta)} + \frac{2 P_2 \sin \alpha}{r(2 \beta - \sin 2 \beta)}, \quad \sigma_t = 0, \quad \tau_{rt} = 0. \quad (1067)$$



**Halbscheibe mit periodischer Belastung des Randes** (Abb. 721). Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion wird gliedweise durch eine trigonometrische Reihe

$$F' = \sum_0^{\infty} F'_n = F'_0 + \sum_1^{\infty} Z'_n \cos \xi_n \quad \text{oder} \quad F'' = \sum_0^{\infty} F''_n = \sum_1^{\infty} Z''_n \sin \xi_n \quad (1068a)$$

$$\text{mit } \xi_n = n\pi \frac{x}{l}$$

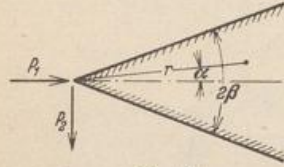


Abb. 720.

erfüllt, deren Beiwerte  $Z_n$  Funktionen von  $z$  sind und daher nach (1055) die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0 \quad \text{mit } l_n = \frac{l}{n\pi} \quad (1068b)$$

befriedigen müssen. Die Spannungsfunktion  $F$  ist außerdem noch durch vier Randbedingungen bestimmt. Für  $z = 0$  ist  $\sigma_z = \partial^2 F / \partial x^2 = -p$ ,  $\tau_{xz} = -\partial^2 F / \partial x \partial z = 0$ . Ist die Resultierende der Belastung einer Periode  $2l$  von Null verschieden, so ent-

steht durch Überlagerung einer konstanten Zugbelastung  $p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx$  eine Belastung  $p^* = p - p_0$  mit der Resultierenden Null. Für  $p^*$  ist also im negativ Un-

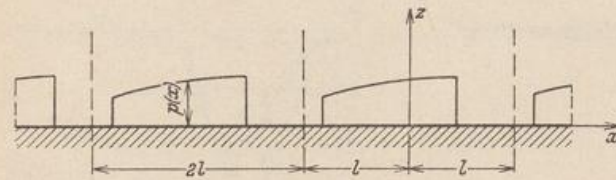


Abb. 721.

endlichen  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ . Die Druckbelastung  $p_0$  erzeugt eine gleichförmige Beanspruchung der Scheibe mit

$\sigma_z = -p_0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\sigma_x = 0$ ,  
so daß für  $p = p^* + p_0$  im negativ Unendlichen folgende Bedingungen bestehen:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 = -\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0.$$

Sie werden nach A. N. d. ai durch die Funktionen (1068a) erfüllt, wenn mit  $\zeta_n = n\pi \frac{z}{l}$

$$\left. \begin{aligned} Z'_n &= (C'_n + D'_n \zeta_n) e^{\zeta_n}, & F'_0 &= -p_0 x^2 / 2 \\ Z''_n &= (C''_n + D''_n \zeta_n) e^{\zeta_n} \end{aligned} \right\} \quad (1068c)$$

und

gesetzt wird. Die Vorzahlen  $C, D$  hängen von den Bedingungen am Rande ( $z = 0$ ) ab. Um hier  $\sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p$  vorzuschreiben, wird auch die periodische Belastung  $p$  in eine trigonometrische Reihe mit geraden (cos) oder ungeraden (sin) Funktionen zerlegt, je nachdem sie symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

$$p' = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad p'' = \sum_1^{\infty} B_n \sin \xi_n. \quad (1069)$$

Die Vorzahlen  $A_n$  und  $B_n$  ergeben sich nach bekannten Regeln (Tabelle 66).

Die Integrationskonstanten  $C_n, D_n$  lassen sich nunmehr gliedweise aus den Randbedingungen berechnen.

$$F' = -\frac{p_0 x^2}{2} + \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n \quad (1070a)$$

oder

$$F'' = \sum_1^{\infty} B_n l_n^2 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \sin \xi_n \quad (1070b)$$

mit  $l_n = \frac{l}{n\pi}$  und  $\zeta_n = \frac{n\pi z}{l}$ .



Tabelle 66. Fourierkoeffizienten für einfache Belastungen.

$$\gamma_n = n\pi \frac{c}{l} = \frac{c}{l} n\pi, \quad p_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} p dx.$$

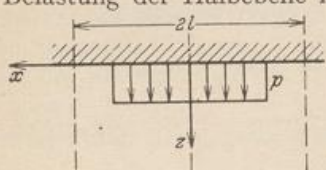
	$A_0 = p_0 = p \frac{c}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	<p>Belastung mit der Resultierenden Null</p> $[p_1 c = p_2 (l - c)].$ $p_2 = p_1 \frac{c}{l - c}, \quad A_0 = p_0 = 0, \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{2l}, \quad A_n = \frac{P}{l}$
	$A_0 = p_0 = 2 p \frac{a}{l}, \quad A_n = 2 p_0 \frac{c}{a} \frac{\cos \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$A_0 = p_0 = \frac{P}{l}, \quad A_n = 2 \frac{P}{l} \cos \gamma_n$
	$\bar{p} = 2 p \frac{a}{l}, \quad -B_n = 2 \bar{p} \frac{c}{a} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \sin n\pi \frac{a}{l}$
	$-B_n = 2 \frac{P}{l} \sin \gamma_n$
	$B_n = -\frac{4p}{\pi n} \quad n = 1, 3, 5, \dots$



Bei Belastung der Halbebene nach Tabelle 66, a entsteht daher folgender Spannungszustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = -2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \zeta_n e^{\zeta_n} \sin \xi_n, \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p_0 - 2 p_0 \sum_1^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cos \xi_n. \end{aligned} \right\} (1071)$$

Die Randbedingungen für  $z=0$  und  $z=\infty$  lassen sich leicht nachprüfen. Bei Belastung der Halbebene nach Abb. 722 erhält  $p_0$  das negative Vorzeichen.



Für die Spannungen am Rande ( $z=0$ ) folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} A_n \cos \xi_n = -\sum_1^{\infty} (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} p_n \\ &\text{mit } \zeta_n = 0 \\ \sigma_x &= -\sum_1^{\infty} p_n = -(p - p_0). \end{aligned} \quad (1072)$$

Abb. 722.

**Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand auf mehreren Stützen.**

1. Abmessungen und äußere Kräfte. Feldweite  $2l = 8,00$  m, Stützenbreite  $2c = 2,00$  m (Abb. 723a). Die  $x$ -Achse fällt mit dem unteren Rand, die  $z$ -Achse mit der Feldmitte zusammen. Die gleichförmig verteilte Zugbelastung  $-p'$  in t/m liefert auf die Wandstärke  $b$  bezogen die Belastung  $-p = -p'/b$  in t/m<sup>2</sup>. Die Untersuchung wird für  $p = -1$  t/m<sup>2</sup> durchgeführt. Stützkraft:  $q = p \cdot l/c = 4p$ . Durch Superposition von Belastung und Stützkraften entsteht das Belastungsbild Abb. 723b. Die Entwicklung nach Fourier (S. 719) liefert

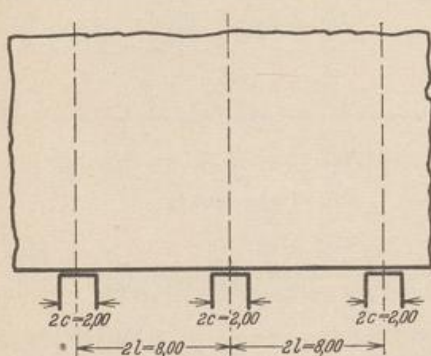


Abb. 723a.

$$A_0 = 0 \text{ und mit } p_2 = p \frac{l-c}{c} \quad A_n = 2 p_2 \frac{\sin n \pi \frac{l-c}{l}}{n \pi \frac{l-c}{l}}$$

also

$$A_n = 6 p \frac{\sin n \pi \frac{3}{4}}{n \pi \frac{3}{4}} = -\frac{8}{n \pi} \sin \frac{3}{4} n \pi.$$

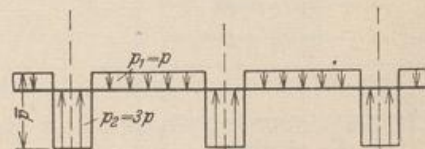


Abb. 723b.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$A_n$	-1,800 633	+1,273 240	-0,600 211	0	+0,360 127	-0,424 413	+0,257 233	0

Die ersten fünf Fourierglieder ergeben als Annäherung der Belastungsfunktion 1 die Kurve 2 der Abb. 724, die ersten acht Glieder die Kurve 3. Wird die Berechnung der Spannungen auf die ersten fünf Glieder beschränkt, so entsteht die strenge Lösung für die Belastung nach Kurve 2.

2. Ermittlung von  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ . Nach (1054b) und (1070) ist

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_1^5 (1 + \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \sigma_z &= -\sum_1^5 (1 - \zeta_n) e^{\zeta_n} \cdot A_n \cos \xi_n = -\sum_1^5 \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi), \\ \tau_{xz} &= -\sum_1^5 \zeta_n \cdot e^{\zeta_n} \cdot A_n \sin \xi_n = -\sum_1^5 \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$



Die Spannungen werden für einzelne Schnitte  $z = \text{const}$  berechnet. Dabei ergeben sich z. B. für  $z = -0,25 l$  die folgenden Werte der Funktionen  $\psi, \varphi, \chi$ :

$n$	1	2	3	5
$\xi_n$	-0,785398	-1,570796	-2,356194	-3,926991
$\psi_n(\xi)$	+0,09788	-0,11866	-0,12854	-0,05767
$\varphi_n(\xi)$	+0,81436	+0,53441	+0,31810	+0,09708
$\chi_n(\xi)$	-0,35824	-0,32654	-0,22332	-0,07737

Damit lassen sich die Spannungen für diesen Schnitt folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -0,09788 E_1(\xi) + 0,11866 E_2(\xi) + 0,12854 E_3(\xi) + 0,05767 E_5(\xi), \\ \sigma_z &= -0,81436 E_1(\xi) - 0,53441 E_2(\xi) - 0,31810 E_3(\xi) - 0,09708 E_5(\xi), \\ \tau_{xz} &= +0,35824 F_1(\xi) + 0,32654 F_2(\xi) + 0,22332 F_3(\xi) + 0,07737 F_5(\xi). \end{aligned}$$

Die Funktionen  $E, F$  sind für Achtelteilung der Strecke  $l$  in folgender Tabelle enthalten:

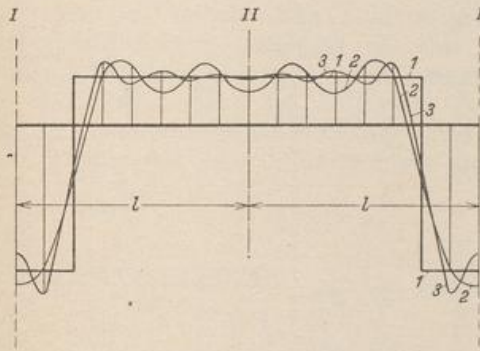


Abb. 724. Linienzug I: Gegebene Belastung, Kurve 2: Annäherung durch fünf Fourierglieder, Kurve 3: Annäherung durch acht Fourierglieder.

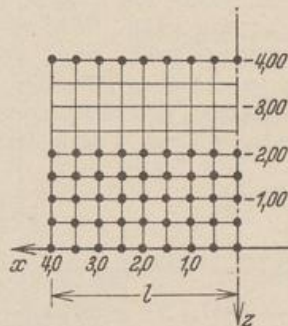


Abb. 725.

$\xi$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
$E_1(\xi)$	-1,80063	-1,66360	-1,27324	-0,68906	0	+0,68906	+1,27324	+1,66360	+1,80063
$F_1(\xi)$	0	-0,68906	-1,27324	-1,66360	-1,80063	-1,66360	-1,27324	-0,68906	0
$E_2(\xi)$	+1,27324	+0,90032	0	-0,90032	-1,27324	-0,90032	0	+0,90032	+1,27324
$F_2(\xi)$	0	+0,90032	+1,27324	+0,90032	0	-0,90032	-1,27324	-0,90032	0
$E_3(\xi)$	-0,60021	-0,22968	+0,42442	+0,55454	0	-0,55454	-0,42442	+0,22968	+0,60021
$F_3(\xi)$	0	-0,55454	-0,42442	+0,22968	+0,60021	+0,22968	-0,42442	-0,55454	0
$E_5(\xi)$	+0,36013	-0,13782	-0,25466	+0,33272	0	-0,33272	+0,25466	+0,13782	-0,36013
$F_5(\xi)$	0	+0,33272	-0,25466	-0,13782	+0,36013	-0,13782	-0,25466	+0,33272	0

Die Auswertung der allgemeinen Ansätze liefert demnach für  $z = -0,25 l$  folgende Spannungen in  $t/m^2$ :

$\xi$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
$\sigma_x$	+0,273	+0,234	+0,166	+0,052	-0,151	-0,266	-0,166	-0,021	+0,029
$\sigma_z$	+0,922	+0,959	+0,925	+0,834	+0,680	+0,129	-0,925	-1,921	-2,303
$\tau_{xz}$	0	-0,051	-0,154	-0,261	-0,483	-0,849	-0,986	-0,639	0



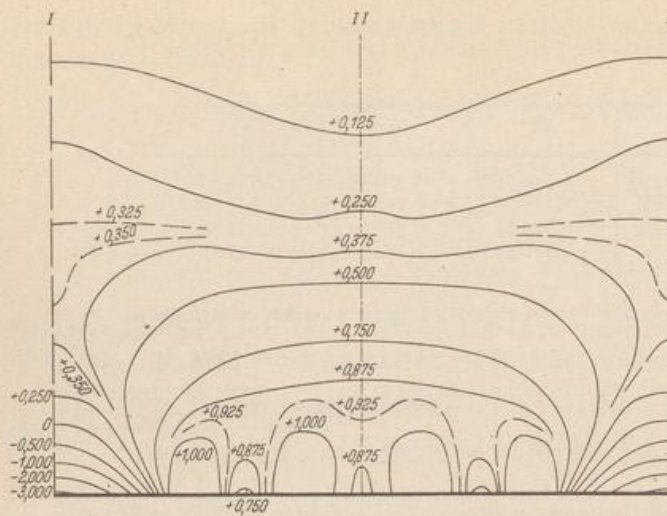
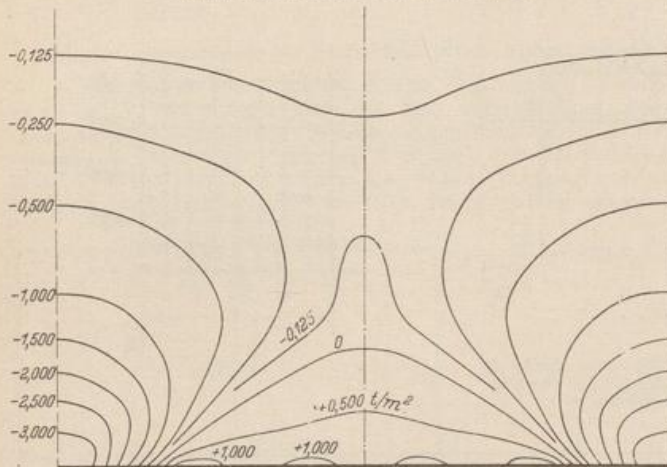
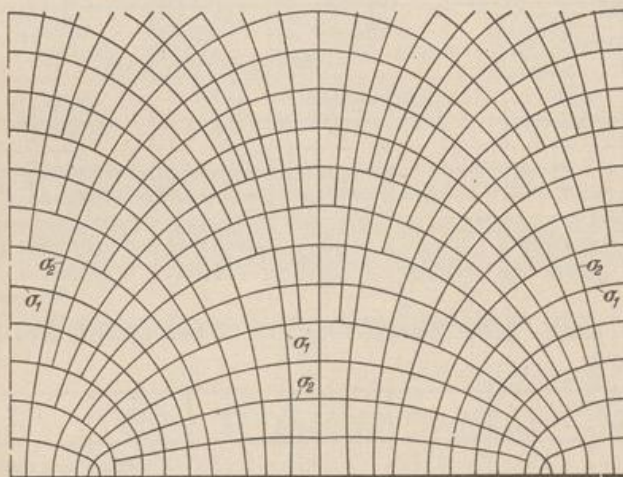
Abb. 726. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .Abb. 727. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$ .

Abb. 728. Längsspannungstrajektorien.

3. Hauptspannungen.  
Die Hauptspannungen und ihre Richtungen werden nach (40) ermittelt. Mit den Spannungen an den in Abb. 725 eingetragenen Punkten sind die Linien gleicher Spannung  $\sigma_1$  (Abbild. 726), die Linien gleicher Spannung  $\sigma_2$  (Abb. 727) und die Hauptlängsspannungstrajektorien (Abb. 728) gezeichnet worden.

Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Berlin u. München 1920. — Nadai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, A.: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie, Kap. 2 im Handb. d. Physik Bd. II: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Flügge, W.: Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. J. A. 1930 S. 481. — Hager, K.: Der ebene Spannungszustand. Z. A. M. 1932 S. 137.



### 75. Der Streifen mit periodischer Belastung der Ränder.

Der Spannungszustand in hohen Wänden ( $H = 2h$ ) läßt sich am einfachsten an durchlaufenden Tragwerken nachweisen, die auf unendlich vielen, gleichweit entfernten Stützen ruhen ( $L = 2l$ ) und als Streifen mit periodischer Belastung der Ränder idealisiert werden (Abb. 729). Das Eigengewicht des Streifens ist mit  $g \text{ t/m}^3$  gleichförmig über die Fläche verteilt. Die Belastung aus Einzelkräften  $P$  und gleichförmig verteilten Streckenlasten  $p$  an den Rändern wird auf die Einheit der Scheibendicke bezogen.

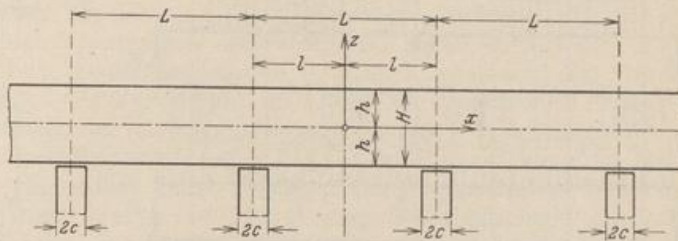


Abb. 729.

#### Die Belastung.

Zur allgemeinen Beurteilung des Spannungszustandes genügen die Belastungsannahmen

nach Abb. 730a bis c am oberen oder unteren Rande. Bei einem Wechsel von belasteten mit unbelasteten Feldern (Abb. 731a) werden die Spannungen aus einer gleichförmigen Belastung  $p/2$  über alle Felder (Abb. 731b) mit den Spannungen aus feldweise wechselnder Belastung  $\pm p/2$  (Abb. 731c) überlagert. Ist der Spannungszustand bei gestützter Belastung (Abb. 732b) bekannt, so läßt sich der Spannungszustand für die angehängte Last  $p$  (Abb. 732a) daraus durch Überlagerung mit einer gleichförmigen Querbeanspruchung  $\sigma_z = +p$  (Abb. 732c)

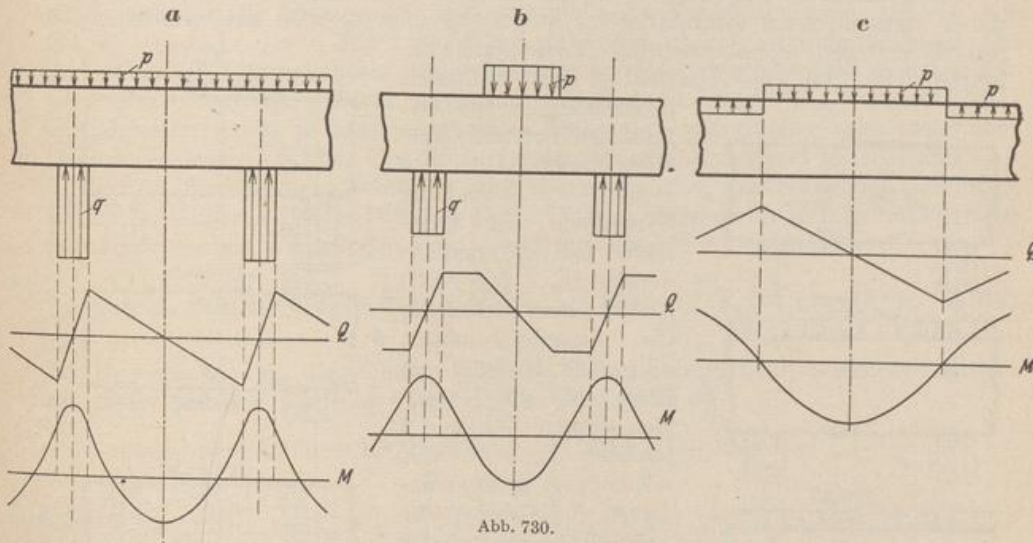


Abb. 730.

entwickeln. Die Spannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xxz}$  aus dem Eigengewicht  $g \text{ t/m}^3$  (Abb. 733a) der Scheibe lassen sich aus den Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  einer gleichförmig verteilten Randbelastung  $p = 2gh$  (Abb. 733b) bestimmen, da die vorgeschriebene Belastung  $g$  durch Überlagerung der Randbelastung mit Kräften der Abb. 733c hervorgeht. Diesen sind die Spannungen  $\bar{\sigma}_z = g(h+z)$ ,  $\bar{\sigma}_x = 0$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = 0$  zugeordnet.

Die Belastung an einer Periode  $2l$  des Streifens steht im Gleichgewicht.

$$P = \int_{-l}^{+l} p(x) dx = \int_{-l}^{+l} q(x) dx = Q.$$



Ist sie außerdem in jedem Felde  $2l$  zur senkrechten Mittellinie symmetrisch, so enthält die Reihenentwicklung der Belastung  $p$  und der Stützenkräfte  $q$  nach Fourier allein eine Folge von geraden trigonometrischen Funktionen.

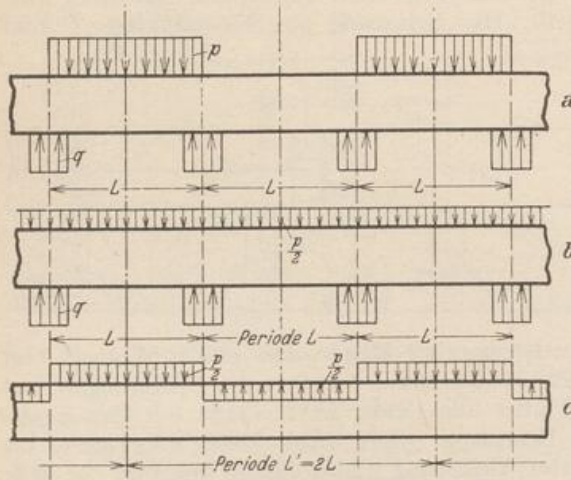


Abb. 731. Wechsel von belasteten und unbelasteten Feldern.

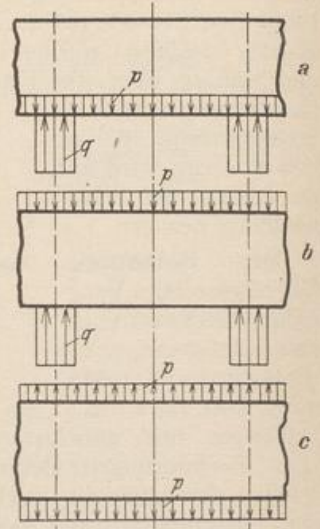


Abb. 732. Angehängte Belastung.

Die  $x$ -Achse ist Symmetrieachse des Streifens. Die äußeren Kräfte lassen sich daher stets in einen symmetrischen Anteil  $^{(1)}p$  und in einen antimetrischen Anteil  $^{(2)}p$  zerlegen, um übersichtliche Lösungen zu erhalten (Abb. 734). Das Kraftfeld ist dann mit allen

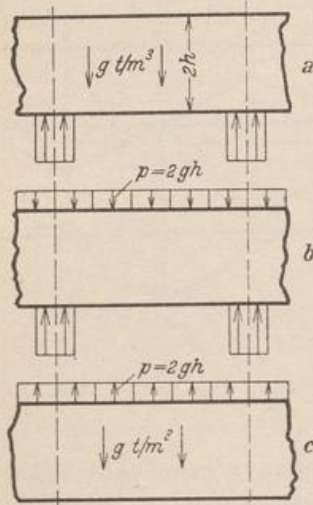


Abb. 733. Eigengewicht.

Randbedingungen ebenfalls symmetrisch oder antimetrisch. In der  $x$ -Achse ( $z=0$ ) sind bei Symmetrie der Belastung die Schubspannungen  $\tau_{xz}$ , bei Antimetrie der Belastung die Längsspannungen  $\sigma_x, \sigma_y$  Null. In dem einen Falle sind die Hauptspannungen für  $z=0$  parallel zur  $x$ - und  $z$ -Richtung, in dem anderen Falle wird die  $x$ -Achse von ihnen unter  $45^\circ$  geschnitten.

**Der Ansatz.** Spannungsfunktionen  $F$  des Streifens sind von L.N.G.Filon, A.Timpe.

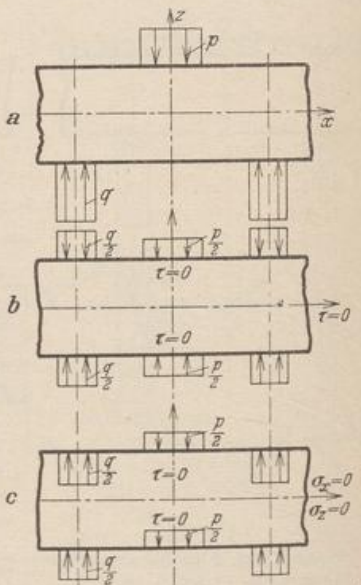


Abb. 734. Umordnung der Belastung (a) in den symmetrischen Anteil  $^{(1)}p$  (b) und den antimetrischen Anteil  $^{(2)}p$  (c).

F. Bleich, Th. v. Kármán und F. Seewald mit verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln bestimmt und in jüngster Zeit durch H. Crámer, F. Dischinger und H. Bay zur Berechnung von Tragwänden aus Eisenbeton verwendet worden.



Die Lösung erscheint in jedem Falle als Reihenentwicklung. Sie ist um so brauchbarer, je besser die Reihen konvergieren und je einfacher sich dabei das allgemeine Spannungsbild abspalten und in den singulären Abschnitten des Streifens zum vollständigen Ergebnis ergänzen läßt.

Die Belastung des Streifens besteht bei L. N. G. Filon aus zwei gleichgroßen, entgegengesetzt gerichteten Einzellasten. Das Ergebnis der Untersuchung dient auch zur Beurteilung der Spannungszustände aus anderen Belastungen. Th. v. Kármán und F. Seewald behandeln die Biegung des Balkenträgers auf zwei Stützen mit den Einflußfunktionen der Spannungen und verwenden dabei ebenso wie Filon ein Fouriersches Integral als Spannungsfunktion. F. Bleich untersucht den Streifen für periodische Belastungen der Ränder und entwickelt die allgemeine Lösung für (1055) aus Partikularlösungen der homogenen biharmonischen Differentialgleichung. Dabei entsteht ein ähnlicher Ansatz wie auf S. 718 bei der Untersuchung der Halbebene, dem Grenzfall des unendlich hohen Streifens. Bei Symmetrie der Belastung zur  $z$ -Achse enthält der Ansatz ebenso wie (1070a) neben hyperbolischen Funktionen von  $z$  nur gerade trigonometrische Funktionen von  $x$ .

$$F = \sum_{n=0}^{n=\infty} F_n = F_0 + \sum_1^{\infty} Z_n \cos \xi_n \quad \text{mit} \quad \frac{l}{n\pi} = l_n \quad \text{und} \quad n\pi \frac{x}{l} = \frac{x}{l_n} = \xi_n. \quad (1073a)$$

$Z_n$  ist dabei wiederum eine Funktion, die allein die Veränderliche  $z$  enthält und die Differentialgleichung, also die Bedingung

$$\frac{d^4 Z_n}{dz^4} - \frac{2}{l_n^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{l_n^4} Z_n = 0, \quad (1073b)$$

erfüllt, nur daß die Lösungen  $Z_n$  in diesem Falle die Randbedingungen für  $z = +h$  mit  $\sigma_z = -p_0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ , für  $z = -h$  mit  $\sigma_z = -p_u$ ,  $\tau_{xz} = 0$  erfüllen müssen. Sie sind daher bei symmetrischer und antisymmetrischer Belastung ebenfalls symmetrisch oder antisymmetrisch zur  $x$ -Achse, so daß die allgemeine Lösung  $^{(1)}Z_n$ ,  $^{(2)}Z_n$  der Differentialgleichung aus je zwei partikulären Integralen mit geraden oder ungeraden Funktionen von  $z$  besteht. Um die Integrationskonstanten derart festzusetzen, daß  $Z_n$  die Randbedingungen erfüllt, werden die zur  $x$ -Achse symmetrischen oder antisymmetrischen äußeren Kräfte  $^{(1)}p$ ,  $^{(2)}p$  (Abb. 734b, c) ebenfalls in Reihen mit geraden trigonometrischen Funktionen von  $x$  und der Periode  $2l$  entwickelt.

$$^{(1)}p(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n = ^{(1)}p_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}p_n, \quad ^{(2)}p(x) = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n = \sum_1^{\infty} ^{(2)}p_n. \quad (1074)$$

Die Beiwerte  $A_0$ ,  $A_n$ ,  $A'_n$  können für jeden Belastungsfall nach bekannten Regeln berechnet werden. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 66.

Lösung bei symmetrischer Belastung  $^{(1)}p$  nach Abb. 734b mit  $\zeta_n = \frac{z}{l_n}$ .

$$\left. \begin{aligned} ^{(1)}F &= ^{(1)}F_0 + \sum_1^{\infty} ^{(1)}Z_n \cos \xi_n = -A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^{\infty} A_n l_n^2 (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{z,n} = -A_0 + \sum_1^{\infty} A_n (C_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n) \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\sigma_{x,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + 2D_n) \mathfrak{C}o\int \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{S}in \zeta_n] \cos \xi_n, \\ ^{(1)}\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_0^{\infty} ^{(1)}\tau_{xz,n} = -\sum_1^{\infty} A_n [(C_n + D_n) \mathfrak{S}in \zeta_n + D_n \zeta_n \mathfrak{C}o\int \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} (1075a)$$



Die Bedingungen  $-(1)\sigma_{z,n} = (1)p_n = A_n \cos \xi_n$  und  $(1)\tau_{xz} = 0$  an den Rändern  $z = \pm h$  oder  $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$  liefern:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & D_n &= \frac{2\sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ C_n + D_n &= -\frac{2\lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, & C_n + 2D_n &= \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1075b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } \sigma_z &= \sum (1)p_n \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \sigma_z &= -(1)p_0 - \sum (1)p_n \frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1076)$$

Lösung bei antimetrischer Belastung  $(2)p$  nach Abb. 734c.

$$\left. \begin{aligned} (2)F &= \sum_1^\infty (2)Z_n \cos \xi_n = -\sum_1^\infty A'_n l_n^2 (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{z,n} = \sum_1^\infty A'_n (C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n) \cos \xi_n, \\ (2)\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \sum_1^\infty (2)\sigma_{x,n} = -\sum_1^\infty A'_n [(C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n] \cos \xi_n, \\ (2)\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \sum_1^\infty (2)\tau_{xz,n} = -\sum_1^\infty A'_n [(C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n] \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1077a)$$

Die Bedingungen  $-(2)\sigma_{z,n} = \pm (2)p_n = \pm A'_n \cos \xi_n$  und  $(2)\tau_{xz} = 0$  an den Rändern  $z = \pm h$  oder  $\zeta_n = \pm h/l_n = \pm \lambda_n$  liefern:

$$\left. \begin{aligned} C'_n &= \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & D'_n &= \frac{-2\operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ C'_n + D'_n &= \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, & C'_n + 2D'_n &= -\frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1077b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } z = \pm h \text{ ist } (2)\sigma_x &= \pm \sum_1^\infty (2)p_n \frac{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \\ \text{für } z = 0 \text{ ist } \tau_{xz} &= \sum_1^\infty A'_n \frac{2\lambda_n \sin \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \sin \xi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1078)$$

Das Kraftfeld ist darnach durch die Belastung und deren Reihenentwicklung nach Fourier (Tab. 66) und durch die Abmessungen  $L = 2l$ ,  $H = 2h$ ,  $2c$  und die davon abhängigen Verhältniszahlen  $\xi_n$ ,  $\zeta_n$ ,  $\lambda_n$  bestimmt. Es wird durch die Isoklinen und die Trajektorien der Hauptlängsspannungen und durch die Linien gleicher Hauptlängs- und gleicher Hauptschubspannung beschrieben. Sie zeigen den Ausgleich der äußeren Kräfte zwischen den Rändern des Streifens. In der Regel begnügt man sich jedoch mit den Komponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  in einzelnen ausgezeichneten Schnitten  $x = \text{const}$  oder  $z = \text{const}$ , insbesondere  $x = 0$  (Feldmitte),  $x = \pm l$  (Stützenquerschnitt),  $z = 0$  (waagerechte Symmetrieachse) und  $z = \pm h$  (Ränder), um auf die Grenzwerte der Spannungen zu schließen. Daneben können auch einzelne ausgezeichnete Spannungen als Funktionen von  $h$  oder  $c$  bestimmt werden. Leider ist die Konvergenz der Reihen für die Untersuchung in der Nähe der Ränder ungünstig. Bei hohen Streifen ( $h \gg l$ ) genügen auch die Spannungen der Halbebene nach (1072), so daß angenähert



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(o)} &= -(\dot{p}^{(o)} - \dot{p}_0^{(o)}), & \sigma_x^{(u)} &= -(\dot{p}^{(u)} - \dot{p}_0^{(u)}) \\ \dot{p}_0^{(o)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(o)} dx, & \dot{p}_0^{(u)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \dot{p}^{(u)} dx \end{aligned} \right\} \quad (1079)$$

gesetzt werden kann.

Die Längsspannungen  $\sigma_x$  sind in der Nähe des belasteten Randes größer, in der Nähe des unbelasteten Randes kleiner als beim Geradliniengesetz. Im Grenzfall  $H \gg L$  wird der Streifen zur Halbebene mit  $-\sigma_x = \pm p$  am belasteten Rande. Daher ist  $\sigma_x$  am Rande des Streifens stets größer als  $p$ , konvergiert jedoch gegen die Mitte schnell gegen Null. Für  $L \geq 2H$  kann nach dem Geradliniengesetz gerechnet werden.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung müssen die Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äußeren Kräften erfüllen. In jedem Querschnitt ist daher

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dz = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz = M, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz = -R_x.$$

Die Schnittkräfte  $M$  und  $R_x$  der periodischen Belastung sind bekannt.

Der Verschiebungszustand wird ebenso wie beim biegesteifen Stab durch die Krümmung  $1/\varrho_x$  von ausgezeichneten Linien  $z = \text{const}$ , also  $z = 0, z = \pm h$  beim Streifen,  $z = 0, z = h, z = 2h \dots$  bei der Halbebene beschrieben. Bei kleinen Verschiebungen ist  $1/\varrho_x = \partial^2 w / \partial x^2$ . Da außerdem nach (1050) und (1051)

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist, wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ &= -\frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1080a)$$

Die Summanden beschreiben einzeln den Anteil der Komponenten des Spannungszustandes an der Krümmung. Sie kann mit (1054b) nach

$$\frac{1}{\varrho_x} = -\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - (2 + \mu) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \right] \quad (1080b)$$

aus (1075a) oder (1077a) berechnet werden.

**Gleichförmig verteilte Belastung am oberen Rande.** Das Kräftebild Abb. 735a läßt sich in drei Teile zerlegen. Der Anteil I besteht aus einer periodischen, symmetrischen Streckenlast  $\dot{p}$  (Abb. 735b) mit Spannungen nach (1075a).

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{2\dot{p}_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\dot{p}}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

Die Schubspannungen sind in den Schnitten  $x = 0, x = l, z = 0, z = \pm h$  Null und daher die Längsspannungen  $\sigma_x, \sigma_z$  dort gleichzeitig Hauptspannungen. Da die

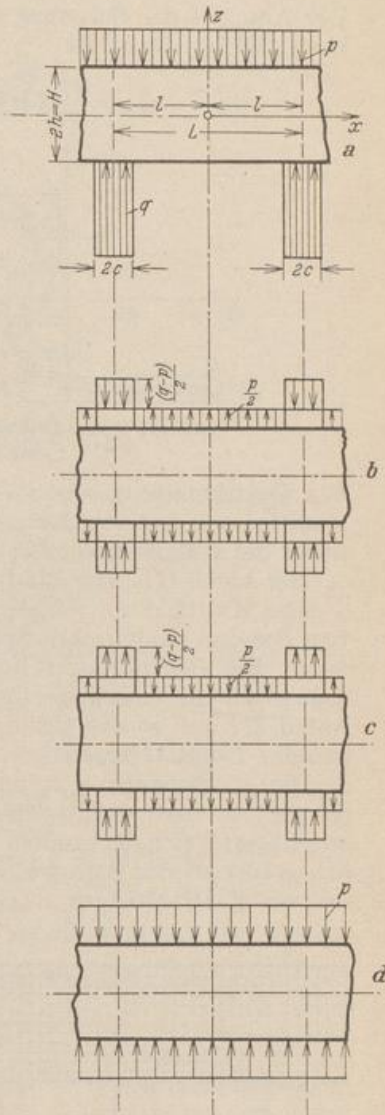


Abb. 735.



Schnittkräfte  $M, N, Q$  bei symmetrischem Lastangriff Null werden, ist in jedem Querschnitt

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dF = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dF = 0.$$

Der Anteil II der Belastung (Abb. 735c) ist antimetrisch und erzeugt Spannungen nach (1077a). Dabei ist

$$A'_n = -A_n = \frac{2p_2}{\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad p_2 = +\frac{p}{2} \frac{l-c}{c}, \quad \gamma_n = n\pi \frac{l-c}{l}. \quad (1081)$$

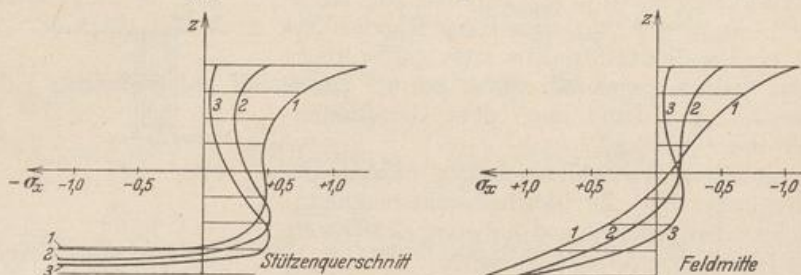


Abb. 736. Verlauf der Funktion  $\sigma_x(z)$  bei Balken mit veränderlichem Verhältnis  $H/L$ .  
Kurven 1:  $H/L = 1/2$ , Kurven 2:  $H/L = 2/3$ , Kurven 3:  $H/L = 1$ .

Die Querschnitte  $x = 0, x = l$  sind frei von Schubspannungen  $\tau_{xz}$ , der Längsschnitt  $z = 0$  frei von Längsspannungen  $\sigma_x, \sigma_z$ . Die Hauptspannungen schneiden daher die  $x$ -Achse unter  $45^\circ$ .

Der Anteil III (Abb. 735d) liefert einen einachsigen Spannungszustand  $-\sigma_z = p$ .

Das Kraftfeld zur vorgeschriebenen Belastung entsteht entweder durch Addition der drei analytischen Spannungsanteile oder durch die Addition ihrer Zahlenwerte. Bei gleichförmiger Belastung  $p$  am unteren Rande nach Abb. 732a tritt dazu noch die einachsige Querbeanspruchung  $+\sigma_z = p$ . Sie hebt sich gegen den Anteil III auf, so daß sich das Ergebnis in diesem Falle allein aus den Spannungsanteilen I und II zusammensetzt.

Die Längsspannung  $\sigma_x$  am unteren (gestützten) Rande eines hohen Streifens ( $H \gg L$ ) ist nach (1079) angenähert gleich der Randbelastung  $p$  oder  $q$ , also auch angenähert gleich der größten Längsspannung  $\sigma_x$  eines Querschnittes. Sie ist wesentlich größer als der Betrag  $\sigma_x = M/W = 6M/h^2$  nach dem Geradliniengesetz. Nach den von F. Dischinger angegebenen Schaulinien (Abb. 736) nähert sich die Funktion  $\sigma_x(z)$  eines Querschnittes bei abnehmendem Verhältnis  $h/l$  der Navierschen Geraden in Feldmitte schneller als im Stützenquerschnitt.

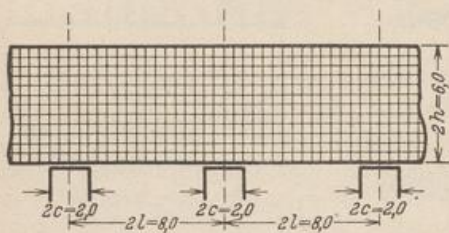


Abb. 737.

Spannungszustand im Mittelfeld einer hohen Silowand ( $H/L = 3/4$ ) auf mehreren Stützen (Abb. 737).

Stützung und Belastung stimmen mit den Angaben in Abb. 723 überein, so daß ein Vergleich mit den Ergebnissen auf S. 722 möglich ist.

Die Belastung wird nach S. 727 in den symmetrischen (Abb. 735b) und den antimetrischen Anteil (Abb. 735c) aufgespalten.

Zusammenstellung der Formeln nach S. 725f.

A. Symmetrischer Anteil.\*

$${}^{(1)}p = p_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos \xi_n, \quad \xi_n = n\pi \frac{x}{l}, \quad p_0 = 0, \quad A_n \text{ nach Tabelle 66.}$$



$$C_n = -\frac{2(\sin \lambda_n + \lambda_n \operatorname{Coj} \lambda_n)}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = -\frac{\operatorname{Tg} \lambda_n + \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n},$$

$$D_n = \frac{2 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin 2\lambda_n} = \frac{\operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} + \sin \lambda_n}, \quad \lambda_n = n\pi \frac{h}{l},$$

$$\varphi_n(\zeta) = C_n \operatorname{Coj} \zeta_n + D_n \zeta_n \sin \zeta_n,$$

$$\psi_n(\zeta) = (C_n + 2D_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D_n \zeta_n \sin \zeta_n,$$

$$\chi_n(\zeta) = (C_n + D_n) \sin \zeta_n + D_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n.$$

B. Antimetrischer Anteil.

$${}^{(2)}p = \sum_1^{\infty} A'_n \cos \xi_n, \quad A'_n = -A_n,$$

$$C'_n = \frac{2(\operatorname{Coj} \lambda_n + \lambda_n \sin \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = \frac{1 + \lambda_n \operatorname{Tg} \lambda_n}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$D'_n = -\frac{2 \operatorname{Coj} \lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = -\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\operatorname{Coj} \lambda_n} - \sin \lambda_n},$$

$$\varphi'_n(\zeta) = C'_n \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n,$$

$$\psi'_n(\zeta) = (C'_n + 2D'_n) \sin \zeta_n + D'_n \zeta_n \operatorname{Coj} \zeta_n,$$

$$\chi'_n(\zeta) = (C'_n + D'_n) \operatorname{Coj} \zeta_n + D'_n \zeta_n \sin \zeta_n.$$

C. Superposition der Anteile A und B.

$$\begin{aligned} E_n(\xi) &= A_n \cos \xi_n, & F_n(\xi) &= A_n \sin \xi_n, \\ E'_n(\xi) &= A'_n \cos \xi_n = -E_n(\xi), & F'_n(\xi) &= A'_n \sin \xi_n = -F_n(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= {}^{(1)}\sigma_x + {}^{(2)}\sigma_x = \sum_1^{\infty} \varphi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi) + \sum_1^{\infty} \varphi'_n(\zeta) \cdot E'_n(\xi) \\ &= \sum_1^{\infty} [\varphi_n(\zeta) - \varphi'_n(\zeta)] E_n(\xi) = \sum_1^{\infty} \bar{\varphi}_n(\zeta) \cdot E_n(\xi). \\ \sigma_z &= {}^{(1)}\sigma_z + {}^{(2)}\sigma_z = -\sum_1^{\infty} \psi_n(\zeta) \cdot E_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \psi'_n(\zeta) \cdot E'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\psi_n(\zeta) - \psi'_n(\zeta)] E_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\psi}_n(\zeta) \cdot E_n(\xi). \\ \tau_{xz} &= {}^{(1)}\tau_{xz} + {}^{(2)}\tau_{xz} = -\sum_1^{\infty} \chi_n(\zeta) \cdot F_n(\xi) - \sum_1^{\infty} \chi'_n(\zeta) \cdot F'_n(\xi) \\ &= -\sum_1^{\infty} [\chi_n(\zeta) - \chi'_n(\zeta)] F_n(\xi) = -\sum_1^{\infty} \bar{\chi}_n(\zeta) \cdot F_n(\xi). \end{aligned}$$

Auswertung der Formeln.

Wie bei dem Beispiel in Abschn. 74 wird die Rechnung auf die ersten fünf Fouriertglieder beschränkt.

1. Fourierkonstanten  $A_n = -A'_n$ . Die Konstanten  $A_n$  sind halb so groß wie die entsprechenden Werte auf S. 720.

$n$	1	2	3	4	5
$A_n$	-0,900316	+0,636620	-0,300106	0	+0,180064

2. Integrationskonstanten  $C_n, D_n, C'_n, D'_n$ .

$n$	1	2	3	5
$C_n$	-0,58871	-102,4816 · 10 <sup>-3</sup>	-13,73953 · 10 <sup>-3</sup>	-195,5161 · 10 <sup>-6</sup>
$D_n$	+0,17321	+17,9378 · 10 <sup>-3</sup>	+1,70284 · 10 <sup>-3</sup>	+15,2974 · 10 <sup>-6</sup>
$C_n + D_n$	-0,41550	-84,5438 · 10 <sup>-3</sup>	-12,03669 · 10 <sup>-3</sup>	-180,2187 · 10 <sup>-6</sup>
$C_n + 2D_n$	-0,24229	-66,6060 · 10 <sup>-3</sup>	-10,33385 · 10 <sup>-3</sup>	-164,9213 · 10 <sup>-6</sup>
$C'_n$	-0,69259	-102,7831 · 10 <sup>-3</sup>	-13,74007 · 10 <sup>-3</sup>	-195,5162 · 10 <sup>-6</sup>
$D'_n$	+0,20897	+17,9954 · 10 <sup>-3</sup>	+1,70291 · 10 <sup>-3</sup>	+15,2974 · 10 <sup>-6</sup>
$C'_n + D'_n$	-0,48361	-84,7877 · 10 <sup>-3</sup>	-12,03716 · 10 <sup>-3</sup>	-180,2188 · 10 <sup>-6</sup>
$C'_n + 2D'_n$	-0,27464	-66,7923 · 10 <sup>-3</sup>	-10,33424 · 10 <sup>-3</sup>	-164,9213 · 10 <sup>-6</sup>



3. Funktionen  $\varphi, \psi, \chi$  für  $z = -0,5l$  ( $\zeta = -0,5$ ).

$n$	1	2	3	5
$\varphi_n$	-0,85105	-0,53715	-0,31819	-0,09707
$\varphi'_n$	+0,77020	+0,53168	+0,31801	+0,09707
$\overline{\varphi}_n$	-1,62125	-1,06883	-0,63620	-0,19414
$\psi_n$	+0,01818	-0,12128	-0,12861	-0,05767
$\psi'_n$	-0,19162	+0,11603	+0,12846	+0,05767
$\overline{\psi}_n$	+0,20980	-0,23731	-0,25707	-0,11534
$\chi_n$	+0,27350	+0,32313	+0,22322	+0,07737
$\chi'_n$	-0,45806	-0,32995	-0,22342	-0,07737
$\overline{\chi}_n$	+0,73156	+0,65306	+0,44664	+0,15474

4. Spannungen im Schnitt  $z = -0,5l$ .

$$\sigma_x = -0,20980 E_1(\xi) + 0,23731 E_2(\xi) + 0,25707 E_3(\xi) + 0,11534 E_5(\xi),$$

$$\sigma_z = -1,62125 E_1(\xi) - 1,06883 E_2(\xi) - 0,63620 E_3(\xi) - 0,19414 E_5(\xi),$$

$$\tau_{xz} = -0,73156 F_1(\xi) - 0,65306 F_2(\xi) - 0,44664 F_3(\xi) - 0,15474 F_5(\xi).$$

Die Funktionen  $E_n(\xi), F_n(\xi)$  können von S. 721 übernommen werden, sind jedoch wegen der Aufteilung der Belastung in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil durch 2 zu dividieren. Damit erhält man die folgenden Spannungen in  $t/m^2$ :

$\xi$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1
$\sigma_x$	+0,283	+0,244	+0,176	+0,056	-0,151	-0,270	-0,176	-0,030	+0,019
$\sigma_z$	+0,935	+0,954	+0,922	+0,831	+0,680	+0,131	-0,922	-1,916	-2,296
$\tau_{xz}$	0	+0,056	+0,164	+0,274	+0,497	+0,862	+0,996	+0,644	0

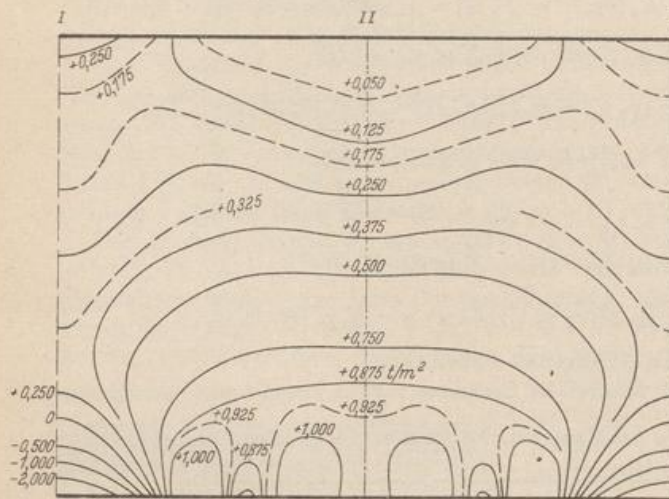


Abb. 738. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .

5. Hauptspannungen. Die Spannungen werden für die Knoten des quadratischen Netzes Abb. 737 berechnet. Sie liefern die Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$  (Abb. 738), gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$  (Abb. 739) und die Längsspannungstrajektorien (Abb. 740).

**Feldweise wechselnde Belastung  $\pm p$  am oberen Rande** (Abb. 741a u. 731c).

Die Belastung dient nur dazu, die Spannungen bei abwechselnd belasteten und unbelasteten Feldern (Abb. 731a) aus der Lösung für gleichförmige Belastung aller Felder (Abb. 731b) herzuleiten. Ihre Periodenlänge  $L'$  ist gleich der doppelten

Stützenentfernung  $L$ . Bei der Superposition nach Abb. 731 ist die Phasenverschiebung der Perioden zu beachten.

Die Stützkkräfte sind Null, da die Belastung Abb. 741a innerhalb einer Periode  $L'$  im Gleichgewicht ist. Sie wird nach Abb. 741b, c in den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil zerlegt. Die Konstanten der nach Fourier entwickelten Randbelastung jedes Anteils stimmen miteinander überein und werden nach Tab. 66 mit

$$A_n = A'_n = p \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \tag{1082}$$



angeschrieben. Die Spannungen lassen sich damit nach (1075a) und (1077a) unter Beachtung der doppelten Periode  $L'$  berechnen.

Ist der Spannungszustand aus einer Belastung  $\pm p$  am oberen Rande bekannt, so lassen sich die Spannungen bei Eintragung am unteren Rande am einfachsten durch Überlagerung der Spannungen einer symmetrischen Belastung anschreiben.

**Symmetrische Gruppen von Streckenlasten  $P = 2cp$**  (Abb. 742). Die Belastung ist symmetrisch und wird nach Tab. 66 in eine Fouriersche Reihe mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= p_0 = p \frac{c}{l} = \frac{P}{2l}, \\ A_n &= 2p_0 \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n} \\ &= \frac{P}{l} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n}, \\ \gamma_n &= n\pi \frac{c}{l} \end{aligned} \right\} (1083)$$

entwickelt. Die Schnittkräfte  $M, N, Q$  sind in jedem Querschnitt Null, die Längsspannungen  $\sigma_x$  im Längsschnitt  $z = 0$  von Streifen mit Randabständen  $h \geq 2l$  angenähert konstant  $-pc/l$ . Dies wird durch Zahlenrechnung für die Längsschnitte  $z_1 = 0$  und  $z_2 = h - 2l$ , eines Streifens mit  $H/L = 3$  und  $l/c = 4$  (Abb. 743) nachgewiesen.

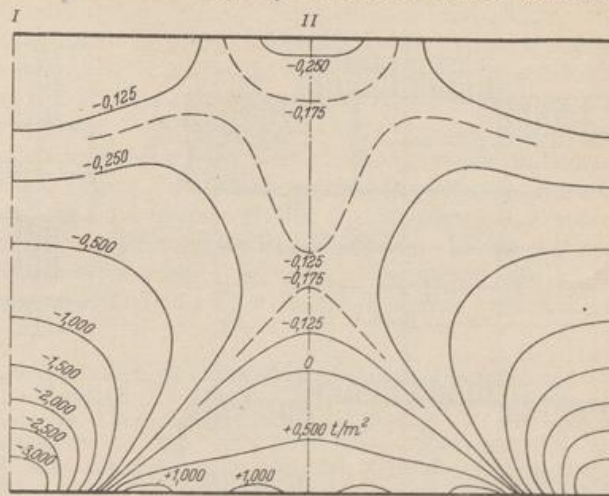
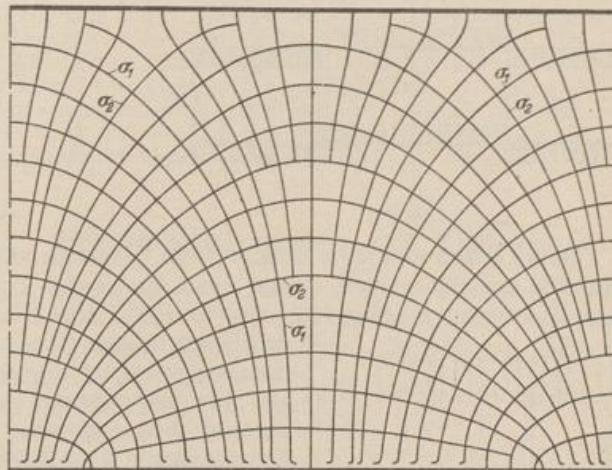
Abb. 739. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$ .

Abb. 740. Längsspannungstrajektorien.

$\xi = x/l$		0	0,25	0,50	0,75	1
$z_1 = 0$	$\sigma_x/p$	-0,251	-0,251	-0,250	-0,249	-0,249
	$\tau_{xz}/p$	0	0	0	0	0
$z_2 = h - 2l$	$\sigma_x/p$	-0,256	-0,254	-0,250	-0,246	-0,244
	$\tau_{xz}/p$	0	+0,004	+0,005	+0,004	0

Da der Längsschnitt  $z_1 = 0$  frei von Schubspannungen ist, kann hier der Streifen ohne Störung des Spannungszustandes in zwei Teile zerlegt werden, wenn dabei die Längsspannungen  $\sigma_x \approx -pc/l$  an den Schnittändern als äußere Kräfte mitwirken. Nach den Ergebnissen der Zahlenrechnung sind die Schubspannungen auch



noch in Längsschnitten  $z_2 \leq h - 2l$  nahezu Null, so daß die Zerlegung des Streifens in drei parallele Abschnitte mit den Längsspannungen  $\sigma_z \approx -pc/l$  als äußeren Kräften keine wesentliche Änderung des Spannungszustandes bedeutet.

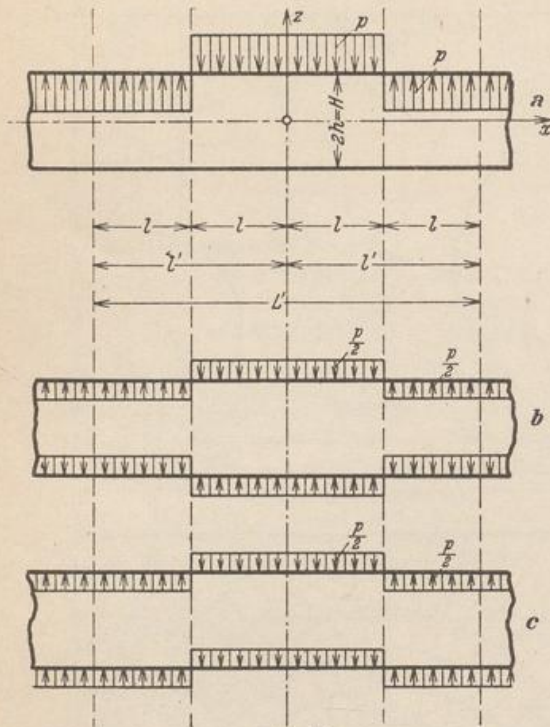


Abb. 741.

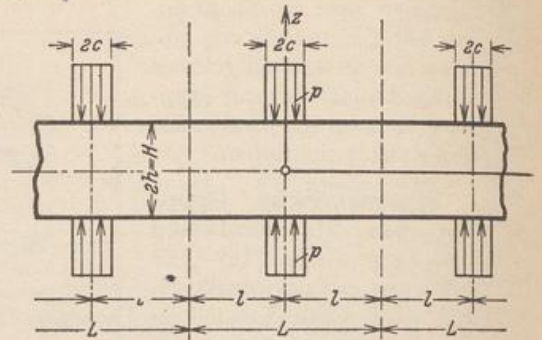


Abb. 742.

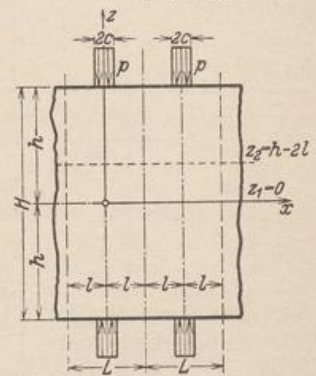


Abb. 743.  $H/L = 3, l/c = 4$ .

Daher lassen sich hohe Wände ( $H \gg L$ ) mit gleichförmiger Belastung des oberen Randes angenähert auf Grund einer Zerlegung in die Abschnitte  $h_1 = H - L$ ,  $h_2 = L$  berechnen (Abb. 744).

Der Abschnitt  $H - L$  unterliegt im wesentlichen nur dem einachsigen Spannungszustand  $-\sigma_z = p$ . Der Spannungszustand des Abschnitts  $h_2$  wird genau genug als Spannungszustand eines Streifens mit dem Randabstand  $2h_2$  und einer symmetrischen Gruppe von Streckenlasten  $2qc$  berechnet.

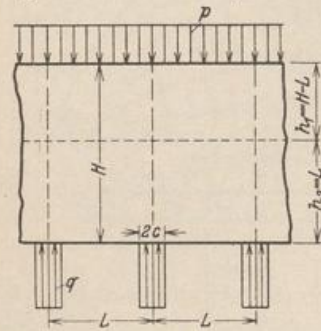


Abb. 744.

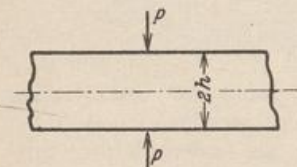


Abb. 745.

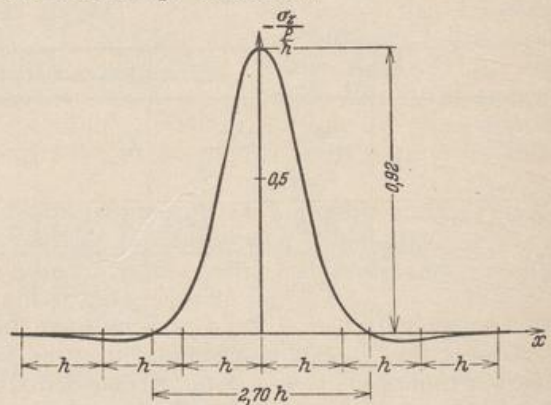


Abb. 746.



Dasselbe Ergebnis läßt sich auch aus einer Spannungsfunktion ableiten, die von N. L. G. Filon für die Belastung der Ränder eines Streifens mit zwei gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Einzellasten  $P$  nach Abb. 745 als Fouriersches Integral angegeben worden ist. Die Zustandslinien  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_z^*$ ,  $\tau_{xz}^*$  für  $z = \text{const}$  sind gleichzeitig Einflußlinien für eine wandernde Lastengruppe. Die Summe der positiven und negativen Anteile der Flächen  $\sigma_x^*$ ,  $\tau_{xz}^*$  sind in den Längsschnitten  $z = \text{const}$  Null, da bei gleichförmiger Belastung der Ränder nur Spannungen  $\sigma_z$  entstehen.

Nach Abb. 746 erzeugt die einzelne Kräftegruppe  $P$  (Abb. 745) auf der Breite  $2,7h$  der Symmetrieachse Druckspannungen  $\sigma_z$ . Darüber hinaus entstehen unbedeutende Zugspannungen, die schnell gegen Null konvergieren. Einzellasten werden daher durch ein elastisches Mittel auf  $2,7h$  Breite verteilt. Die Spannung  $\sigma_z$  erreicht mit  $0,92 P/h$  in der Wirkungslinie der Einzelkraft das Maximum. Sie ist nahezu gleich der auf den halben Scheibenquerschnitt bezogenen Spannung. Zwischen Einzellasten mit einem größeren Abstand als  $2,7h$  bestehen keine wesentlichen Beziehungen.

Filon, L. N. G.: On an approximate solution of the bending of a beam of rectangular cross section. Philos. Trans. Royal Soc. London 1903 (A.) Bd. 201 S. 63. — Timpe, A.: Problem der Spannungsverteilung in ebenen Systemen. Diss. Göttingen 1905. — Bleich, F.: Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem. B. I. 1923 S. 255. — Th. v. Kármán: Über die Grundlagen der Balkentheorie. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Seewald, F.: Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Abhandlg. aus dem Aerodynamischen Institut d. Techn. Hochschule Aachen. Berlin 1927. — Crámer, H.: Spannungen in hohen wandartigen Trägern. Bericht über die II Int. Tagung für Brücken- und Hochbau. Wien 1929. — Derselbe: Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung. Z. A. M. 1930 S. 205. — Baß, H.: Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. J. A. 1931 S. 435. — Cooker, E. G., u. L. N. G. Filon: A Treatise on Photo Elasticity. Cambridge 1931. — Dischinger, F.: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Abhandlungen der Int. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Zürich 1932 und Beton u. Eisen 1933 S. 237. — Crámer, H.: Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton u. Eisen 1933 S. 233.

## 76. Die Berechnung der Spannungsfunktion mit Differenzen.

Die Erweiterung der Randbedingungen durch die rechteckige oder polygonale Begrenzung der Scheiben bereitet beim Ansatz und bei der numerischen Lösung der Spannungsfunktion  $F$  wesentlich größere Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde begnügt man sich bei derartigen Aufgaben ebenso wie bei ähnlichen Problemen der Plattenbiegung mit einer Näherungslösung durch die Entwicklung der Ansätze (1054) in Differenzen. Da die Differentialgleichung des ebenen Spannungszustandes und die Differentialgleichung der Plattenbiegung unter Randkräften miteinander übereinstimmen, kann die Differenzengleichung des ebenen Spannungszustandes in rechtwinkligen Koordinaten nach (999) oder in Polarkoordinaten unmittelbar angeschrieben werden. Die Spannungsfläche erscheint dann ebenso wie die elastische Fläche der Platte als Gitter, dessen Aufriß aus zwei Gruppen von äquidistanten, sich rechtwinklig kreuzenden geraden Linien besteht ( $\Delta x \neq \Delta z$ ). Die Endpunkte der Ordinaten  $F_k$  der Gitterknoten  $k$  liegen in der Spannungsfläche. Ihre gegenseitigen Beziehungen lassen sich an jedem Gitterknoten durch eine lineare Gleichung ausdrücken. Sie lautet für  $\Delta x = \Delta z$  nach (1000) folgendermaßen (Abb. 747):

$$20F_k - 8(F_{k-1} + F_l + F_{k+1} + F_i) + 2(F_{l-1} + F_{l+1} + F_{i-1} + F_{i+1}) + (F_{k-2} + F_m + F_{k+2} + F_h) = 0. \quad (1084)$$



Abb. 747.







Elimination der Ordinaten an den Nebenknoten nach (1061b): Für die Randknoten 21 bis 35 wird  $\partial F/\partial n = -R_1$ , so daß z. B. für die Knoten 22, 28 und 33 die folgenden Beziehungen entstehen:

$$\frac{F_{37} - F_3}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{44} - F_9}{2\Delta} = 0, \quad \frac{F_{50} - F_{18}}{2\Delta} = 0.$$

Daher ist  $F_{37} = F_3, F_{44} = F_9, F_{50} = F_{18}$ . Das vollständige Ergebnis für alle Rand- und Außenknoten ist in Abb. 751 eingetragen.

Aufstellung der Differenzgleichungen nach (1084): Gleichung für den Punkt 3:

$$20F_3 - 8(F_2 + 0 + F_4 + F_7) + 2(F_6 + 0 + 0 + F_8) + (F_1 + F_3 + F_3 + F_{11}) = 0.$$

Gleichung für den Punkt 18:

$$20F_{18} - 8(F_{17} + F_{14} + F_{19} - 4,0 p \Delta^2) + 2(-1,5 p \Delta^2 + F_{13} + F_{15} - 5,5 p \Delta^2) + (0 + F_{10} + F_{20} + F_{18}) = 0.$$

	40	39	38	37	36
41	25	24	23	22	21
42	26	1	2	3	4
43	27	5	6	7	8
44	28	9	10	11	12
45	29	13	14	15	16
46	30	17	18	19	20
47	31	32	33	34	35
48	49	50	51	52	

Abb. 750.

0	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$
0	0	0	0	0	0
$F_1$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_2$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_3$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_4$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_5$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_6$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_7$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_8$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_9$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$F_{10}$	0	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$15a$	0	$-15a$	$-40a$	$-55a$	$-80a$
0	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$
$a = p\Delta^2$					

Abb. 751.

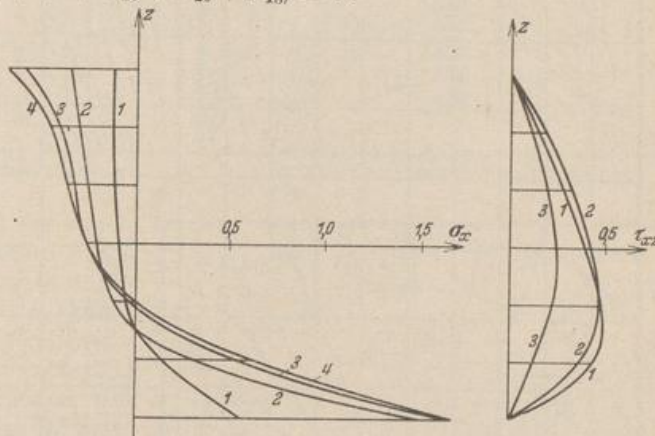


Abb. 752a, b. Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xz}$  in den Schnitten im Abstand  $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta$  vom Außenrand (Kurven 1 bis 4).

Das vollständige Gleichungssystem ist nach Zusammenfassung der einzelnen Unbekannten  $F_k$  in der Matrix auf S. 736 enthalten. Die Lösung steht auf S. 737.

Die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  werden hieraus nach (1085) ermittelt. Sie sind in den Abb. 752a bis c aufgetragen. Die Abb. 753a bis c enthalten die Linien gleicher Hauptlängsspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und die Längsspannungstrajektorien, deren Verlauf bei der groben Maschenteilung der Lösung allerdings im mittleren Bereich des unteren Randes nicht angegeben werden kann. Trotzdem eignen sich die Abb. 753 zu einem kritischen Vergleich mit der Lösung für die Halbscheibe auf S. 722 und für den Streifen auf S. 730f. Dabei verdient vor allem der Einfluß der Ränder auf den Spannungszustand Beachtung.

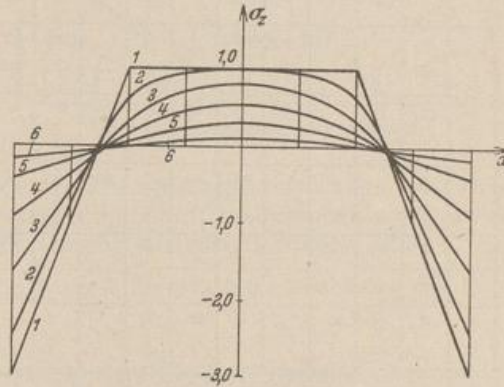


Abb. 752c. Spannungen  $\sigma_z$  in den Schnitten im Abstand  $0, \Delta, 2\Delta, \dots, 5\Delta$  vom unteren Rand (Kurven 1 bis 6).



	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$	$F_{17}$	$F_{18}$	$F_{19}$	$F_{20}$
1	+22	-8	+1		-8	+2			+1											
2	-8	+21	-8	+1	+2	-8	+2			+1										
3	+1	-8	+22	-8		+2	-8	+2			+1									
4		+2	-16	+21			+4	-8				+1								
5	-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1							
6	+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2			+1						
7		+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2			+1					
8			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1				
9	+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2			+1			
10		+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2					
11			+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2		+1		
12				+1			+4	-8		+2	-16	+20			+4	-8				+1
13					+1				-8	+2			+21	-8	+1		-8	+2		
14						+1			+2	-8	+2		-8	+20	-8	+1	+2	-8	+2	
15							+1			+2	-8	+2	+1	-8	+21	-8		+2	-8	+2
16								+1			+4	-8		+2	-16	+20		+4	-8	
17									+1				-8	+2			+22	-8	+1	
18										+1			+2	-8	+2		-8	+21	-8	+1
19											+1			+2	-8	+2	+1	-8	+22	-8
20												+1			+4	-8		+2	-16	+21

+ 1,5a  
 + 4,0a  
 + 5,5a  
 + 6,0a  
 - 4,0a  
 - 18,0a  
 - 24,0a  
 - 26,0a



Lösung der Matrix auf S. 736: ( $a = 1$ )

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_k$	-0,0466	-0,1764	-0,3005	-0,3473	-0,2053	-0,6282	-1,0040	-1,1485	-0,4631	-1,3222
$h$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F_k$	-2,0395	-2,3092	-0,8172	-2,2306	-3,3332	-3,7338	-1,2242	-3,2490	-4,6725	-5,1662

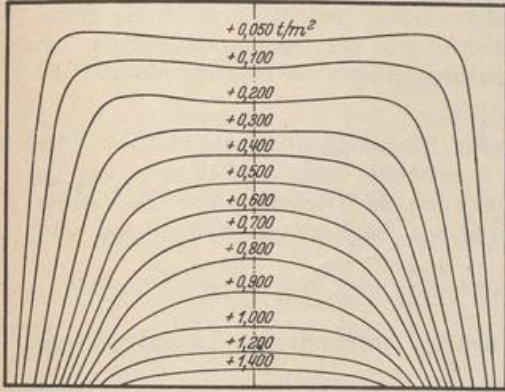


Abb. 753a. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .

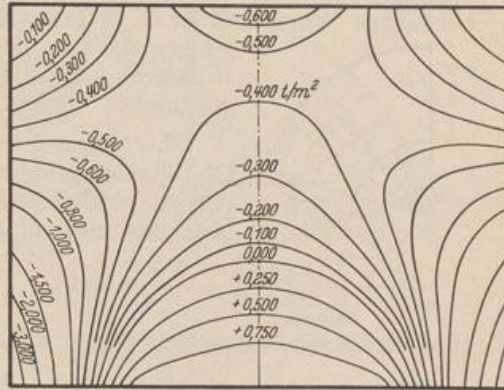


Abb. 753b. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$ .

Der Spannungszustand der Scheiben mit  $H \ll L$ , der aus den Schnittkräften nach Abschn. 10 statisch bestimmt angegeben werden kann, unterscheidet sich von dem Spannungszustand gedrungener Scheiben vor allem durch das Verhältnis von  $\sigma_z$  zu  $\sigma_x$ . In dem einen Falle ist  $\sigma_z \ll \sigma_x$ , in dem anderen Falle sind beide Spannungen von der gleichen Größenordnung. Das Vorzeichen der Längsspannung  $\sigma_x$  wechselt beim Träger in der Achse, dagegen bei gedungenen Scheiben mit  $H \approx L$  in den Wendepunkten der Querschnitte  $x = \text{const}$  der Spannungsfläche  $F$ , also

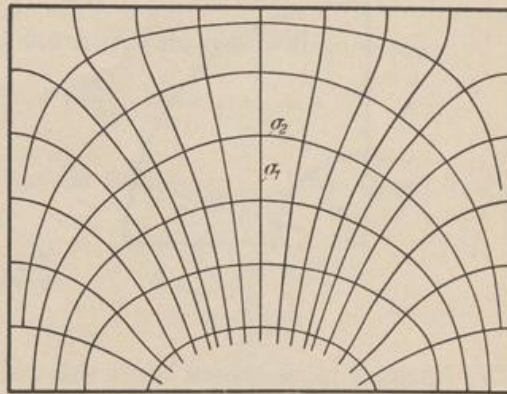


Abb. 753c. Längsspannungstrajektorien.

in der Nähe des abgestützten Scheibenrandes. Die Spannungen in Längs- oder Querschnitten lassen sich aber auch hier stets zu Schnittkräften zusammenfassen, welche mit den äußeren Kräften am Rande die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Bay, H.: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetonwänden. Stuttgart 1931.

## 77. Angenäherte Untersuchung des Spannungszustandes in Rahmenecken.

Während die statisch bestimmte Berechnung der Spannungen aus den Schnittkräften zur Beurteilung der Festigkeit der Rahmenstäbe ausreicht, läßt sich das Kraftfeld im Bereich der Winkelpunkte der Stabachsen nur mit einem ebenen Spannungszustand vergleichen. Dieser ist durch polarisationsoptische Untersuchun-



gen an rechtwinkligen, auf Biegung beanspruchten Stabecken gemessen worden. Darnach ist der ausspringende Bereich der Ecke fast spannungsfrei. Aus diesem Grunde liegt es nahe, das vorgeschriebene polygonale Kraftfeld durch einen Kreisringsektor mit konzentrischen Rändern zu begrenzen und die Spannungsaufgabe mit Polarkoordinaten zu lösen, wenn dabei sich voraussichtlich auch der Verschiebungszustand ändern wird.

Um die Randbedingungen und damit auch die Zahlenrechnung zu vereinfachen, wird über die Eintragung der Schnittkräfte an den Querschnitten der Scheibe nichts ausgesagt. Hier gelten vielmehr nur die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den bekannten Schnittkräften  $N, M, Q$  des Rahmenstabes und den errechneten Spannungen  $\sigma_t, \tau_{tr}$ , die ebenso wie die Spannungsfunktion mit

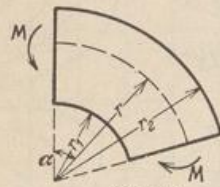


Abb. 754.

Rücksicht auf die Randbedingungen in Polarkoordinaten angeschlossen werden.

**Übertragung zweier Biegemomente M (Abb. 754).**

Die Spannungen sind unabhängig vom Winkel  $\alpha$ , so daß die partielle Differentialgleichung (1057) ebenso wie die Plattengleichung (947) in bezug auf die Veränderliche  $r$  total wird.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}\right) = 0; \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \sigma_t = \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad \tau_{rt} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung steht bereits auf S. 650 und lautet mit  $r_2/r = \varrho$  und  $r_2/r_1 = \varrho_1$

$$F = c_0 + c_1 \ln \varrho + c_2 \frac{1}{\varrho^2} + c_3 \frac{1}{\varrho^2} \ln \varrho. \tag{1086}$$

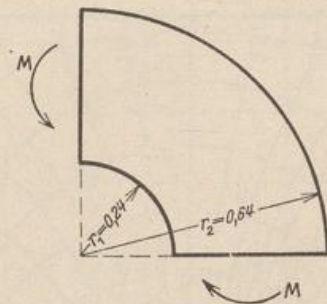


Abb. 755 a.

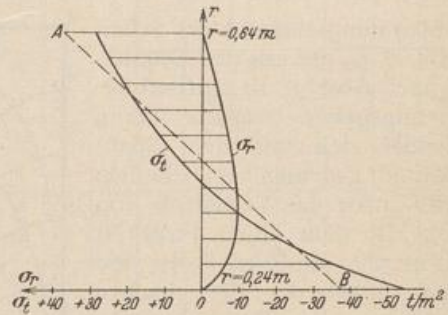


Abb. 755 b.

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^3} (c_1 \varrho^2 - 2 c_2 + c_3 - 2 c_3 \ln \varrho) = 0$$

an den Rändern  $r = r_1$  und  $r = r_2$  und  $M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t r dr$  bestimmen. Man erhält mit

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= r_1^2 [(\varrho_1^2 - 1)^2 - 4 \varrho_1^2 (\ln \varrho_1)^2], \\ c_1 &= -\frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 4 \ln \varrho_1, \quad c_2 = \frac{M}{T_1} r_2^2 (1 - \varrho_1^2 - 2 \ln \varrho_1), \quad c_3 = \frac{M}{T_1} r_2^2 \cdot 2 (1 - \varrho_1^2) \end{aligned} \right\} \tag{1087 a}$$

und daraus

$$\sigma_r = \frac{4 M}{T_1} \left(-\ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho + \varrho^2 \ln \varrho_1\right), \quad \sigma_t = \frac{4 M}{T_1} \left(\varrho_1^2 - 1 - \ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - \varrho_1^2 \ln \varrho - \varrho^2 \ln \varrho_1\right). \tag{1087 b}$$

$\sigma_r$  und  $\sigma_t$  sind Hauptspannungen, die Querschnitte bleiben eben.

Für einen Sektor mit  $r_1 = 0,24 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0,64 \text{ m}$  (Abb. 755 a) wird  $\varrho_1 = 2,6667$  und  $T_1 = 0,57492$ . Die Auswertung der Ergebnisse (1087 b) liefert mit  $M = 1 \text{ mt/m}$  die für



alle Radialschnitte gleiche Spannungsverteilung der Abb. 755b. Die Gerade  $AB$  zeigt den linearen Verlauf von  $\sigma_t$  nach Navier.

**Ausgleich einer Querkraft.** Die Querkraft  $Q_a$  (Abb. 756) steht mit den Schnittkräften  $N_b, M_b, Q_b$  im Gleichgewicht  $[(Q_a, N_b, M_b, Q_b) = 0]$ . Die Spannungsfunktion

$$F = \Phi(r) \cdot \sin \alpha \tag{1088}$$

mit den Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left( \frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \sin \alpha, & \sigma_t &= \Phi'' \cdot \sin \alpha, \\ \tau_{rt} &= - \left( \frac{\Phi'}{r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) \cos \alpha = - \frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \tag{1089}$$

liefert am Rande  $\alpha = 0$  nur Schubspannungen  $\tau_{rt}$ . Aus

$$\Delta \Delta F = \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\Phi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \cdot \sin \alpha$$

folgt für  $\Phi(r)$  die totale Differentialgleichung

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \Phi = 0. \tag{1090a}$$

Ihre Lösung ist

$$\Phi = c_1 \frac{1}{\rho^3} + c_2 \frac{\ln \rho}{\rho} + c_3 \frac{1}{\rho} + c_4 \rho, \tag{1090b}$$

wobei wieder  $r_2/r = \rho$  gesetzt wurde.

Die Integrationskonstanten  $c_1, c_2, c_4$  lassen sich aus den Bedingungen

$$\sigma_r = \left( 2c_1 \frac{1}{\rho} - c_2 \rho - 2c_4 \rho^3 \right) \frac{\sin \alpha}{r^2} = -\tau_{rt} \operatorname{tg} \alpha = 0$$

an den Rändern  $r = r_1$  und  $r = r_2$  und aus der Bedingung  $\int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr = Q_a$  am Rande

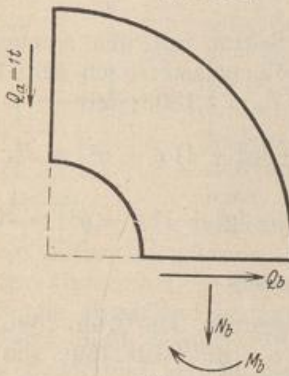


Abb. 757.

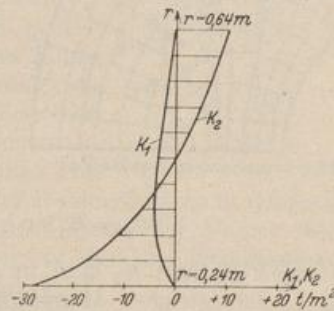


Abb. 758.

$\alpha = 0$  ermitteln. Die Integrationskonstante  $c_3$  ist ohne Einfluß auf die Spannungen und daher beliebig. Mit der Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= r_2^{-1} [(\rho_1^2 + 1) \ln \rho_1 - (\rho_1^2 - 1)] \\ c_1 &= \frac{\rho_1^2}{2} \frac{Q_a}{T_2}, & c_2 &= (\rho_1^2 + 1) \frac{Q_a}{T_2}, & c_4 &= -\frac{1}{2} \frac{Q_a}{T_2} \end{aligned} \right\} \tag{1091a}$$



und damit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Q_a}{T_2} \left[ \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] \sin \alpha, & \tau_{rt} &= -\frac{\sigma_r}{\operatorname{tg} \alpha}, \\ \sigma_t &= \frac{Q_a}{T_2} \left[ 3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1091 \text{ b})$$

Die Spannungsergebnisse im Schnitt  $b (\alpha = \alpha_0)$  stehen mit  $Q_a$  im Gleichgewicht:

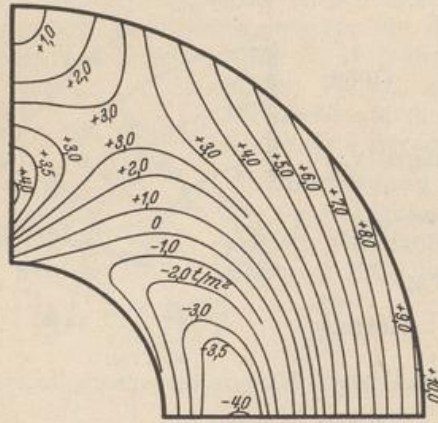


Abb. 759 a. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_1$ .

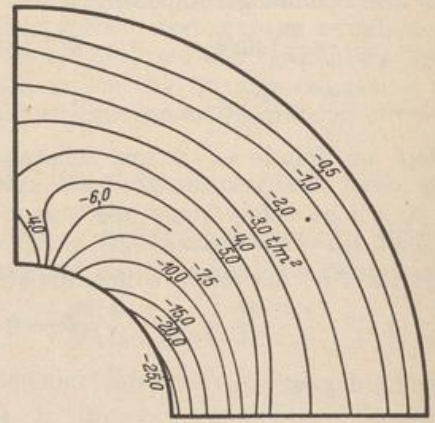


Abb. 759 b. Linien gleicher Hauptspannung  $\sigma_2$ .

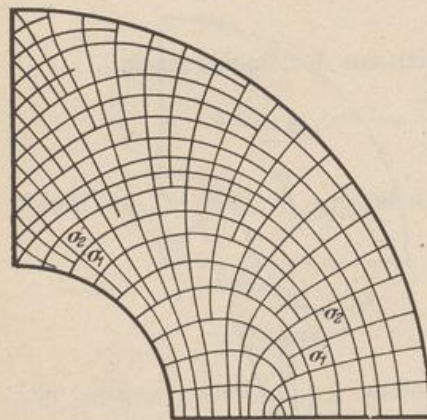


Abb. 759 c. Längsspannungstrajektorien.

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t dr &= N_b = -Q_a \sin \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \tau_{rt} dr &= Q_b = Q_a \cos \alpha_0, \\ \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t (r - r_0) dr &= M_b = Q_a r_0 \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Für den Sektor mit den Abmessungen nach Abb. 755 a, belastet nach Abb. 757, ist  $q_1 = 2,6667$ ,  $T_2 = 1,1805$ . Mit

$$\frac{Q_a}{T_2} \left[ \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho + \varrho^3 \right] = K_1,$$

$$\frac{Q_a}{T_2} \left[ 3 \frac{\varrho_1^2}{\varrho} - (\varrho_1^2 + 1) \varrho - \varrho^3 \right] = K_2$$

wird  $\sigma_r = K_1 \sin \alpha, \quad \sigma_t = K_2 \sin \alpha.$

Die Funktionen  $K_1$  und  $K_2$  sind in Abb. 758 dargestellt. Die Abb. 759 a, b enthalten die Linien gleicher Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$ , die Abb. 759 c die Längsspannungstrajektorien für die Belastung nach Abb. 757.

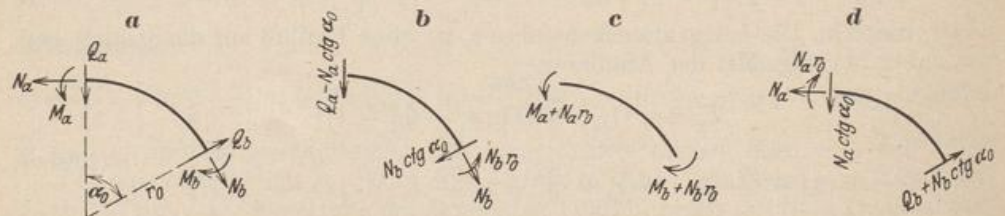


Abb. 760.







zwischen den beiden Riegeln, die Kraftlinien  $\beta$  denjenigen zwischen Riegel und Pfosten, während die Kraftlinien  $\gamma$  und  $\delta$  die Trägerwirkung der Knotenscheibe wiedergeben. Die Biegemomente an den Riegelquerschnitten werden also im wesentlichen unmittelbar übertragen.

b) Antimetrie der Belastung. Die Biegemomente, Quer- und Längskräfte der beiden Querschnitte  $a, b$  sind entgegengesetzt gleich (Abb. 764a); am

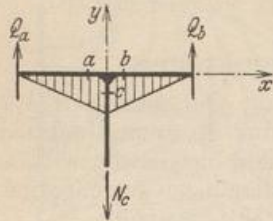


Abb. 763 a.

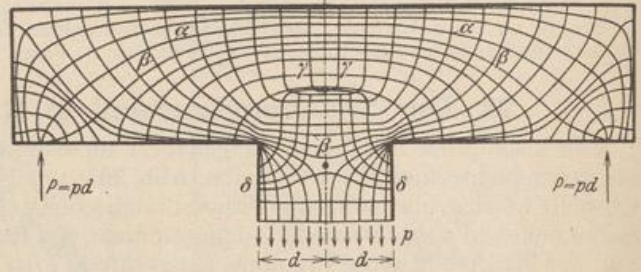


Abb. 763 b.

Querschnitt  $c$  ist  $N_c = 0$ ,  $Q_c = N_a + N_b$ ,  $M_c = 2 M_a$ . Die Längsspannungen  $\sigma_x, \sigma_y$  sind in der Symmetrieachse Null und daher die Hauptschubspannungen hier nach  $x$  und  $y$  gerichtet. Die Symmetrieachse ist also Trajektorie der Hauptschubspannungen. Sie wird von den Hauptlängsspannungen unter  $45^\circ$  geschnitten. Der singuläre Punkt  $N$  des Kraftfeldes Abb. 764b ist daher ein Spannungsnulldpunkt, so daß sich keine Längsspannungen zwischen den beiden Riegeln ausgleichen. Der singuläre Punkt  $K$  wird von 2 Scharen von Kraftlinien umfaßt, welche durch zwei ausgezeichnete Linien  $NL$  und  $NR$  begrenzt sind und den mittelbaren Kraftfluß zwischen Riegel und Pfosten beschreiben. Außerhalb der beiden Grenzlinien ist eine unmittelbare Wechselwirkung zwischen Riegel und Pfosten vorhanden. Die Form

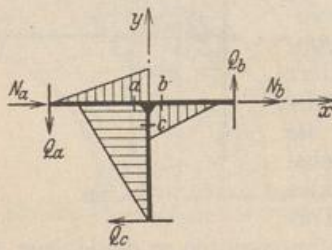


Abb. 764 a.

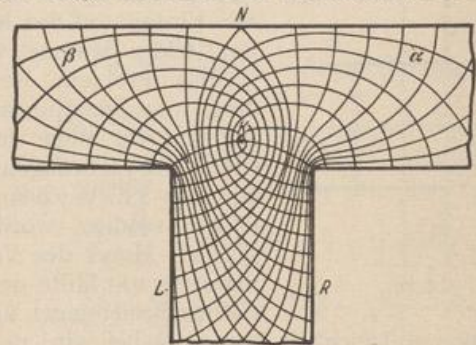


Abb. 764 b.

des Kraftfeldes bietet unter Umständen die Möglichkeit, die Spannungen durch Überlagerung der Ergebnisse der Untersuchung zweier Rahmenecken abzuschätzen.

Die beiden Scharen der Kraftlinien  $\alpha, \beta$  schneiden sich rechtwinklig. An unbelasteten Rändern ist zur Befriedigung der Randbedingungen die eine Kraftlinie ( $\alpha$ ) parallel, die andere ( $\beta$ ) winkelrecht zum Rande. Die ihr zugeordnete Hauptspannung  $\sigma_\beta$  ist hier Null. Parallele Kraftlinien sind ein Zeichen für konstante Hauptspannungen. Die Hauptspannungen  $\alpha$  wachsen um so mehr, je größer die Krümmung der rechtwinklig zugeordneten Kraftlinien  $\beta$  ist. Je mehr daher ihr Abstand abnimmt, um so größer wird die Hauptspannung und damit die Beanspruchung des Baustoffs.

Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. Hieraus sind die Abb. 763b und 764b entnommen.



## C. Die Schalen.

### 79. Die Grundlagen der Berechnung.

Die Schalen sind einfach oder doppelt gekrümmte Flächentragwerke, deren Dicke  $h$  ebenso wie bei den Platten im Vergleich zu den anderen Abmessungen klein ist. Die Halbierungspunkte der Schalenwand bilden die Mittelfläche, die in der Regel durch eine Symmetrieachse ausgezeichnet ist. Winkelrecht dazu liegende Ebenen erzeugen meist geometrisch ähnliche Schnittlinien mit dem Krümmungshalbmesser  $r_\alpha(\beta)$ .

Die Breitenschnitte der rotationssymmetrischen Flächen sind Kreise mit  $r_\alpha(\beta) = r_\alpha$ . Ihre Lage und Größe ist durch den Winkel  $\alpha$  zwischen der Symmetrieachse und der Flächennormalen und durch den Abschnitt  $R_\alpha$  der Flächennormalen zwischen der Mittelfläche und der Symmetrieachse bestimmt.  $R_\alpha$  ist der Krümmungshalbmesser eines der beiden Hauptschnitte der Rotationsfläche ( $r_\alpha = R_\alpha \sin \alpha$ ) (Abb. 766).

Die Ebenen mit der Symmetrieachse erzeugen die Meridianschnitte. Sie werden auf einen Nullmeridian bezogen (Winkel  $\beta$ ) und sind bei rotationssymmetrischen Flächen einander kongruent. Ihr Krümmungshalbmesser  $R_\beta = R_\beta(\alpha)$  bestimmt die zweite Hauptkrümmung der Fläche. Mit  $R_\beta = \text{const}$  entsteht die Kreisringschale, mit  $R_\beta = R_\alpha = \text{const} = a$  die Kugelschale (Abb. 765a). Der Meridianschnitt des Kegelstumpfes ist eine Gerade mit  $R_\beta = \infty$ ,  $\alpha = \text{const}$  und  $R_\alpha = y \text{ctg } \alpha$  (Abb. 765b). Durch  $\alpha = 90^\circ$  wird die Kegelschale zur Zylinderschale mit senkrechter Achse und  $R_\alpha = r_\alpha = \text{const} = a$  (Abb. 765c). Besondere Bedeutung besitzen die Tonnenschalen des Brücken- und Hochbaues. Die Breitenschnitte sind Teile ausgezeichneter Kurven, also nicht rotationssymmetrisch (Abschn. 82).

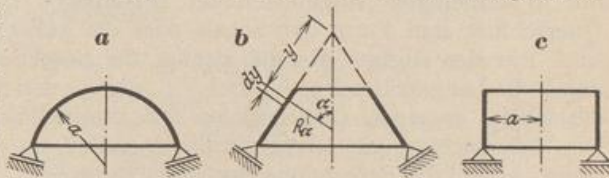


Abb. 765.

Die Schalen dienen als Dächer zum Abschluß von Räumen oder als Behälter zur Stapelung von Füllgut, so daß die elastischen Kräfte des Tragwerks aus dem Eigengewicht und seiner Ausrüstung, aus der Belastung durch Schnee, aus dem Strömungswiderstand der Schale bei Wind und aus den Seitenkräften der Füllung entstehen können. Die Belastung erscheint stets als stetige Funktion der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ . Dasselbe gilt von den Stützkräften, so daß der Formänderungs- und Spannungszustand ebenso wie bei der Platte und Scheibe zunächst an einem differentialen Abschnitt betrachtet werden kann. Dabei wird die vorgeschriebene Belastung  $\hat{p}$  nach drei ausgezeichneten Richtungen, der Schalennormale  $z$ , der Meridiantangente  $y$ , der Tangente an den Breitenkreis  $x$  zerlegt ( $dy = R_\beta d\alpha$ ,  $dx = r_\alpha d\beta$ ,  $\hat{p} = \hat{p}_x \hat{+} \hat{p}_y \hat{+} \hat{p}_z$ ).

Die allgemeinen Beziehungen der Elastizitätstheorie lassen sich auch hier zur Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes vereinfachen. Die Wanddicke  $h = h(\alpha)$  ist im Vergleich zum Krümmungshalbmesser  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$  der Hauptschnitte stets klein, so daß die Normalspannungen  $\sigma_z$  verglichen mit den Normalspannungen  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  stets kleine Größen zweiter Ordnung sind und daher ebenso wie in der Plattenstatik (S. 644) vernachlässigt werden. Aus demselben Grunde werden die Punkte einer Normalen zur Mittelfläche auch nach der Formänderung auf einer Normalen zur verzerrten Mittelfläche liegen, so daß die Dehnungen  $\varepsilon_\alpha(z)$ ,  $\varepsilon_\beta(z)$ ,  $\gamma_{\alpha\beta}(z)$  eines durch Hauptschnitte begrenzten Schalenteils annähernd



lineare Funktionen von  $z$  sind, in welche die Dehnung  $\varepsilon_{0\alpha}, \varepsilon_{0\beta}$  und die Krümmungsänderung  $d\psi_\alpha/dy, d\psi_\beta/dx$  der Mittelfläche als Konstante eingehen.

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{0\alpha} + z d\psi_\alpha/dy, \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_{0\beta} + z d\psi_\beta/dx.$$

Daher lassen sich auch die Spannungen  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  ebenso wie beim Stabe an einem Schnitte  $\alpha = \text{const}$  von der Breite „1“ zur Längskraft  $N_\alpha$  in t/m und zum Biegemoment  $M_\alpha$  in mt/m, an einem Schnitte  $\beta = \text{const}$  von der Breite „1“ zur Längskraft  $N_\beta$  in t/m und zum Biegemoment  $M_\beta$  in mt/m zusammenfassen. Die Schubspannungen  $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$  bilden die Querkräfte  $Q_{\alpha z}, Q_{\beta z}$ , die Schubspannungen  $\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\alpha}$  im allgemeinen Schubkräfte  $N_{\alpha\beta}, N_{\beta\alpha}$  und Drillungsmomente  $M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$ . Schnittkräfte und Belastung des differentialen Flächenteils sind durch die Gleichgewichtsbedingungen, die Komponenten des Verzerrungszustandes, Dehnung, Krümmung und Verwindung sind mit den Komponenten  $u, v, w$  des Verschiebungszustandes der Schale durch geometrische Bedingungen verknüpft, während das Hookesche Gesetz Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Komponenten des Verzerrungszustandes\* herstellt. Dabei entstehen ebenso viele Gleichungen als unbekannte Größen eingehen.

Im Bauwesen begnügt man sich allerdings in der Regel mit Näherungslösungen, um ohne allzu großen Aufwand an Rechnung zu Zahlenergebnissen zu gelangen, welche den Spannungs- und Verschiebungszustand qualitativ richtig wiedergeben. Man benützt daher den Umstand, daß die Krümmungsänderung der Mittelfläche ( $d\psi_\alpha/dy, d\psi_\beta/dx, d\psi_{\alpha\beta}/dy, d\psi_{\beta\alpha}/dx$ ) und damit Biege- und Drillungsmomente nur in denjenigen Abschnitten der Mittelfläche Bedeutung besitzen, in welchen Querschnitt und Form der Schale oder die äußeren Kräfte in  $\alpha$  und  $\beta$  unetig sind. Für den übrigen Bereich genügt die Beschreibung des Spannungszustandes durch die Längskräfte  $N_\alpha, N_\beta$  und  $N_{\alpha\beta}$ , die aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem differentialen Schalenabschnitt 1 berechnet werden können. Die Untersuchung gilt streng für die unendlich dünne Schale ohne Biege- und Drillwiderstand, so daß die Berechnung der Schnittkräfte  $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$  allein aus den Gleichgewichtsbedingungen auch als Membrantheorie der Schale bezeichnet wird. Die Ergebnisse sind in allen den Fällen brauchbar, bei welchen die vorgeschriebenen Randbedingungen an der Schalenbegrenzung durch die Längskräfte erfüllt werden. Die Biegespannungen sind in diesem Falle Nebenspannungen.

Um diesen Spannungszustand in einfacher Weise durch zwei sich rechtwinklig schneidende Komponenten zu beschreiben, werden an Stelle der geometrisch ausgezeichneten Schnitte  $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$  nach (40) in jedem Punkte die Richtungen 1, 2 der Hauptlängskräfte  $N_1, N_2$  bestimmt, für welche  $N_{12} = 0$  ist. Sie bilden die Trajektorien des Spannungszustandes.

Alle Festigkeitsuntersuchungen gelten unter der Voraussetzung der Stabilität des Verschiebungszustandes. Diese Bemerkung hat gerade für die Schalentheorie mit Rücksicht auf die außergewöhnlich kleine Wandstärke besondere Bedeutung.

Meißner, E.: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen, Kugel- oder Kegelform. Physik. Z. 1913 S. 343. — Derselbe: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1915. — Geckeler, J. W.: Elastostatik. Handbuch der Physik. Bd. VI: Mechanik der elastischen Körper S. 231. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. II, 2. Aufl. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyklinderschale. Ing.-Arch. 1932 S. 463.

## 80. Membrantheorie für Rotationsschalen mit stetiger Belastung $p(\alpha, \beta)$ .

Der differentiale Abschnitt Abb. 766 ist geometrisch durch die Winkel  $\alpha, \beta$  und durch die Krümmung  $1/R_\alpha, 1/R_\beta$  der Hauptschnitte der Mittelfläche bestimmt.

$$dF = ds_\alpha \cdot ds_\beta = r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha, \quad r_\alpha = R_\alpha \sin \alpha. \quad (1093)$$



Die Belastung  $p(\alpha, \beta) = p_x \hat{+} p_y \hat{+} p_z$  steht mit den Schnittkräften

$$(N_\alpha, N_{\alpha\beta}), \quad (N_\beta, N_{\beta\alpha}), \quad \left( N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha, N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha \right), \\ \left( N_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta, N_{\beta\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta \right)$$

im Gleichgewicht. Aus der virtuellen Drehung des Abschnitts um die  $z$ -Achse folgt, abgesehen von kleinen Größen zweiter Ordnung,  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ . Die virtuelle Verschiebung des Abschnitts nach einer der drei ausgezeichneten Richtungen  $x, y, z$  liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

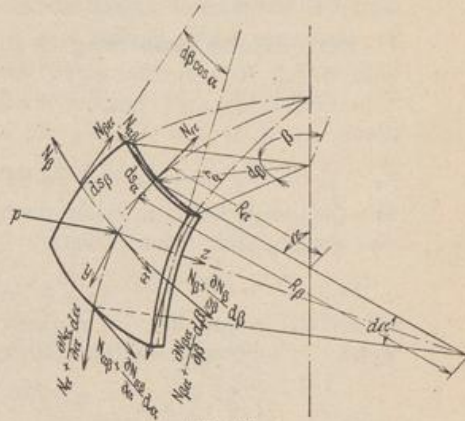


Abb. 766.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta \cdot R_\beta d\alpha + N_{\alpha\beta} \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos \alpha \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha + p_x \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta) d\alpha - N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \cos \alpha \\ & + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta R_\beta d\alpha + p_y \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0, \\ \text{c) } & N_\alpha \cdot r_\alpha d\beta \cdot d\alpha + N_\beta \cdot R_\beta d\alpha \cdot d\beta \cdot \sin \alpha \\ & + p_z \cdot r_\alpha d\beta \cdot R_\beta d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Sie lassen sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } & \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} R_\beta + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} r_\alpha) + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \\ \text{b) } & \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_\beta + p_y r_\alpha R_\beta = 0, \\ \text{c) } & \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1094)$$

**Rotationssymmetrische Belastung.** Die Belastung  $p_x, p_y, p_z$  und die Funktionen der unbekanntenen Stütz- und Schnittkräfte  $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$  sind vom Breitenwinkel  $\beta$  unabhängig, ihre Ableitungen nach  $\beta$  also Null, so daß die Gleichgewichtsbedingungen (1094) totale Differentialgleichungen werden.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (N_{\alpha\beta} r_\alpha) + N_{\alpha\beta} R_\beta \cos \alpha + p_x r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha} (N_\alpha r_\alpha) - N_\beta R_\beta \cos \alpha + p_y r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} + p_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1095)$$

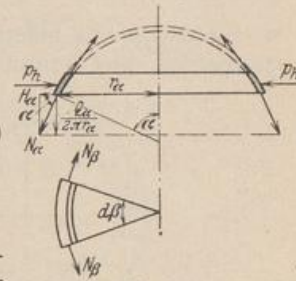


Abb. 767.

Für  $p_x = 0$  ist die Schubkraft  $N_{\alpha\beta}$  Null und die Schnittkraft  $N_\alpha$  nach Elimination der Schnittkraft  $N_\beta$  mit der vorgeschriebenen Belastung in ähnlicher Weise wie die Schnittkräfte des Stabes (S. 27) durch eine Differentialgleichung verknüpft. Ihre Lösung läßt sich aber auch ebenso wie dort aus dem Gleichgewicht der Kräfte an einem Abschnitt des Flächentragwerks ableiten. Hierzu dient entweder der Schalenteil über einem Breitenkreis  $\alpha$  (Belastung  $Q_\alpha$ ) oder der Ring zwischen zwei benachbarten Breitenschnitten (Abb. 767).

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha + 2\pi r_\alpha N_\alpha \sin \alpha = 0, \quad N_\alpha = -\frac{Q_\alpha}{2\pi r_\alpha \sin \alpha} = -\frac{Q_\alpha}{2\pi R_\alpha \sin^2 \alpha}, \\ N_\beta R_\beta d\alpha - d(r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) + p_h r_\alpha R_\beta d\alpha = 0, \quad N_\beta = \frac{d}{R_\beta d\alpha} (r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) - p_h r_\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1096)$$



Der zweite Summand der rechten Seite ist bei senkrechter Belastung (Eigengewicht, Schneebelastung) Null, so daß mit  $r_\alpha N_\alpha \cos \alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha / 2\pi$

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha)}{R_\beta d\alpha}. \tag{1097}$$

Die Meridianspannungen sind also negativ, während die Ringspannungen mit  $d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) / R_\beta d\alpha = 0$  das Vorzeichen wechseln. Die Spannungen aus Eigengewicht sind bei konstanter Schalendicke von dieser unabhängig.

**Periodische Belastung in  $\beta$ .** Die Belastung kann durch Wind hervorgerufen oder durch Randbedingungen vorgeschrieben werden. Sie läßt sich stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von  $\beta$  fortschreitende Reihe entwickeln, deren Koeffizienten  $X_n, Y_n, Z_n$  allein Funktionen von  $\alpha$  sind.

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \tag{1098}$$

Die partiellen Differentialgleichungen (1094) für das Gleichgewicht der Kräfte werden dann durch einen Ansatz

$$N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta \tag{1099}$$

befriedigt, wenn die von  $\alpha$  allein abhängigen Funktionen  $N_{\alpha n}, N_{\beta n}, N_{\alpha\beta n}$  gliedweise die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha\beta n}) - n R_\beta N_{\beta n} + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos \alpha + X_n r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha n}) + n R_\beta N_{\alpha\beta n} - R_\beta N_{\beta n} \cos \alpha + Y_n r_\alpha R_\beta &= 0, \\ \frac{N_{\alpha n}}{R_\beta} + \frac{N_{\beta n}}{R_\alpha} + Z_n &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1100}$$

Wird  $N_{\beta n}$  eliminiert, so entstehen zwei simultane totale Differentialgleichungen für  $N_{\alpha n}$  und  $N_{\alpha\beta n}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha\beta n}) + R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos \alpha + n R_\alpha N_{\alpha n} &= -X_n r_\alpha R_\beta - n Z_n R_\alpha R_\beta, \\ \frac{d}{d\alpha} (r_\alpha N_{\alpha n}) + R_\alpha N_{\alpha n} \cos \alpha + n R_\beta N_{\alpha\beta n} &= -Y_n r_\alpha R_\beta - Z_n R_\alpha R_\beta \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \tag{1101}$$

$n = 0$  und  $n = 1$  liefern die Grundschwingungen einer zum Meridian  $\beta = 0$  symmetrischen oder antisymmetrischen Belastung.

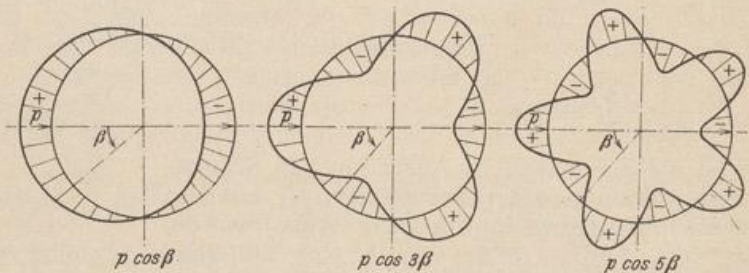


Abb. 768. Periodische Belastung  $p \cos n\beta$ .

Sonderfall  $p_x = 0, p_y = 0, p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$  (Windbelastung). Die Kräfte besitzen die Periode  $2\pi/n$  und bilden bei einer geraden Zahl  $n$  eine symmetrische, bei einem ungeraden  $n$  eine antisymmetrische Kräftegruppe. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist Null. Die Gleichgewichtsbedingungen (1100) werden durch die Schnittkräfte  $N_\alpha = \sum N_{\alpha n} \cos n\beta, N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta$  erfüllt, die in den Meridianschnitten  $\beta = 0$  und ganzzahligen Vielfachen von  $\pi/n$ , also  $\beta = \lambda\pi/n$  Grenzwerte



$N_{\alpha n}, N_{\beta n}$  annehmen, dagegen in Meridianschnitten  $\beta = \pi/2n + \lambda\pi/n$  Null sind. Hier werden die Schubkräfte  $N_{\alpha\beta} = \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta$  zu Grenzwerten  $N_{\alpha\beta n}$ . Die Grenzwerte  $N_{\alpha n}, N_{\beta n}, N_{\alpha\beta n}$  sind durch die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte bestimmt, die an dem durch einen Breitenschnitt und zwei Nullmeridianen begrenzten Schalensektor angreifen.

**Der Verschiebungszustand.** Die Formänderung der Membranschalen ist durch die Verschiebung der Punkte der Mittelfläche bestimmt. Diese wird nach drei ausgezeichneten Achsen  $x, y, z$  in die Komponenten  $u, v, w$  zerlegt. Sie lassen sich aus den bezogenen Längen- und Winkeländerungen  $\epsilon_x = \epsilon_\beta, \epsilon_y = \epsilon_\alpha, \gamma_{xy} = \gamma_{\alpha\beta}$  eines differentialen Flächenabschnitts berechnen. Die Dehnung  $\epsilon_z$  ist auf Grund der Annahmen Null (Abb. 769).

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{R_\beta d\alpha} \left[ (R_\beta - w) d\alpha + \frac{\partial v}{R_\beta \partial \alpha} R_\beta d\alpha - R_\beta d\alpha \right] = \frac{\partial v}{R_\beta \partial \alpha} - \frac{w}{R_\beta} = \frac{v' - w}{R_\beta}, \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{r_\alpha d\beta} \left[ (r_\alpha - w \sin \alpha + v \cos \alpha) d\beta + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta - r_\alpha d\beta \right] = \frac{v \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\alpha \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1102)$$

Bei rotationssymmetrischer Belastung ist  $\partial u / \partial \beta = 0$  und nach Elimination von  $w$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{\sin \alpha} (R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta), \\ v &= \sin \alpha \left[ \int \frac{R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta}{\sin \alpha} d\alpha + C_1 \right], \\ w &= v \operatorname{ctg} \alpha - R_\alpha \epsilon_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (1103)$$

Die Winkeländerung des Flächenabschnitts ist nach (911)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{R_\beta \partial \alpha} + \frac{\partial v}{r_\alpha \partial \beta} - \frac{u}{r_\alpha} \cos \alpha,$$

so daß mit  $v$  und  $\gamma_{\alpha\beta}$  auch die Verschiebung  $u$  berechnet werden kann. Die Komponenten  $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}$  der Flächenverzerrung sind mit den Schnittkräften nach (913) durch das Hookesche Gesetz verknüpft.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} (N_\alpha - \mu N_\beta), & \epsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} (N_\beta - \mu N_\alpha), & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\alpha\beta}, \\ N_\alpha &= \frac{hE}{1-\mu^2} (\epsilon_\alpha + \mu \epsilon_\beta), & N_\beta &= \frac{hE}{1-\mu^2} (\epsilon_\beta + \mu \epsilon_\alpha), & N_{\alpha\beta} &= \frac{hE}{2(1+\mu)} \gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1104)$$

Die Krümmungsänderung in den Hauptschnitten wird mit

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_\beta} &= \frac{d\alpha}{ds_\beta}, & \frac{1}{R_\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{r_\alpha}, \\ \kappa_\alpha &= d \left( \frac{1}{R_\beta} \right) = \frac{d\alpha + \delta(d\alpha) - d\alpha}{ds_\beta} = \frac{\delta(d\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d(\delta\alpha)}{ds_\beta} = \frac{d\vartheta}{R_\beta d\alpha}, \\ \kappa_\beta &= d \left( \frac{1}{R_\alpha} \right) = \frac{\sin(\alpha + \delta\alpha) - \sin \alpha}{r_\alpha} = \frac{\delta\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha} = \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1105)$$

In der Regel begnügt man sich mit der Beschreibung des rotationssymmetrischen Verschiebungszustandes durch die Vergrößerung  $\Delta r_\alpha$  des Breitenkreises und durch die Verdrehung  $\vartheta$  der Tangente an die elastische Linie des Meridians.

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\alpha &= r_\alpha \epsilon_\beta = \frac{r_\alpha}{Eh} (N_\beta - \mu N_\alpha), \\ \vartheta &= \frac{v}{R_\beta} + \frac{\partial w}{R_\beta \partial \alpha} = \frac{1}{R_\beta} \left[ (R_\beta \epsilon_\alpha - R_\alpha \epsilon_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\partial (R_\alpha \epsilon_\beta)}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1106)$$

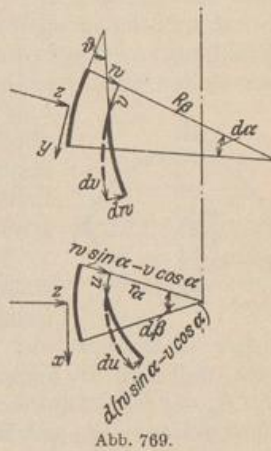


Abb. 769.



**Die Randbedingungen.** Die Berechnung der Schalen nach der Membrantheorie verlangt neben der stetigen Eintragung der Belastung die stetige Änderung der Wandstärke und die stetige Krümmung der Mittelfläche. Um die Verbiegung dieser Schalen auszuschließen und den Spannungszustand abgesehen von Nebenspannungen allein durch die Längskräfte  $N_\alpha$ ,  $N_\beta$  und durch die Schubkräfte  $N_{\alpha\beta}$ , also statisch bestimmt beschreiben zu können, müssen zunächst die statischen Randbedingungen durch die Eintragung der äußeren Kräfte am Schalenrande erfüllt werden. Hierzu dienen Ringträger, um Einzelkräfte am Schalenrande gleichförmig zu verteilen und die stetige Randbelastung der Mittelfläche in Richtung der Meridiantangente zuzuführen. Daher besitzen in der Regel die geschlossenen Schalen einen Fußring, die offenen Schalen Kopf- und Fußring, die je nach ihrer Lage zum Flächentragwerk auf Zug oder Druck beansprucht werden (Abb. 770). Dabei bleibt der Membranspannungszustand der Schale nur erhalten, wenn die Dehnung der Ringträger mit der Dehnung der Schalenränder übereinstimmt. Die Begrenzung der Schale durch Ringträger ist bei stetiger Abstützung nur dann unnötig, wenn die Hauptschnitte der Ränder mit der Drehachse rechte Winkel einschließen ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ ), also die Endtangente der Meridianschnitte senkrecht sind. Um die Dehnung der Schalenränder in allen anderen Fällen mit der Längenänderung der Ringträger in Einklang zu bringen und Biegungsspannungen in der Nähe des Schalenrandes zu vermeiden, kann nach einem von F. Dischinger ausgesprochenen und der Dyckerhoff & Widmann A.-G. patentierten Gedanken die Krümmung der Meridiankurve durch einen Übergangsbogen zum Ringträger derart verändert werden, daß die Randbedingungen zwischen Schalenrand und Ringträger ganz oder teilweise erfüllt sind (Abschn. 80d).

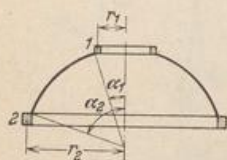


Abb. 770.

Neben den statischen Randbedingungen müssen auch die geometrischen Randbedingungen des statisch bestimmten Spannungszustandes befriedigt werden. Das Flächentragwerk muß daher so gelagert, der Überbau derart auf dem Kopfring der Schale abgestützt sein, daß sich die Verschiebungen  $\Delta r_1$ ,  $\Delta r_2$  der Endpunkte und die Verdrehungen  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  der Endtangente der Meridiankurve zwanglos einstellen können. Nur auf diese Weise lassen sich Biegungsspannungen in der Nachbarschaft der Schalenränder vermeiden. Die äußeren Kräfte können auch aus diesem Grunde an den Schalenrändern nur in Richtung der Tangenten an die Hauptschnitte der Mittelfläche eingetragen werden.

**Die Belastung der Rotationsschalen.** Bisher sind unter den allgemeinen Belastungsfällen nur die rotationssymmetrische Belastung und die von  $\beta$  periodisch abhängige Belastung hervorgehoben worden, für welche sich die Gleichgewichtsbedingungen (1094) integrieren lassen. In physikalischer Beziehung wird das Eigengewicht der Schale  $p_x = 0$ ,  $p_y = g \sin \alpha$ ,  $p_z = g \cos \alpha$ , die Schneelast  $p_x = 0$ ,  $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $p_z = p_s \cos^2 \alpha$  und der Seitendruck von Flüssigkeiten  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = \gamma f$  unterschieden. Außerdem kann noch der Seitendruck und die Reibungskraft des Füllgutes nach den Ansätzen in Abschn. 6 zur Wirkung kommen. Durch die Verwendung der Schalen zur Überdachung von Räumen gewinnt auch der Strömungswiderstand  $\mathfrak{B}$  des Windes an gekrümmten Oberflächen als äußere Ursache innerer Kräfte Bedeutung (1). Er wird in Übereinstimmung mit den baupolizeilichen Bestimmungen für die statische Untersuchung von ebenen Dachflächen in der Regel nach der Newtonschen Widerstandstheorie festgesetzt, ohne auf die Form der Schale, auf die Rauigkeit ihrer Oberfläche oder auf die Turbulenz der Strömung Rücksicht zu nehmen und entweder nach

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (1107)$$



oder in Anlehnung an Versuche von M. v. Löbl nach

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w \sin \alpha \cos \beta, \quad (1108)$$

allein auf den angeströmten Teil der Oberfläche verteilt. Wenn auch nach der gegenwärtigen physikalischen Erkenntnis an der Oberfläche der Schale ein vollständig andersgeartetes Kraftfeld entsteht, so begnügt man sich doch mit diesen einfachen Ansätzen, solange die Spannungen aus Wind nur einen geringen Bruchteil

der zulässigen Beanspruchung des Baustoffes ausmachen. Dies gilt zunächst erfahrungsgemäß allein für die ebenen und räumlichen Stabwerke des Brücken- und Hochbaues, während die Spannungen in Schalen wesentlich von der Druckintensität  $p_w$  und von der Verteilung  $p_z(\alpha, \beta)$  des Strömungswiderstandes abhängen. Diese muß, falls einfache Ansätze vorgeschrieben werden sollen, nach S. 748 im Bereiche der Schalenoberfläche stetig sein, auf Grund von Beobachtungen antimetrischen Charakter erhalten und mit dem Staudruck  $p_w$  der Ansätze (1107) oder (1108) angenommen werden. Die Integration liefert ebenfalls einen Strömungswiderstand des Baukörpers, der aber nicht mit den Versuchsergebnissen an ähnlichen Körpern im Windkanal oder mit dem Strömungswiderstand nach (1107) oder (1108) verglichen werden kann.

Die Bedingungen für  $p_z(\alpha, \beta)$  werden am einfachsten durch die Gleichungen (1108) mit  $0 \leq \beta \leq 360^\circ$  erfüllt. Um eine in  $\beta$  quadratische Druckverteilung im Sinne der baupolizeilichen Vorschriften als stetige antimetrische Funktion zu verwenden, wird der Ansatz (1107) für  $0 \leq \beta \leq 90^\circ$  mit  $+\cos^2\beta$ , für  $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$  mit  $-\cos^2\beta$  als Fouriersche Reihe entwickelt.

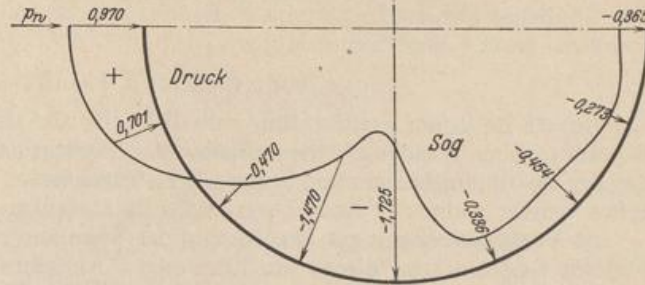


Abb. 771. Druckverteilung an einem Gasometermodell bei  $v = 35$  m/sec Windgeschwindigkeit, bezogen auf den Staudruck  $p_w = 1$  t/m<sup>2</sup>.

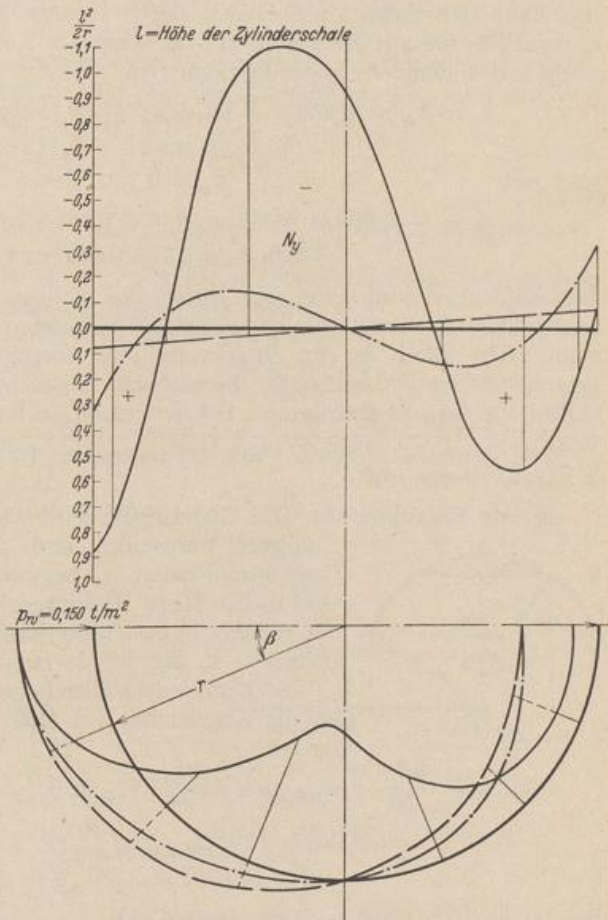


Abb. 772. Windgesetz und Meridianschnittkraft für eine Zylinderschale ( $l, r$ ).  
 — Windgesetz (1111) nach den Göttinger Versuchen.  
 - - - Quadratisches Windgesetz (1109).  
 - - - Antimetrisches Windgesetz (1108). =



$$p_z = p_w \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = p_w \sin^2 \alpha (0,8493 \cos \beta + 0,1699 \cos 3\beta - 0,0243 \cos 5\beta + 0,0081 \cos 7\beta - 0,0037 \cos 9\beta \pm \dots). \quad (1109)$$

Ein ähnliches Ergebnis wird von F. Dischinger auf andere Weise erzielt. Es besteht aus zwei Gliedern und lautet

$$p_z = p_w \sin^2 \alpha (0,85 \cos \beta + 0,15 \cos 3\beta). \quad (1110)$$

Der Ansatz ist in der Reihe (1109) enthalten, die also die Spannungen aus einem in  $\beta$  quadratischen Windgesetz namentlich mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der zur Spannungsberechnung notwendigen abgeleiteten Funktionen besser wiedergeben würde, wenn der Ansatz physikalische Bedeutung hätte.

Die Voraussetzungen zur Berechnung der Spannungen in kreisrunden Zylindern sind im Gegensatz zu diesen unzuverlässigen Annahmen durch die Versuche der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen beim Anströmen von Gasometermodellen wesentlich verbessert worden. Die Abb. 771 zeigt das Ergebnis der Druckmessung im Bereiche eines mittleren Breitenschnittes. Die Schaulinie ist periodisch und läßt sich daher durch harmonische Analyse in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die mit Rücksicht auf die schlechte Konvergenz der Spannungsberechnung mit 6 Gliedern angeschrieben wird.

$$\left. \begin{aligned} p_z &= p_w (-0,655 + 0,280 \cos \beta + 1,115 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,400 \cos 3\beta - 0,113 \cos 4\beta - 0,027 \cos 5\beta) \\ \text{und mit} \quad p_w &= 0,150 \text{ t/m}^2, \\ p_z &= -0,098 + 0,042 \cos \beta + 0,167 \cos 2\beta \\ &\quad + 0,060 \cos 3\beta - 0,017 \cos 4\beta - 0,004 \cos 5\beta. \end{aligned} \right\} (1111)$$

Die Zahlenrechnung läßt sich durch die gemessene Druckverteilung (Abb. 771) nachprüfen. Ein Vergleich der einzelnen Windgesetze für den Kreiszylinder (Abb. 772) zeigt nicht allein in der Druckverteilung, sondern auch im Spannungszustand grundsätzliche Unterschiede, die auf die Brauchbarkeit der Ansätze (1107) und (1108) für doppelt gekrümmte Schalen schließen lassen.

Dischinger, F.: Schalen- und Rippenkuppeln. Handbuch für Eisenbetonbau. Bd. VI, 2. Kapitel. Berlin 1930.

a) **Die Kugelschale.** Die Kugelschale wird als geschlossenes oder als offenes Tragwerk verwendet und dabei durch einen oder zwei Breitenschnitte  $\alpha_1, \alpha_2$  begrenzt (Abb. 773). An den Rändern sind in der Regel Ringträger vorhanden, da hier nach S. 748 nur tangential gerichtete Kräfte ohne Störung des Membranzustandes in die Schale eingetragen werden.

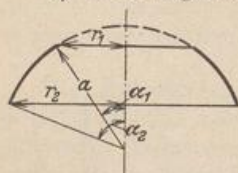


Abb. 773.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1094) lauten für die Kugelschale mit  $R_\alpha = R_\beta = a, r_\alpha = a \sin \alpha$  folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + N_{\alpha\beta} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_{\alpha\beta} \sin \alpha) + p_x a \sin \alpha &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_\alpha \sin \alpha) - N_\beta \cos \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1112)$$

Sie lassen sich mathematisch vereinfachen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + 2 N_{\alpha\beta} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + a p_x &= 0, \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + (N_\alpha - N_\beta) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + a p_y &= 0, \\ N_\alpha + N_\beta + a p_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1113)$$



Bei rotationssymmetrischer Belastung sind die Ableitungen nach  $\beta$  Null. Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte wird dann durch drei simultane totale Differentialgleichungen beschrieben. Aus diesen folgt, daß

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int \dot{p}_x \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_1, & N_\beta &= -N_\alpha - \dot{p}_z a, \\ N_\alpha &= -\frac{a}{\sin^2 \alpha} \int (\dot{p}_v + \dot{p}_z \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (1114)$$

Bedingung für  $C_2$  bei geschlossener Kugelschale:

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta, \quad (1115)$$

Bedingung für  $C_2$  bei offener Kugelschale:

$$\alpha = \alpha_1: \quad N_\alpha = 0 \quad (1116)$$

oder einem vorgeschriebenen Betrage.

Ist  $\dot{p}_x = 0$ , so wird  $N_{\alpha\beta} = 0$ .

Die Gleichung (b) in (1094) kann bei rotationssymmetrischer Belastung durch die Bedingung für das Gleichgewicht aller senkrechten Kräfte oberhalb eines Breitenkreises  $\alpha$  ersetzt werden (S. 745). Sie liefert  $N_\alpha$ . Damit ist auch  $N_\beta$  bestimmt.

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes genügt bei rotationssymmetrischer Belastung nach S. 747 die Vergrößerung  $\Delta r_\alpha$  des Breitenkreises  $r_\alpha$  und die Verdrehung  $\vartheta$  der Meridiantangente.

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_\alpha &= -\frac{r_\alpha}{Eh} (\dot{p}_z a + N_\alpha (1 + \mu)), \\ \vartheta &= \frac{1}{Eh} \left[ (N_\alpha - N_\beta) (1 + \mu) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mu N_\alpha - N_\beta) \right] = \frac{a}{Eh} [\dot{p}'_z - (1 + \mu) \dot{p}_v] \end{aligned} \right\} \quad (1117)$$

Die offene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung.

Für  $\alpha = \alpha_1$  ist  $N_\alpha$  Null oder ein vorgeschriebener Betrag  $N_{\alpha,1}$ .

Schnittkräfte für Eigengewicht  $g$  der Schale (Abb. 774).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -a g \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, & N_\beta &= a g \left( \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{Eh} \sin \alpha \left[ \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (1 + \mu) - \cos \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a g}{Eh} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1118)$$

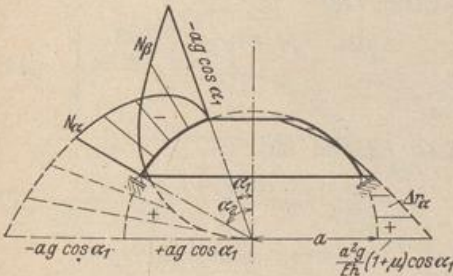


Abb. 774. Schaulinien für Eigengewicht.

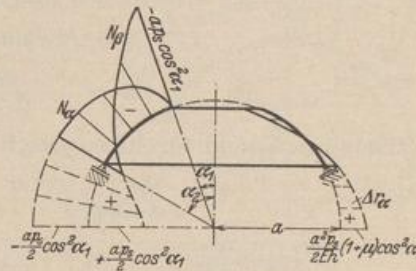


Abb. 775. Schaulinien für Schneelast.

Schnittkräfte für Schneebelastung  $\dot{p}_s$ ,  $N_{\alpha,1} = 0$  (Abb. 775).

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{a \dot{p}_s}{2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{a \dot{p}_s}{2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 \dot{p}_s}{Eh} \frac{\sin \alpha}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha} \right) (1 + \mu) - 2 \cos^2 \alpha \right], \\ \vartheta &= -\frac{a \dot{p}_s}{Eh} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1119)$$



Schnittkräfte aus der Belastung  $G_L = 2\pi a P \sin \alpha_1$  durch die Laterne und den Laternenring.  $N_{\alpha,1} = -P/\sin \alpha_1$  (Abb. 776).

$$N_\alpha = -N_\beta = -P \frac{\sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha}, \quad \Delta r = \frac{Pa}{Eh} (1 + \mu) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha}, \quad \vartheta = 0. \quad (1120)$$

Äußere Kraft  $H$  zur tangentialen Eintragung der Laternenlast  $P$ :  $H = P \operatorname{ctg} \alpha_1$ , Längskraft im Laternenring  $N_L = -Pa \cos \alpha_1$ .

Die geschlossene Kugelschale mit rotationssymmetrischer Belastung. Für  $\alpha = 0$  ist  $N_\alpha = N_\beta$ .

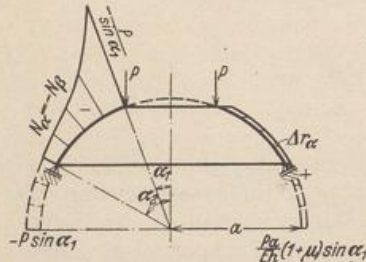


Abb. 776. Schaulinien für Laternenlast.

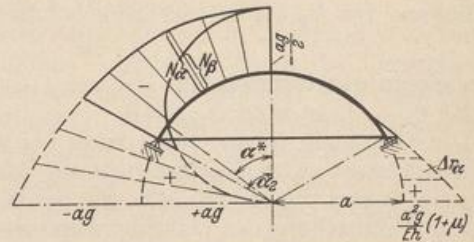


Abb. 777. Schaulinien für Eigengewicht.

Schnittkräfte für Eigengewicht  $p_x = 0, p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$  (Abb. 777).

$$N_\alpha = -\frac{ag}{1 + \cos \alpha}, \quad N_\beta = \frac{ag}{1 + \cos \alpha} (1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha), \quad N_{\alpha\beta} = 0. \quad (1121)$$

Die Längskraft  $N_\alpha$  in Richtung des Meridians erzeugt für alle Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Druckspannungen. Das Vorzeichen der Längskraft  $N_\beta$  wechselt bei  $\alpha = \alpha^*$ .  $N_\beta$  erzeugt für alle Winkel  $\alpha > \alpha^*$  Zugspannungen. Der Breitenkreis  $\alpha^*$  mit dem Spannungswechsel  $N_\beta = 0$  ist durch die Bedingung  $(1 - \cos \alpha^* - \cos^2 \alpha^*) = 0$  bestimmt, so daß  $\alpha^* = 51^\circ 50'$ .

$$\alpha = 0: \quad N_\alpha = N_\beta = -\frac{ag}{2}.$$

Um den senkrechten Auflagerdruck der Schale tangential zuzuführen, ist eine waagerechte Kraft  $H = N_{\alpha_2} \cos \alpha_2$  notwendig. Sie erzeugt den Ringzug (Abb. 778)

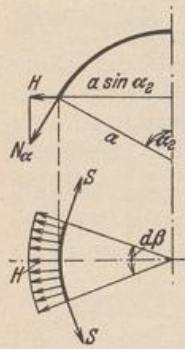


Abb. 778.

$$\text{ist } \left. \begin{aligned} S &= H a \sin \alpha_2, & \text{Mit } H &= ag \frac{\cos \alpha_2}{1 + \cos \alpha_2} \\ S &= \frac{a^2 g \sin 2\alpha_2}{2(1 + \cos \alpha_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1122)$$

Verschiebungszustand für Eigengewicht nach Abschn. 80:

$$\varepsilon_\alpha = -\frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu(1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{ag}{Eh} \frac{1 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \mu}{1 + \cos \alpha}, \quad (1123)$$

$$R_\beta \varepsilon_\alpha - R_\alpha \varepsilon_\beta = -A \frac{2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad A = \frac{a^2 g (1 + \mu)}{Eh},$$

$$\int \frac{(R_\beta \varepsilon_\alpha - R_\alpha \varepsilon_\beta)}{\sin \alpha} d\alpha = A \left[ \ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right] + C_1$$

und daher nach (1103)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sin \alpha \left[ A \left( \ln(1 + \cos \alpha) - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) + C_1 \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[ \ln(1 + \cos \alpha) + \frac{1}{1 + \mu} \right] - A + C_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1124)$$

Die senkrechten und waagerechten Komponenten  $t, \Delta r_\alpha$  der Verschiebung sind mit Abb. 779 nach S. 753

$$t = w \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \Delta r_\alpha = -w \sin \alpha + v \cos \alpha. \quad (1125)$$



Für  $\alpha = \alpha_2$  wird  $v = 0$ , so daß  $C_1$  berechnet werden kann.

$$C_1 = -A \left[ \ln(1 + \cos \alpha_2) - \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right],$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} v &= A \sin \alpha \left[ \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right], \\ w &= A \cos \alpha \left[ \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \cos \alpha_2} \right] - A, \\ \Delta r_\alpha &= \frac{a^2 g}{E h} \sin \alpha \left( \frac{1 + \mu}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right), \\ \vartheta &= -\frac{a g}{E h} (2 + \mu) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Die senkrechte Verschiebung  $w_0$  des Scheitels ( $\alpha = 0$ ) ist

$$w_0 = A \left[ \ln \frac{2}{1 + \cos \alpha_2} + \frac{1}{(1 + \cos \alpha_2)} - \frac{\mu}{1 + \mu} \right]. \quad (1127a)$$

Sonderfall  $\alpha_2 = 90^\circ$

$$w_0 = w_0^* = \frac{a^2 g}{E h} (1,69315 + 0,69315 \mu), \quad \Delta r_{\alpha_2}^* = A = \frac{a^2 g}{E h} (1 + \mu). \quad (1127b)$$

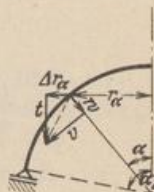


Abb. 779.

Eine gleichförmige Erwärmung der Kugelschale um  $t^0$  erzeugt

$$\Delta r_\alpha = \alpha_1 t a \sin \alpha, \quad \vartheta = 0. \quad (1128)$$

Schnittkräfte bei Schneebelastung.  $p_x = 0$ ,  $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $p_z = p_s \cos^2 \alpha$  (Abb. 780).

$$N_\alpha = -\frac{a p_s}{2}, \quad N_\beta = -\frac{a p_s}{2} \cos 2\alpha. \quad (1129)$$

Bei  $\alpha > 45^\circ$  entstehen daher Zugspannungen  $\sigma_\beta$ .

Die waagerechte Verschiebung beträgt

$$\Delta r_\alpha = \frac{a^2 p_s}{E h} \sin \alpha \left( \frac{1 + \mu}{2} - \cos^2 \alpha \right) \quad (1130)$$

und die Verdrehung der Meridiantangente

$$\vartheta = -\frac{a p_s}{E h} (3 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1131)$$

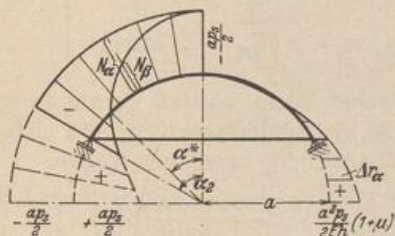


Abb. 780. Schaulinien für Schneelast.

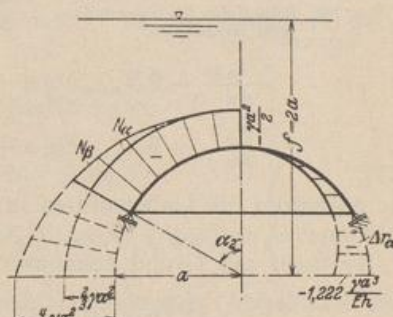


Abb. 781. Schaulinien für Wasserauflast beim Stützboden.

Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Stützboden eines Behälters (Abb. 781).

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = p_w = \gamma a \left( \frac{t}{a} - \cos \alpha \right),$$

$$\begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{\sin^2 \alpha} \left[ \int \left( \frac{t}{a} - \cos \alpha \right) \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + C_1 \right] \\ &= -\frac{\gamma a^2}{6 \sin^2 \alpha} \left[ \frac{3t}{a} \sin^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 6 C_1 \right]. \end{aligned}$$

Da  $N_\alpha$  für  $\alpha = 0$  endlich ist, wird die Klammer Null und daher  $6 C_1 = -2$ .



$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= -\frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= -\frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} - 6 \cos \alpha + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \gamma \frac{a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1132)$$

Wird die Kugelschale nach Abb. 782 als Hängeboden eines Wasserbehälters verwendet, so erhält die bezogene Kraft  $g$  unter Beibehaltung des Koordinatensystems in den Ergebnissen (1121) bis (1127) das negative Vorzeichen.

Schnittkräfte durch Wasserauflast bei Verwendung der Kugelschale als Hängeboden eines Behälters (Abb. 782).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 0, & p_y &= 0, & p_z &= -\gamma a \left( \frac{f}{a} + \cos \alpha \right), \\ N_\alpha &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), & N_\beta &= \frac{\gamma a^2}{6} \left( 3 \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \\ \Delta r_\alpha &= \frac{\gamma a^3}{6 E h} \sin \alpha \left[ 3(1 - \mu) \frac{f}{a} + 6 \cos \alpha - 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right], \\ \vartheta &= \frac{\gamma a^2}{E h} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1133)$$

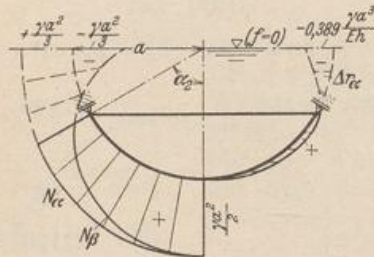


Abb. 782. Schaulinien für Wasserauflast beim Hängeboden.

Aus der Ableitung an einem Spiegelbild der Abb. 782 folgt, daß  $\vartheta$  im Gegensatz zu (1132) bei Rechtsdrehung der Meridiantangente positiv ist.

Die Kugelschale mit einer vom Meridianwinkel  $\beta$  periodisch abhängigen Belastung. Die allgemeinen Differentialgleichungen (1101) für das Gleichgewicht der Kräfte an einer Rotationsschale lassen sich für  $R_\alpha = R_\beta = a$  folgendermaßen vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d N_{\alpha\beta n}}{d \alpha} + 2 N_{\alpha\beta n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha n} &= -a \left( X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{d N_{\alpha n}}{d \alpha} + 2 N_{\alpha n} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} N_{\alpha\beta n} &= -a \left( Y_n + Z_n \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \right\} (1134)$$

Sie enthalten die Unbekannten in symmetrischer Form, so daß daraus neue Unbekannte  $U_1 = N_{\alpha n} + N_{\alpha\beta n}$ ,  $U_2 = N_{\alpha n} - N_{\alpha\beta n}$  gebildet werden, die sich nach H. Reißner auf Grund bekannter Regeln unabhängig berechnen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d U_1}{d \alpha} + U_1 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= -a \left( X_n + Y_n + \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \\ \frac{d U_2}{d \alpha} + U_2 \left( 2 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{n}{\sin \alpha} \right) &= +a \left( X_n - Y_n + \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_n \right), \end{aligned} \right\} (1135)$$

Bei Windbelastung ist  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = \sum Z_n(\alpha) \cos n\beta$ . Der auf jeden Schalen-sektor von der Winkelbreite  $\pi/n$  entfallende Anteil bildet eine Resultierende. Je zwei sind einander symmetrisch oder antimetrisch zugeordnet, je nachdem  $n$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sie geben geometrisch addiert eine senkrechte ( $W_v$ ) oder eine waagerechte Kraft ( $W_h$ ), deren Wirkungslinie die Drehachse im Schalenmittelpunkt schneidet (Abb. 783).

Sonderfall  $Z_n(\alpha) = p \sin \alpha$ ,  $n = 1$ . Die Spannungsverteilung ist durch einen Nullmeridian ausgezeichnet.



a) Lösung der Differentialgleichungen (1135). Die Gleichungen haben die Form

$$\frac{dU}{d\alpha} + U\varphi = \psi.$$

Die Substitution  $\varphi = \bar{\varphi}'/\bar{\varphi}$  führt auf

$$\bar{\varphi}U' + U\bar{\varphi}' = \psi\bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}U = \int \psi\bar{\varphi} d\alpha + C.$$

Durch Integration folgt

$$\int \varphi d\alpha = \int \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}} d\alpha = \ln \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = e^{\int \varphi d\alpha}$$

und damit die Lösung

$$U = e^{-\int \varphi d\alpha} \left[ \int \psi e^{\int \varphi d\alpha} d\alpha + C \right].$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß für  $\alpha = 0$  die Schnittkräfte und damit auch  $U_1$  und  $U_2$  endlich sind. Die Integration bietet keine Schwierigkeiten; die Lösung lautet (Abb. 785)

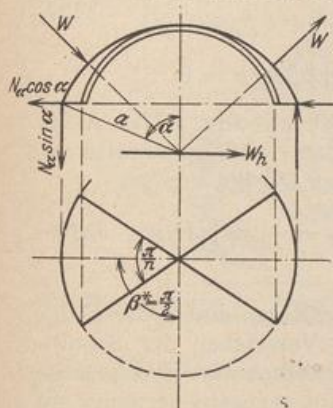
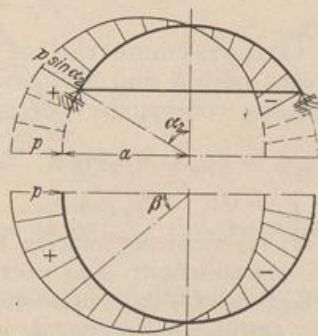
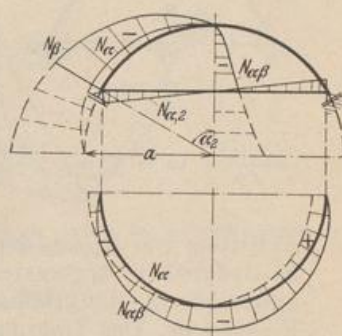


Abb. 783.

Abb. 784. Windlast  $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$ .Abb. 785. Schaulinien für Windbelastung  $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$ .

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{pa \cos \alpha}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \cos \beta, \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) \sin \beta, \\ N_\beta &= +\frac{pa}{3 \sin^3 \alpha} (2 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^4 \alpha) \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1136)$$

b) Unmittelbare Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 783 u. 784).

$$W_h = 4pa^2 \int_0^\alpha \sin^3 \alpha d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = p \frac{\pi a^2}{3} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha).$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse  $\beta^* = \pi/2$  in der Ebene des Breitenkreises:

$$W_h a \cos \alpha + 4N_{\alpha 1} a^2 \sin^3 \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = 0; \quad \text{daraus } N_\alpha \text{ nach (1136).}$$

Gleichgewichtsbedingung (1113):

$$N_\beta = N_{\beta 1} \cos \beta = -(pa \sin \alpha + N_{\alpha 1}) \cos \beta; \quad \text{daraus } N_\beta \text{ nach (1136).}$$

48\*



Gleichgewicht gegen Verschieben durch  $W_h$  und durch die Komponenten der Schnittkräfte  $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$  in Richtung  $W_h$ :

$$W_h - 4N_{\alpha 1} a \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta + 4N_{\alpha\beta 1} a \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d\beta = 0,$$

daraus  $N_{\alpha\beta}$  nach (1136).

Reißner, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau-Festschrift S. 192. Leipzig 1912.  
— Pasternak, P.: Die praktische Berechnung biegeester Kugelschalen usw. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 1.

**b) Die Kegelschale.** Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am unteren differentialen Abschnitt der Fläche erhalten mit  $R_\beta = \infty$ ,  $R_\beta d\alpha = dy$ ,  $r_\alpha \rightarrow r_z = y \cos \alpha$ ,  $N_\alpha \rightarrow N_y$ ,  $N_{\alpha\beta} \rightarrow N_{y\beta}$  folgende Form (Abb. 786):

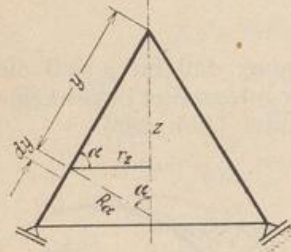


Abb. 786.

$$\left. \begin{aligned} y \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + 2N_{y\beta} + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} y p_x &= 0, \\ y \frac{\partial N_y}{\partial y} + (N_y - N_\beta) + \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + y p_y &= 0, \\ N_\beta + y p_z \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} (1137)$$

Rotationssymmetrische Belastung: Die Ableitungen nach  $\beta$  sind Null, so daß die Schnittkräfte unabhängig voneinander berechnet werden können.

$$\frac{d(N_{y\beta} y^2)}{dy} = -y^2 p_x, \quad \frac{d(N_y y)}{dy} = -y p_y - y p_z \operatorname{ctg} \alpha, \quad N_\beta = -y p_z \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1138)$$

$$p_x = 0: \quad N_{y\beta} = 0.$$

Ableitung von  $N_y$  aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem durch den Breitenkreis  $r_z$  begrenzten Schalenabschnitt. Das obere Vorzeichen der Schnittkräfte gilt für die gestützte Kegelschale, das untere Vorzeichen für die hängende Kegelschale. Der Tragring der gestützten Kegelschale wird gezogen, derjenige der hängenden Kegelschale gedrückt.

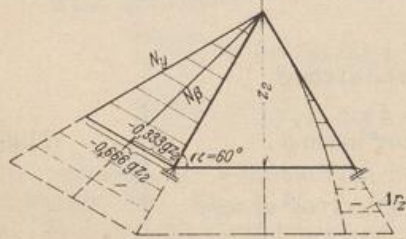


Abb. 787. Schaulinien für Eigengewicht.

$$N_y = \mp \frac{Q}{2\pi r_z \sin \alpha} = \mp \frac{Q}{\pi y \sin 2\alpha}. \quad (1139)$$

Verschiebungszustand bei rotationssymmetrischer Belastung

$$\left. \begin{aligned} r &\rightarrow r + \Delta r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{r_z}{Eh} (N_\beta - \mu N_y) \\ &= \frac{y \cos \alpha}{Eh} (N_\beta - \mu N_y), \end{aligned} \right\} (1140)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ (1 + \mu) (N_y - N_\beta) - y \frac{\partial}{\partial y} (N_\beta - \mu N_y) \right] \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{Eh} \left[ \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial y} (y^2 p_z) - \mu y p_y + N_y \right]. \end{aligned} \quad (1141)$$

Eigengewicht einer geschlossenen Kegelschale mit gleichbleibender Wanddicke  $h$  (Abb. 787).

$$\left. \begin{aligned} p_z &= g \cos \alpha, & p_y &= g \sin \alpha, & G &= \pi r_z y g, \\ N_y &= \mp \frac{g z}{2 \sin^2 \alpha}, & N_\beta &= \mp g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{g z^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 E h \sin^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha - \mu), & \vartheta &= \mp \frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} [1 + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \right\} (1142)$$



Zur Berechnung der Schnittkräfte aus Schneelast wird  $g = p_s \cos \alpha$  eingesetzt.  
 Waagrecht abgeglichene Auflast (Abb. 788 u. 789):

$$\left. \begin{aligned} G &= \gamma \pi r_z^2 (f \pm \frac{2}{3} z), \quad N_y = \mp \frac{\gamma z \operatorname{ctg} \alpha}{6 \sin \alpha} (3f \pm 2z), \quad N_\beta = \mp \gamma z (f \pm z) \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \\ \Delta r_z &= \mp \frac{\gamma z^2 \cos^2 \alpha}{E h \sin^3 \alpha} \left[ (f \pm z) - \frac{\mu}{6} (3f \pm 2z) \right], \\ \vartheta &= \pm \frac{\gamma z \cos^2 \alpha}{E h \sin^3 \alpha} \left( \frac{3}{2} f \pm \frac{8}{3} z \right). \end{aligned} \right\} (1143)$$

Eigengewicht (g) einer offenen Kegelschale (Abb. 790)

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{g z}{2 \sin^2 \alpha} \left( 1 - \frac{z_1^2}{z^2} \right), \quad N_\beta = -g z \operatorname{ctg}^2 \alpha, \\ \Delta r_z &= -\frac{g z^2}{E h} \operatorname{ctg}^3 \alpha \left[ 1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \alpha} \left( 1 - \frac{z_1^2}{z^2} \right) \right], \\ \vartheta &= -\frac{g z \operatorname{ctg} \alpha}{E h \sin^2 \alpha} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \frac{z_1^2}{z^2} \right]. \end{aligned} \right\} (1144)$$

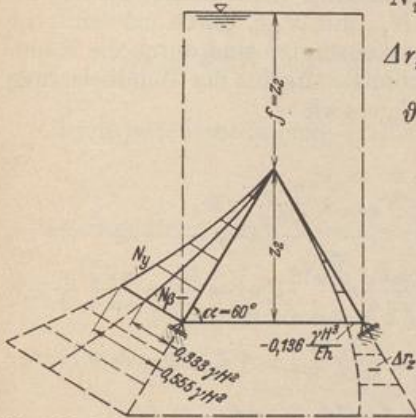


Abb. 788. Schaulinien für Auflast bei der aufgestützten Kegelschale.

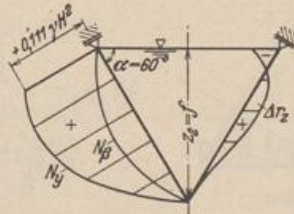


Abb. 789. Schaulinien für Auflast bei der aufgehängten Kegelschale.

Offene Kegelschale mit Kopfring und Ringlast  $G_0$  (Abb. 791)

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{G_0}{2 \pi z \cos \alpha}, \quad N_\beta = 0, \\ \Delta r_z &= \frac{\mu G_0}{2 \pi E h \sin \alpha}, \quad \vartheta = -\frac{G_0}{E h} \frac{1}{2 \pi z \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} (1145)$$

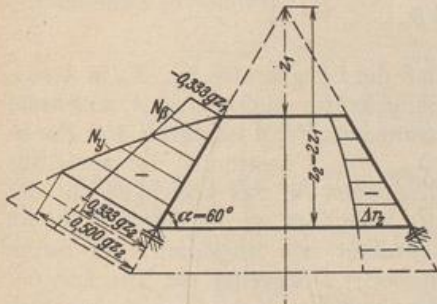


Abb. 790. Schaulinien für Eigengewicht.

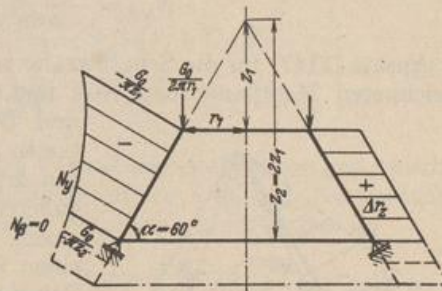


Abb. 791. Schaulinien für Ringlast.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von  $\beta$  fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten sind Funktionen von  $z$ .

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta, \quad n = 0, 1 \dots \infty.$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1113) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{yn} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta$$



erfüllt, wenn die allein von  $z$  abhängigen Funktionen  $N_{yn}$ ,  $N_{\beta n}$ ,  $N_{y\beta n}$  den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + X_n + \frac{n}{\sin \alpha} Z_n &= 0, \\ \frac{d}{dy} (yN_{yn}) + \frac{n}{\cos \alpha} N_{y\beta n} + yY_n + yZ_n \operatorname{ctg} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1146)$$

Außerdem ist

$$N_{\beta n} = -yZ_n \operatorname{ctg} \alpha.$$

Darnach kann  $N_{y\beta n}$  unabhängig von den beiden anderen Schnittkräften aus (1146) berechnet werden. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist bekannt (Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 101), so daß  $N_{yn}$  mit  $N_{y\beta n}$  durch eine einfache Quadratur gefunden wird. Die beiden Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen bestimmt. Die Lösung liefert die Schnittkräfte aus der Windbelastung eines Kegeldaches mit  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = \sum Z_n \cos n\beta$ .

Lösung für  $Z_n = Z_n(y) = \text{const.}$

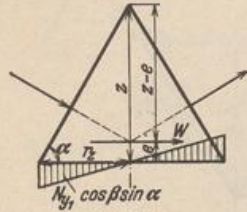


Abb. 792.

$$\begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + \frac{2}{y} N_{y\beta n} + \frac{nZ_n}{\sin \alpha} &= 0, \\ N_{y\beta n} &= e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left[ C_1 - \int \frac{nZ_n}{\sin \alpha} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy \right] = \frac{C_1}{y^2} - \frac{nZ_n}{\sin \alpha} \frac{y}{3}, \\ \frac{d(yN_{yn})}{dy} + \frac{n}{\cos \alpha} \left( \frac{C_1}{y^2} - \frac{nZ_n}{\sin \alpha} \frac{y}{3} \right) + yZ_n \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ N_{yn} &= Z_n y \frac{n^2 - 3 \cos^2 \alpha}{6 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{nC_1}{y^2 \cos \alpha} + \frac{C_2}{y}. \end{aligned}$$

Damit für  $y = 0$  die Schnittkräfte endlich bleiben, ist  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{Z_n z}{6} \frac{n^2 - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \cos n\beta, \\ N_\beta &= -Z_n z \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \cos n\beta, \\ N_{y\beta} &= -\frac{nZ_n z}{3 \sin^2 \alpha} \sin n\beta. \end{aligned} \right\} \quad (1147)$$

Der Ansatz (1147) für die Schnittkräfte zeigt, daß die Längskräfte  $N_y$ ,  $N_\beta$  in  $n$  ausgezeichneten Meridianebenen Null und die Schubkräfte gleichzeitig Grenzwerte sind. Der Spannungszustand ist durch drei drei Funktionen  $N_{yn}$ ,  $N_{\beta n}$ ,  $N_{y\beta n}$  bestimmt, die auch aus den drei Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte berechnet werden können, die an einem Schalensektor  $\pi/n$  angreifen, der durch einen Breitenschnitt  $z$  begrenzt ist. Die aus der Belastung herrührenden Kräfte schneiden sich auf der Drehachse. Sie sind bei einer geraden Zahl  $n$  symmetrisch, ihre Resultierende senkrecht, dagegen bei einer ungeraden Zahl  $n$  antimetrisch, so daß eine waagrecht gerichtete resultierende Kraft entsteht. Die Untersuchung kann in beiden Fällen auf den halben Sektor beschränkt werden.

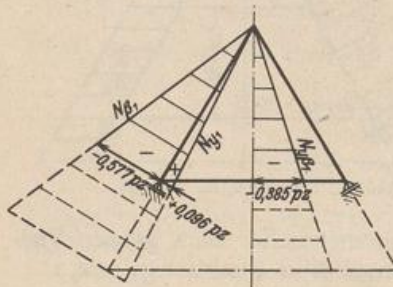


Abb. 793. Schaulinien für Windbelastung  $p \sin \alpha \cos \beta$ .

Lösung für  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = p \sin \alpha \cos \beta$  (Abb. 793).  
Waagerechte Resultierende der äußeren Kräfte (Abb. 792).



$$W = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin \alpha \cos \beta dy r_z d\beta = 4 p \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y y \cos^2 \beta dy d\beta = \frac{\pi}{2} p z^2 \cos \alpha.$$

$$W \cdot (z - \epsilon) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y p_z \sin \alpha \cos \beta \frac{s}{\sin \alpha} r_z dy d\beta = \pi p \frac{y^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (z - \epsilon) = \frac{2y}{3 \sin \alpha}.$$

Gleichgewicht aller äußeren Kräfte gegen Drehen um eine Achse  $\beta^* = \frac{\pi}{2}$  in der Ebene des Breitenkreises.

$$W_e = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta} \cos \beta \sin \alpha \cdot r_z \cos \beta \cdot r_z d\beta, \quad N_y = \frac{p z}{6} \frac{1 - 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cos \beta.$$

Gleichgewichtsbedingung (1137)

$$N_\beta = -p z \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta.$$

Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung  $W$

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_y \cos \alpha \cos \beta \cdot r_z d\beta + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_{y\beta} \sin^2 \beta \cdot r_z d\beta - W = 0,$$

$$N_{y\beta} = -\frac{p z}{3 \sin \alpha} \sin \beta.$$

c) Die Zylinderschale. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1137) der Kegelschale vereinfachen sich mit  $r = a = \text{const}$  und  $\alpha = 90^\circ$ . Sie lauten

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial y} + a p_x = 0, \quad \frac{\partial N_{y\beta}}{\partial \beta} + a \frac{\partial N_y}{\partial y} + a p_y = 0, \quad N_\beta + a p_x = 0, \quad (1148)$$

so daß die Schnittkräfte  $N_\beta$ ,  $N_{y\beta}$ ,  $N_y$  in Verbindung mit zwei Integrationskonstanten der Reihe nach berechnet werden können. Diese sind durch die Randbedingungen bestimmt.

$$\left. \begin{aligned} N_\beta &= -p_x a, & N_{y\beta} &= \int \left( \frac{\partial p_x}{\partial \beta} - p_x \right) dy + C_1(\beta), \\ N_y &= -\int \left[ p_y + \frac{1}{a} \int \left( \frac{\partial^2 p_x}{\partial \beta^2} - \frac{\partial p_x}{\partial \beta} \right) dy + \frac{dC_1(\beta)}{d\beta} \right] dy + C_2(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (1149)$$

Die Formänderung der Zylinderschale ist den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Komponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des Verschiebungszustandes und den Komponenten  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_\beta$ ,  $\gamma_{y\beta}$  der Verzerrung eines differentialen Abschnitts unterworfen.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_\beta &= \frac{\partial u}{a \partial \beta} - \frac{w}{a}, & \gamma_{y\beta} &= \frac{\partial v}{a \partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1150)$$

$$v = \int \epsilon_y dy + C_3(\beta), \quad u = \int \left( \gamma_{y\beta} - \frac{\partial v}{a \partial \beta} \right) dy + C_4(\beta), \quad w = \frac{\partial u}{\partial \beta} - a \epsilon_\beta.$$

Die Dehnungen  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_\beta$  und die Winkeländerung  $\gamma_{y\beta}$  sind durch das Elastizitätsgesetz bestimmt (1104). Darnach ist

$$\epsilon_y = \frac{1}{E h} (N_y - \mu N_\beta), \quad \epsilon_\beta = \frac{1}{E h} (N_\beta - \mu N_y), \quad \gamma_{y\beta} = \frac{2(1 + \mu)}{E h} N_{y\beta}. \quad (1151)$$



Rotationssymmetrische Belastung. Die Ableitung der Funktionen der Schnittkräfte nach  $\beta$  sind Null, so daß nach (1148) folgender Ansatz verwendet werden kann.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta}}{dy} + p_x = 0, \quad \frac{dN_y}{dy} + p_y = 0, \quad N_\beta + a p_z = 0, \\ -w = \Delta a = \frac{a}{Eh} (N_\beta - \mu N_y), \quad \vartheta = dw/dy. \end{aligned} \right\} \quad (1152)$$

Schnittkräfte aus dem Eigengewicht  $g$  einer Zylinderschale mit Aufbau (Gewicht  $G_0$ , Abb. 794)

$$N_y = -gy - \frac{G_0}{2a\pi}, \quad N_\beta = 0, \quad Ehw = -\mu \left( a y g + \frac{G_0}{2\pi} \right), \quad Eh\vartheta = -\mu a g. \quad (1153)$$

Bei den folgenden Belastungsarten ist die Meridianschnittkraft  $N_y$  Null.

1. Wasserfüllung mit  $p_z = -\gamma y$ :

$$N_\beta = \gamma y a, \quad Ehw = -\gamma y a^2, \quad Eh\vartheta = -\gamma a^2. \quad (1154)$$

2. Silodruck nach S. 14 mit  $p_s = p_{s, \max} (1 - e^{-y/v_0})$ ,  $p_z = -p_s$ :

$$N_\beta = a p_s, \quad Ehw = -a^2 p_s, \quad Eh\vartheta = -p_{s, \max} \frac{a^2}{y_0} e^{-y/v_0}. \quad (1155)$$

3. Erddruck nach S. 9 mit  $e = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)$ ,  $p_z = e(y + q/\gamma_e)$ :

$$N_\beta = -ae(y + q/\gamma_e), \quad Ehw = a^2 e(y + q/\gamma_e), \quad Eh\vartheta = a^2 e. \quad (1156)$$

4. Temperatur und Schwinden:

$$w = -\alpha_t t a, \quad \vartheta = 0. \quad (1157)$$

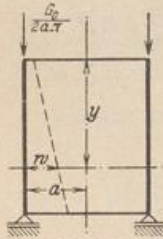


Abb. 794.

Periodische Belastung. Entwicklung als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen von  $\beta$  fortschreitende Reihe. Die Koeffizienten  $X_n, Y_n, Z_n$  sind Funktionen von  $y$ .

$$p_x = \sum X_n \sin n\beta, \quad p_y = \sum Y_n \cos n\beta, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta. \quad (1158)$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1148) werden durch den Ansatz

$$N_y = \sum N_{yn} \cos n\beta, \quad N_\beta = \sum N_{\beta n} \cos n\beta, \quad N_{y\beta} = \sum N_{y\beta n} \sin n\beta \quad (1159)$$

erfüllt, wenn die allein von  $y$  abhängigen Funktionen  $N_{yn}, N_{\beta n}, N_{y\beta n}$  den folgenden beiden simultanen totalen Differentialgleichungen genügen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_{y\beta n}}{dy} + X_n + n Z_n = 0, \quad \frac{dN_{yn}}{dy} + \frac{n}{a} N_{y\beta n} + Y_n = 0, \\ N_{\beta n} + a Z_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1160)$$

**Berechnung einer Zylinderschale (Abb. 795).**

(Kühlturm im Kraftwerk Golpa-Zschornewitz.)

Geometrische Abmessungen.

$$a = 16,7\text{m}, \quad l = 32,0\text{m}.$$

Belastung. Windgesetz (1111) der Göttinger Versuchsanstalt mit  $p_w = 0,200\text{ t/m}^2$ .

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \sum Z_n \cos n\beta = -0,131 + 0,056 \cos \beta + 0,223 \cos 2\beta + 0,080 \cos 3\beta.$$

Lösung der Differentialgleichungen (1160).

$$X_n = 0, \quad Y_n = 0, \quad Z_n = \text{const.}$$

$$N_{y\beta n} = -n Z_n (y + C_1),$$

$$N_{yn} = \frac{n^2 Z_n}{a} \left( \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \right),$$

$$N_{\beta n} = -a Z_n.$$



Für  $y = 0$  ist  $N_{y n} = 0, N_{y \beta n} = 0$ , daher  $C_1 = 0, C_2 = 0$ .

$$N_y = \frac{y^2}{2a} \sum n^2 Z_n \cos n \beta,$$

$$N_\beta = -a \sum Z_n \cos n \beta,$$

$$N_{y \beta} = -y \sum n Z_n \sin n \beta.$$

Schnittkräfte und Trajektorien der Hauptspannungen sind in Abb. 795 u. 796 dargestellt.

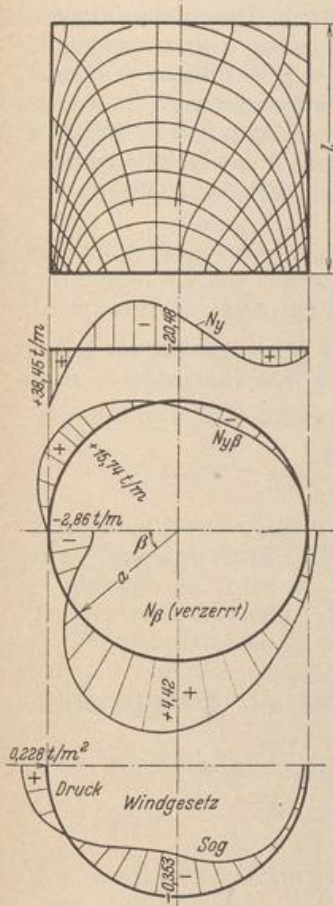


Abb. 795.

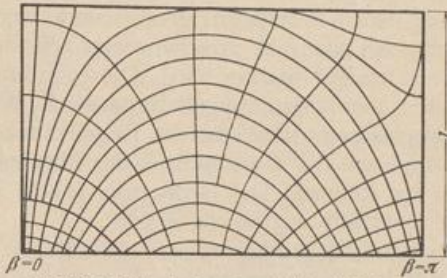


Abb. 796. Trajektorien im abgewinkelten Zylindermantel.

**d) Der Schalenrand.** Ein Längsspannungszustand kann sich auch bei stetiger Krümmung der Mittelfläche, bei stetiger Änderung der Wanddicke und bei stetiger Belastung der Schale nur dann ausbilden, wenn die äußeren Kräfte am Rande in Richtung der Meridian-tangente eingetragen werden, ohne daß die Form-änderung des Längsspannungszustandes infolge Belastung und Temperaturänderung durch die Stützung oder den biegeungssteifen Anschluß anderer Bauteile gestört wird. Diese Bedingungen lassen sich nur bei Schalen mit senkrechter Endtangente erfüllen. Der Meridian wird dabei zum Halbkreis, zur Ellipse, Zykloide, Parabel oder zu einem Korbbogen mit annähernd stetiger Änderung der Krümmung (Abb. 799).

Um Schalen ohne senkrechte Endtangente abzustützen oder senkrechte Lasten in den oberen Rand offener Schalen einzuführen und Schalen in einem Breitenkreis mit unstetiger Krümmung zu verbinden, sind Ringträger notwendig, deren Längskraft an den Unstetigkeitsstellen das Gleichgewicht der inneren Kräfte herstellt. Sie lassen sich auch zur Eintragung von Einzellasten verwenden, die als stetige Funktionen

des Winkels  $\beta$  vorgegeben sind. Längskräfte in Ringträgern bei rotationssymmetrischer Belastung (Abb. 770).

$$\begin{array}{ll} \text{Druckring:} & \text{Zugring:} \\ D = -\frac{Q_1}{2\pi} \text{ctg } \alpha_1, & Z = +\frac{Q_2}{2\pi} \text{ctg } \alpha_2, \end{array} \quad (1161)$$

Zwischenring  $k$  zwischen zwei Meridianabschnitten mit den Tangentenwinkeln  $\alpha_k^{(o)}, \alpha_k^{(u)}$  (Abb. 797).

$$S_k = -\frac{Q_k}{2\pi} (\text{ctg } \alpha_k^{(u)} - \text{ctg } \alpha_k^{(o)}). \quad (1162)$$

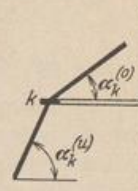


Abb. 797.

Störungen des Längsspannungszustandes werden jedoch hier nur vermieden, wenn



die Ringdehnung  $\varepsilon_\beta$  der Schale mit der Dehnung  $\bar{\varepsilon}_\beta$  des Ringträgers übereinstimmt, also für  $\alpha \rightarrow \alpha_2$  (Abb. 798).

$$E \varepsilon_{\beta 2} = \frac{1}{h} (N_{\beta 2} - \mu N_{\alpha 2}) = E \bar{\varepsilon}_{\beta 2} = - \left( \frac{r_2 N_{\alpha 2} \cos \alpha_2}{F_2} + \frac{\mu N_{\alpha 2} \sin \alpha_2}{b_2} \right),$$

$$- \frac{N_{\beta 2}}{N_{\alpha 2}} + \mu = \frac{h}{F_2} r_2 \cos \alpha_2 + \mu \frac{h}{b_2} \sin \alpha_2. \quad (1163)$$

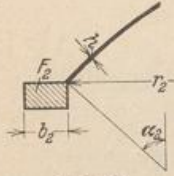


Abb. 798.

Ein Zuginnenringträger kann daher nur unterhalb der Bruchfuge der Schale angeordnet werden ( $N_{\beta 2} > 0$ ), so daß flache Kugel- oder Kegelschalen nach F. Dischinger einen Übergangsbogen zum Ringträger erhalten müssen, in welchem ein Teil des Bogenschubes durch Ringkräfte aufgenommen wird. Diese sind nach (1097) um so größer, je kleiner der Krümmungshalbmesser  $R_\beta$  der Kurve und damit auch die Länge des Übergangsbogens wird. In der Regel nimmt die Krümmung mit dem Winkel  $\alpha$  stetig zu, um auch die Wanddicke  $h$  der Randzone gegen den Randträger allmählich vergrößern zu können. Die Bedingung (1163) kann dann durch Veränderung von  $h$ ,  $F_2$  oder  $\alpha_2$  erfüllt werden (s. S. 765).

Der Übergangsbogen leistet auch bei offenen Schalen gute Dienste, wenn an dem oberen Rande das Eigengewicht einer Laterne aufgenommen werden soll. Die Dehnung  $\varepsilon_\beta$  der Schale ist nahezu Null, während die Dehnung  $\bar{\varepsilon}_\beta$  des Ringträgers sehr groß wird.

**e) Rotationssymmetrische Schalen mit beliebiger Meridiankurve.** Neben der Kugel-, Kegel- und Zylinderschale werden zur Lösung von Bauaufgaben noch

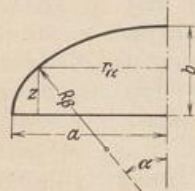


Abb. 799 a. Ellipse.

$$r_\alpha = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}},$$

$$R_\beta = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{dr_\alpha}{dz} = - \frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

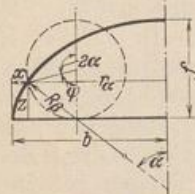


Abb. 799 b. Zykloide.

$$x = \frac{f}{2} (\varphi - \sin \varphi), \quad z = \frac{f}{2} (1 - \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 180^\circ,$$

$$b = \frac{\pi f}{2}, \quad r_\alpha = \frac{f}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha), \quad R_\beta = 2f \cos \alpha,$$

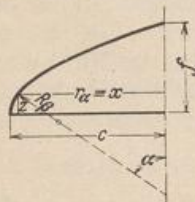


Abb. 799 c. Parabel.

$$x = \frac{2pc - z^2}{2p}, \quad f = \sqrt{2pc},$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{p^2 + z^2}},$$

$$R_\alpha = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad R_\beta = 2 \sqrt{\frac{2}{p} \left( c - x + \frac{p}{2} \right)^3},$$

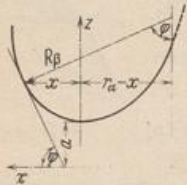


Abb. 799 d. Kettenlinie.

$$z = a \operatorname{Coj} \left( \frac{x}{a} \right), \quad \sin \varphi = \operatorname{I}g \left( \frac{x}{a} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{\operatorname{Coj} \left( \frac{x}{a} \right)},$$

$$R_\alpha = r_\alpha \operatorname{Ctg} \left( \frac{x}{a} \right), \quad R_\beta = a \operatorname{Coj}^2 \left( \frac{x}{a} \right).$$



rotationssymmetrische Schalen mit einer Ellipse, Zykloide, Parabel oder Kettenlinie als Meridiankurve verwendet (Abb. 799). Die analytische Berechnung ihrer Längskräfte bereitet nach S. 745 keine Schwierigkeiten. Dagegen sind zur Untersuchung von Schalen mit beliebiger Meridiankurve noch einige Bemerkungen notwendig, die sich auch zur angenäherten Berechnung von Schalen mit mathematisch definierter Meridianlinie und veränderlicher Wanddicke eignen.

a) Rotationssymmetrische Belastung. Die Schnittkräfte werden aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem geeigneten Abschnitt des Flächentragwerks berechnet. An dem Schalenteil über einem Breitenschnitt mit dem Halbmesser  $r_\alpha$  wirken neben der stetigen Belastung  $p = p_x + p_z$  die Längskräfte  $N_\alpha$ . Die Schubkräfte  $N_{\alpha\beta}$  sind Null, da  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$  und diese bei rotationssymmetrischer Belastung wegfällen. Mit  $Q_\alpha$  als senkrechter Komponente der resultierenden Belastung und  $p_x \sin \alpha - p_y \cos \alpha = p_h$  als waagerechter Komponente der stetigen Belastung  $p$  lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte an den Abschnitten Abb. 767 nach S. 745

$$\left. \begin{aligned} r_\alpha N_\alpha &= -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{Q_\alpha}{2\pi}, \\ N_\beta &= -N_\alpha \frac{R_\alpha}{R_\beta} - p_z R_\alpha \\ &= \frac{d}{ds} (r_\alpha N_\alpha \cos \alpha) - p_h r_\alpha. \end{aligned} \right\} (1164)$$

Bei senkrechter Belastung ist also

$$N_\beta = -\frac{1}{2\pi} \frac{d(Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha)}{ds} \quad (1165)$$

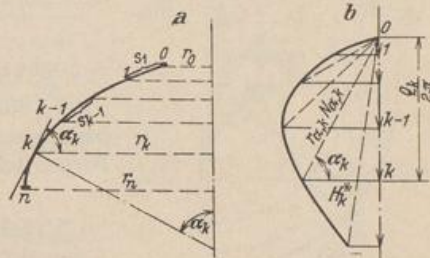


Abb. 800.

Die Schnittkräfte lassen sich daher rechnerisch oder zeichnerisch bei jeder Form des Meridianschnittes angeben, wenn dieser mit der Punktfolge  $O \dots k \dots n$  in  $n$  gleichgroße Intervalle  $s$  geteilt und der Differentialquotient (1165) durch den Differenzenquotienten (1166) ersetzt wird.

Die Buchstaben  $\alpha_k$  bezeichnen die Winkel der Tangenten in den Intervallgrenzen, die Buchstaben  $r_k$  den Halbmesser der Breitenschnitte  $k$ . Ihnen sind die Kräfte  $Q_k$  und der Bogenschub  $H_k^* = Q_k / 2\pi \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k$  zugeordnet.

$$\left. \begin{aligned} r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} &= \frac{1}{\sin \alpha_k} \cdot \frac{Q_{\alpha,k}}{2\pi}, \\ N_{\beta,k} &= \frac{H_k^* - H_{k-1}^*}{s_k} - \frac{p_{h,k} + p_{h,(k-1)}}{2} \cdot \frac{r_k + r_{k-1}}{2}. \end{aligned} \right\} (1166)$$

Die numerische Anwendung der Rechenvorschrift ist in dem Zahlenbeispiel auf S. 764 enthalten. Die zeichnerische Lösung besteht aus einem Kräfteplan mit  $Q_0/2\pi \dots Q_k/2\pi \dots Q_n/2\pi$ , aus dem zunächst  $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k})$ , also auch  $N_{\alpha,k}$  und  $(r_{\alpha,k} N_{\alpha,k} \cos \alpha_k) = H_k^*$  erhalten werden (Abb. 800). Die Ringkräfte  $N_{\beta,k}$  wechseln bei senkrechter Belastung ( $p_h = 0$ ) mit  $\Delta H_k^* = H_k^* - H_{k-1}^* = 0$  das Vorzeichen.

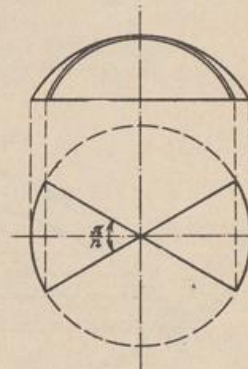


Abb. 801.

b) Windbelastung. Die Belastung  $p_w = p_z$  kann nach S. 746 stets als trigonometrische, nach ganzen Vielfachen  $n$  von  $\beta$  fortschreitende Reihe entwickelt und damit in Teile zerlegt werden, die zu einer ausgezeichneten Meridianebene ( $\beta = 90^\circ$ ) symmetrisch oder antisymmetrisch sind, je nachdem  $n$  eine gerade oder ungerade Zahl ist ( $p_w = \sum p_{wn}$ ). Die Spannungen werden für jeden Anteil  $p_{wn}$  einzeln berechnet und darauf überlagert. Die Spannungen aus dem Anteil  $p_{wn}$  eines Breitenschnittes sind nach S. 746 durch 3 Parameter bestimmt.



Sie ergeben sich aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte des doppelten Schalensektors vom Öffnungswinkel  $\pi/n$  (Abb. 801). Er wird durch Ringzonen unterteilt, in denen der Meridian sich angenähert durch gerade Strecken ersetzen läßt und besteht dann aus einzelnen abgestumpften Kreiskegeln.

Sonderfall  $n = 1$ ,  $p_z = p_w \sin \alpha \cos \beta$ .

Der Normaldruck auf das Flächenteilchen  $dF$  beträgt  $p_z dF$ , seine Komponente in der Windrichtung mit  $dF = r_\alpha d\beta dz / \sin \alpha$

$$dw = p_w r_\alpha \sin \alpha \cos^2 \beta d\beta dz. \quad (1167)$$

Für einen vollen Ring mit der Höhe  $dz$  ist daher

$$dW = 4 \int_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} dw = \pi p_w r_\alpha \sin \alpha dz,$$

und für einen endlichen Abschnitt  $\Delta z$

$$\Delta W_k = \pi p_w r_k \sin \alpha_k \Delta z_k. \quad (1168)$$

Die Kraft wirkt im Abstand  $a_k$  vom Breitenkreis  $r$  (Abb. 802), so daß sich folgende Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte oberhalb des Breitenchnittes  $r$  aufstellen lassen.

$$\left. \begin{aligned} \sum a_k \Delta W_k + 4 N_{\alpha 1} r^2 \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta &= 0, \\ N_{\alpha 1} &= -\frac{\sum a_k \Delta W_k}{\pi r^2 \sin \alpha}, \quad N_\alpha = N_{\alpha 1} \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (1169)$$

Gleichgewichtsbedingung (1094)c

$$N_{\beta 1} = -\left( p_w \sin \alpha + \frac{N_{\alpha 1}}{R_\beta} \right) R_\alpha, \quad N_\beta = N_{\beta 1} \cos \beta, \quad (1170)$$

und

$$\sum \Delta W_k - 4 N_{\alpha 1} r \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta + 4 N_{\alpha \beta 1} r \int_0^{\pi/2} \sin^2 \beta d\beta = 0.$$

$$N_{\alpha \beta 1} = -\frac{1}{\pi r} \left[ \sum \Delta W_k + \frac{\text{ctg } \alpha}{r} \sum a_k \Delta W_k \right], \quad N_{\alpha \beta} = N_{\alpha \beta 1} \sin \beta. \quad (1171)$$

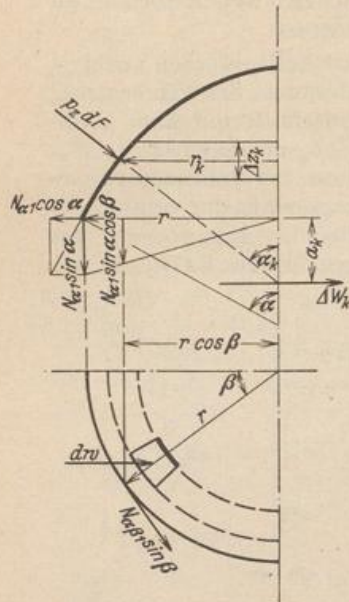


Abb. 802.

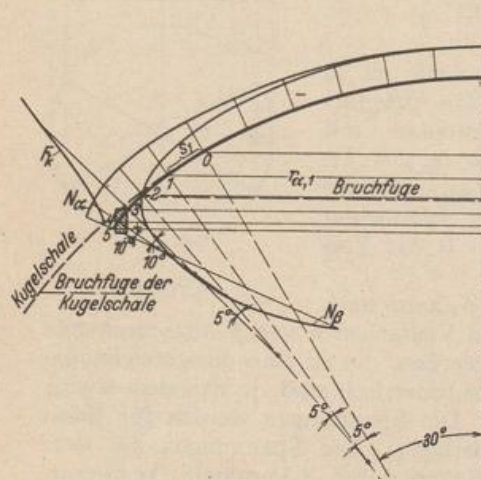


Abb. 803.

**Berechnung einer Kugelschale mit Übergangsbogen für Eigengewicht.**

Kugelschale:  $a = 23,75 \text{ m}$ ,  $g = 0,12 \text{ t/m}^2$ ,  
Schnittkräfte nach (1121). Bei  $\alpha = 30^\circ$  ist

$$N_{\alpha,0} = -1,526 \text{ t/m}, \quad N_{\beta,0} = -0,94 \text{ t/m}.$$

$$\frac{Q_{\alpha,0}}{2\pi} = -N_{\alpha,0} \cdot a \sin^2 \alpha = +9,06 \text{ t}.$$

Der Übergangsbogen beginnt bei  $\alpha = 30^\circ$  und ist geometrisch durch Abb. 803 gegeben. Er wird in Intervalle mit  $\Delta \alpha = 5^\circ$  oder  $10^\circ$  eingeteilt. Die Radien der Breitenkreise  $r_{\alpha,k}$  für die Intervallgrenze,  $r_{\alpha,k'}$  für die Intervallmitte werden der Zeichnung entnommen. Schnittkräfte nach (1166).

$$Q_{\alpha,k} = Q_{\alpha,0} + \sum \Delta Q_{\alpha,k},$$

$$\Delta Q_{\alpha,k} = g s_k 2\pi r_{\alpha,k'},$$



$h$	$\alpha_k^0$	$s_k$ m	$r_{\alpha,k}$ m	$\Delta Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$Q_{\alpha,k}/2\pi$ t	$r_{\alpha,k}$ m	$\sin \alpha_k$	$r_{\alpha,k} \sin \alpha_k$	$N_{\alpha,k}$ t/m	$\operatorname{ctg} \alpha_k$	$\frac{Q_{\alpha,k} \operatorname{ctg} \alpha_k}{2\pi}$	$\frac{\Delta(Q_{\alpha,k} \operatorname{ctg} \alpha_k)}{2\pi}$	$N_{\beta,k}$ t/m
0	30				- 9,06	11,88	0,5	5,94	- 1,53	1,732	- 15,70		(- 0,94)
1	35	1,78	12,72	- 2,72	- 11,78	13,48	0,574	7,73	- 1,52	1,428	- 16,81	- 1,11	- 0,62
2	40	1,38	14,03	- 2,32	- 14,10	14,55	0,643	9,36	- 1,51	1,192	- 16,82	- 0,01	- 0,01
3	45	0,86	14,88	- 1,54	- 15,64	15,19	0,707	10,72	- 1,46	1,000	- 15,64	- 1,18	+ 1,38
4	55	0,67	15,39	- 1,24	- 16,88	15,61	0,819	12,76	- 1,32	0,700	- 11,81	- 3,83	+ 5,72
5	65	0,35	15,69	- 0,66	- 17,54	15,81	0,906	14,32	- 1,23	0,466	- 8,19	- 3,62	+ 10,34

Die günstigste Lage und der Querschnitt des Zugringes folgt aus (1163) mit  $h = 0,05$  m und  $h/b \ll 1$ .

$$F_k = (0,05 r_{\alpha,k} \cos \alpha_k) : \left( \frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}} + \mu \right) = \frac{3}{\mathfrak{R}}$$

$h$	$\cos \alpha_k$	$\mathfrak{B}$	$\frac{N_{\beta,k}}{-N_{\alpha,k}}$	$\mathfrak{R}$	$F_k$ cm <sup>2</sup>
2	0,766	0,557	- 0,005	0,16	34800
3	0,707	0,537	0,95	1,12	4800
4	0,574	0,448	4,34	4,51	995
5	0,423	0,335	8,40	8,57	391

Der Zugring wird bei  $\alpha = 45^\circ$  angeordnet und erhält den Querschnitt 100/50 cm. Abb. 803 zeigt die neue Lage der Bruchfuge im Gegensatz zur Kugelschale.

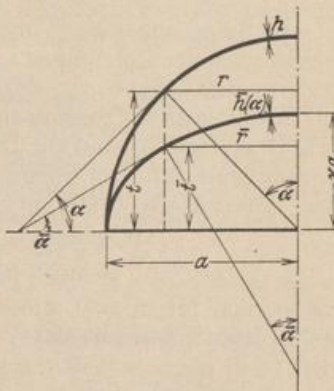


Abb. 804.

**f) Schalen mit Massenausgleich.** Sind die Schalen mit konstanter Wanddicke  $h$  zur Lösung einer Bauaufgabe ungeeignet, so liegt es bei der baulichen Ausbildung eines Querschnitts mit veränderlicher Wanddicke nahe, auf diejenigen elastischen Gebilde (Koordinaten  $\bar{R}_\alpha, \bar{R}_\beta, \bar{\alpha}$  oder  $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ ) zurückzugreifen, die mit einer ausgezeichneten Schale von konstanter Wanddicke (Koordinaten  $R_\alpha, R_\beta, \alpha$  oder  $r, s, t$ ) geometrisch verwandt sind, und deren Spannungen wiederum im wesentlichen durch Längskräfte hervorgerufen werden.

Die Lösung ist bei rotationssymmetrischen Schalen mit einer Ellipse als Meridianschnitt am einfachsten ( $\bar{r}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{h}$ ). Sie wird auf eine Halbkugelschale ( $r, s, t, h = \text{const}$ ) bezogen, die mit ihr in folgender Weise geometrisch verwandt ist (Abb. 804):

$$\bar{r} = r, \quad \bar{s} = s, \quad \bar{t} = \kappa t.$$

$$d\bar{x} = dx, \quad d\bar{y} = dy \sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}, \quad d\bar{F} = d\bar{x} \cdot d\bar{y} = dF \sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}. \quad (1172)$$

Wird dann für die Belastung  $g, \bar{g}$  der beiden geometrisch verwandten Schalen nachgewiesen, daß  $gdF = \bar{g}d\bar{F}$ , so ist auch  $N_\beta dy = \bar{N}_\beta d\bar{y}$  und  $N_\alpha dx \sin \alpha = \bar{N}_\alpha d\bar{x} \sin \bar{\alpha}$ , also

$$\bar{N}_\beta = N_\beta \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \bar{N}_\alpha = N_\alpha \frac{dt d\bar{y}}{dy d\bar{t}} = N_\alpha \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}{\kappa} \quad (1173)$$

und für die Spannungen gilt

$$\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha \frac{h}{\bar{h}} \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}{\kappa}, \quad \bar{\sigma}_\beta = \sigma_\beta \frac{h}{\bar{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (1174)$$

Die Lösung gilt für Eigengewicht bei veränderlicher Wanddicke  $\bar{h}$  der geometrisch verwandten Schale, wenn

$$\gamma h dF = \gamma \bar{h} d\bar{F}, \quad \text{also} \quad \bar{h} = \frac{h}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha}} \quad (1175)$$



Die Wanddicke  $\bar{h}$  stimmt also im Scheitel ( $\alpha = 0$ ) mit der Wanddicke  $h$  überein und erreicht am Kämpfer  $\alpha = 90^\circ$  ihren Grenzwert  $\bar{h}^* = h/\kappa$ . Die Wanddicke nimmt also bei abgeplatteten Rotationsschalen ( $\kappa < 1$ ) gegen den Kämpfer zu und bei überhöhten Rotationsschalen ( $\kappa > 1$ ) ab. In beiden Fällen wird das Eigen-gewicht allein durch Längsspannungen abgetragen.

Dasselbe gilt auch bei Schneebelastung, da die Bedingung  $p_s \cos \alpha dF = p_s \cos \bar{\alpha} d\bar{F}$  mit  $d\bar{y}/d\bar{y} = d\bar{F}/dF$  erfüllt ist.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für abgeplattete oder überhöhte Schalen mit ellipsenförmigem Grundriß wiederholen. Ihre geometrische Verwandtschaft zur Halbkugelschale kann z. B. mit  $\bar{r}/r = \lambda$ ,  $\bar{s}/s = 1$ ,  $\bar{t}/t = \kappa$  beschrieben werden.

### 81. Biegesteife rotationssymmetrische Schalen.

Die Spannungen  $\sigma_\alpha(z)$ ,  $\sigma_\beta(z)$  usw. sind nach den Bemerkungen auf S. 744 lineare Funktionen der Dehnungen  $\varepsilon_{0\alpha} \rightarrow \varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_{0\beta} \rightarrow \varepsilon_\beta$  der Mittelfläche und der Krümmungsänderung  $d(1/R_\beta) = \kappa_\alpha$ ,  $d(1/R_\alpha) = \kappa_\beta$  ihrer Hauptschnitte. Sie lassen sich daher zu Schnittkräften zusammenfassen, von denen jedoch die Querkräfte  $Q_{\beta z}$ , die Schnittkräfte  $N_{\alpha\beta}$  und die Drillungsmomente  $M_{\alpha\beta}$  bei rotationssymmetrischer Belastung Null sind. Der Spannungszustand ist daher in diesem Falle durch die folgenden Schnittkräfte bestimmt:

$$\text{Schnitt } \alpha = \text{const: } N_\alpha, M_\alpha, Q_{\alpha z} = Q_\alpha,$$

$$\text{Schnitt } \beta = \text{const: } N_\beta, M_\beta, Q_{\beta z} = 0.$$

Sie werden für  $\sigma_z = 0$  und  $h \ll R_\beta$  nach dem Hookeschen Gesetz ebenso wie auf S. 747 und S. 645 aus der Verzerrung der Mittelfläche berechnet.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= D(\varepsilon_\alpha + \mu \varepsilon_\beta), & N_\beta &= D(\varepsilon_\beta + \mu \varepsilon_\alpha), & D &= \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \\ M_\alpha &= -B(\kappa_\alpha + \mu \kappa_\beta), & M_\beta &= -B(\kappa_\beta + \mu \kappa_\alpha), & B &= \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1176)$$

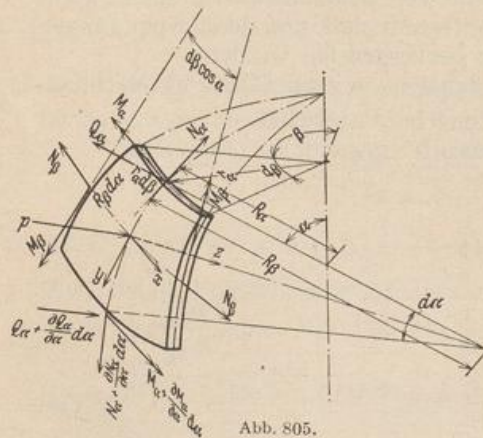


Abb. 805.

Die Verzerrung ( $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $\kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\beta$ ) des differenziellen Abschnitts der Mittelfläche steht mit den Komponenten  $v$ ,  $w$  des Verschiebungszustandes (Abb. 769) nach S. 747 in folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{v' - w}{R_\beta}, & \varepsilon_\beta &= \frac{v \operatorname{ctg} \alpha - w}{R_\alpha}, \\ \vartheta &= \frac{v + w'}{R_\beta}, \\ \kappa_\alpha &= \frac{\vartheta'}{R_\beta}, & \kappa_\beta &= \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \alpha}{R_\alpha}, \\ & & (\cdot)' &= \frac{d(\cdot)}{d\alpha}. \end{aligned} \right\} (1177)$$

Auf diese Weise sind 12 unbekannte Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes durch 9 Bedingungen miteinander verknüpft. Ihre eindeutige Berechnung gelingt in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte an einem differenziellen Schalenteil, die nach Abb. 805 folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} (N_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' - N_\beta R_\beta \cos \alpha - Q_\alpha R_\alpha \sin \alpha + p_y R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0, \\ (Q_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' + N_\alpha R_\alpha \sin \alpha + N_\beta R_\beta \sin \alpha + p_z R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0, \\ (M_\alpha R_\alpha \sin \alpha)' - M_\beta R_\beta \cos \alpha - Q_\alpha R_\alpha R_\beta \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} (1178)$$



Um diese 12 linearen Gleichungen in mathematischer Beziehung übersichtlich zu lösen, wird die Querkraft  $Q_\alpha$  bei der Untersuchung von Schalen mit konstanter Wanddicke  $h$  und veränderlichem Halbmesser  $R_\alpha(\alpha)$  durch die Unbekannte  $V_\alpha = R_\alpha Q_\alpha$  und bei Schalen mit stetig veränderlicher Wanddicke  $h(\alpha)$  durch die Unbekannte  $U_\alpha = Q_\alpha R_\alpha / h^2$  ersetzt. Die Wurzeln des Ansatzes lassen sich dann durch geeignete Verknüpfung der Gleichungen allmählich ausschließen, so daß zwei simultane Differentialgleichungen zwischen den Unbekannten  $V$  oder  $U$  und der Verdrehung  $\vartheta$  der Meridiantangente entstehen, die sich durch gleichartigen Aufbau auszeichnen. Sie lauten in Symbolen

$$\mathfrak{L}(\vartheta) + \vartheta \cdot F_1(\alpha) = -\lambda_1 U, \quad \mathfrak{L}(U) + U \cdot F_2(\alpha) = \lambda_2 \vartheta + \Phi(\alpha), \quad (1179)$$

Die Buchstaben  $\mathfrak{L}(\ )$  bezeichnen Differentialoperationen, die Buchstaben  $F_1(\alpha)$ ,  $F_2(\alpha)$  bekannte, mit der Schalenform vorgeschriebene Funktionen. Die Buchstaben  $\lambda_1, \lambda_2$  sind konstante Größen, die von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängen, während die Funktion  $\Phi(\alpha)$  mit der Belastung  $p_y, p_z$  der Oberfläche verschwindet.

Die vollständige Lösung  $J$  enthält neben der allgemeinen Lösung  $\bar{J}$  der homogenen Gleichungen (1179) mit  $\Phi(\alpha) = 0$  ein partikuläres Integral  $J_0$  des inhomogenen Ansatzes ( $\Phi(\alpha) \neq 0$ ). Dieses stimmt mit großer Genauigkeit mit der Lösung für den Längsspannungszustand der statisch bestimmt abgestützten Schale (Abschn. 80) überein. Daher wird die vollständige Lösung für die biegungssteife Schale durch die Überlagerung der Schnittkräfte  $N_{\alpha,0}, N_{\beta,0}, M_{\alpha,0} = M_{\beta,0} = Q_{\alpha,0} = 0$  aus dem Längsspannungszustand mit den Schnittkräften  $\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\beta, \bar{M}_\alpha, \bar{M}_\beta, \bar{Q}_\alpha$  aus der Randstörung erhalten.

Die allgemeine Lösung des homogenen Ansatzes enthält vier Integrationskonstanten, so daß neben den statischen oder geometrischen Bedingungen des Längsspannungszustandes noch zwei Bedingungen an jedem Schalenrande vorgeschrieben werden können.

- Freier Rand  $U = 0, M_\alpha = 0$ .
- Frei drehbare Lagerung des Schalenrandes  $\Delta r_\alpha = 0, M_\alpha = 0$ .
- Eingespannter Schalenrand  $\Delta r_\alpha = 0, \vartheta = 0$ .
- Bei einer Verbindung des Schalenrandes mit anderen Bauteilen sind die gegenseitige Verschiebung  $\delta_1$  und die gegenseitige Verdrehung  $\delta_2$  der Anschlußflächen Null.

Geckeler, J. W.: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 276. Berlin 1926.

**a) Die Kugelschale mit gleichbleibender Wandstärke.** Die Krümmung der Mittelfläche ist konstant ( $R_\alpha = R_\beta = a$ ). Dasselbe gilt von der Schalendicke  $h$  und daher auch von der Dehnungssteifigkeit  $D$  und der Biegungssteifigkeit  $B$  ( $h = \text{const}, D = \text{const}, B = \text{const}$ ). Unter diesen Umständen lassen sich durch Verknüpfung von (1177) die allgemeinen Beziehungen zwischen den Komponenten des Verschiebungszustandes der Mittelfläche und der Verzerrung des Schalendifferentials folgendermaßen ergänzen:

$$\vartheta = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - \varepsilon'_\beta, \quad d(\ )/d\alpha = ( \ )'. \quad (1180)$$

Die Schnittkräfte unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für  $R_\alpha = R_\beta = a$

$$\left. \begin{aligned} (N_\alpha \sin \alpha)' - N_\beta \cos \alpha - Q_\alpha \sin \alpha + p_y a \sin \alpha &= 0, \\ (Q_\alpha \sin \alpha)' + N_\alpha \sin \alpha + N_\beta \sin \alpha + p_z a \sin \alpha &= 0, \\ M'_\alpha - (M_\beta - M_\alpha) \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1181)$$



Die letzte Bedingung liefert mit (1176), also mit

$$M_\alpha = -\frac{B}{a}(\vartheta' + \mu \vartheta \operatorname{ctg} \alpha), \quad M_\beta = -\frac{B}{a}(\vartheta \operatorname{ctg} \alpha + \mu \vartheta'),$$

$$L(\vartheta) - \mu \vartheta = \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \alpha - \vartheta \operatorname{ctg}^2 \alpha - \mu \vartheta = -\frac{a^2}{B} Q_\alpha. \quad (1182)$$

Aus den anderen beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$N_\alpha = -Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \frac{aF}{\sin^2 \alpha}, \quad N_\beta = \frac{aF}{\sin^2 \alpha} - Q_\alpha - p_z a$$

mit

$$dF/d\alpha = p_z \sin \alpha \cos \alpha + p_y \sin^2 \alpha$$

und daher in Verbindung mit (1176) und (1180)

$$L(Q_\alpha) + \mu Q_\alpha = Q_\alpha'' + Q_\alpha' \operatorname{ctg} \alpha - Q_\alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \mu Q_\alpha = Eh\vartheta - a[p_z' - (1 + \mu)p_y]. \quad (1183)$$

Auf diese Weise ist ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstanden, aus dem jede der beiden Unbekannten durch Wiederholung der Differentialoperation  $L(\ )$  mit einer Differentialgleichung vierter Ordnung berechnet werden kann. Die Partikularlösung  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  der vollständigen Gleichung läßt sich nach E. Meißner für die wesentlichen Belastungsfälle angeben. Z. B. wird bei Eigengewicht mit  $p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$  in (1183)

$$-a[p_z' - (1 + \mu)p_y] = ag(2 + \mu) \sin \alpha.$$

Die simultanen Differentialgleichungen (1182) und (1183) für  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  werden durch den Ansatz  $\vartheta_0 = A_1 \sin \alpha, Q_{\alpha 0} = A_2 \sin \alpha$  erfüllt, wenn

$$A_1 = -\frac{(2 + \mu)a^3 g}{(1 - \mu^2)[1 + 12(a/h)^2]B} = \frac{a^2 A_2}{(1 + \mu)B}.$$

Damit sind  $\vartheta_0, Q_{\alpha 0}$  und in Verbindung mit (1176) auch  $M_{\alpha 0}, M_{\beta 0}$  bestimmt.

$$M_{\alpha 0} = M_{\beta 0} = -\frac{B}{a} A_1 (1 + \mu) \cos \alpha.$$

Diese Schnittkräfte sind im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 770 klein von höherer Ordnung und werden daher vernachlässigt. Mit

$$Q_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\alpha 0} = 0, \quad M_{\beta 0} = 0$$

stimmt der Spannungszustand der biegesteifen Schale bei statisch bestimmter Stützung mit dem Längsspannungszustand auf S. 751 überein. Dasselbe gilt damit auch für den Verschiebungszustand. Das Ergebnis wiederholt sich bei den Partikularlösungen für die anderen rotationssymmetrischen Belastungsfälle.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale lassen sich daher, wie bereits auf S. 767 bemerkt, mit großer Genauigkeit aus zwei voneinander unabhängigen Anteilen zusammensetzen. Der eine besteht aus den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes durch die vorgeschriebene stetige Belastung, der andere aus den Schnittkräften und Verschiebungen der biegesteifen Schale infolge der Randkräfte  $M_{\alpha 2}, Q_{\alpha 2}$  usw., die zur Befriedigung der vorgeschriebenen Stützung notwendig sind.

Die Schnittkräfte und Verschiebungen des Längsspannungszustandes sind für die regelmäßigen Belastungsfälle auf S. 751 ff. angeschrieben. Die Schnittkräfte und Verschiebungen der biegesteifen Kugelschale aus vorgeschriebenen Randkräften werden aus den homogenen Differentialgleichungen (1182), (1183) für  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{Q}_\alpha$  berechnet.

Das Integral der homogenen Gl. (1182), (1183) kann als Reihenentwicklung angeschrieben werden. Die Lösungen für  $\bar{\vartheta}, \bar{Q}_\alpha$  und für alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen klingen vom Rande aus schnell ab. Da jede Ableitung im



Vergleich zu der nächst höheren Ableitung dann klein von zweiter Ordnung ist, können nach einem Vorschlage von J. W. Geckeler die Funktionen  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{\vartheta}'$  gegenüber  $\bar{\vartheta}''$  in (1182) und die Funktionen  $\bar{Q}_\alpha$  und  $\bar{Q}_\alpha'$  gegenüber  $\bar{Q}_\alpha''$  in (1183) vernachlässigt werden, um schnell zu einer übersichtlichen, für technische Aufgaben brauchbaren Näherungslösung zu kommen.

Die Näherungslösung für  $\bar{\vartheta}(\alpha)$  und  $\bar{Q}(\alpha)$  entsteht also aus den Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\frac{a^2}{B} \bar{Q}_\alpha, \quad \bar{Q}_\alpha'' = E h \bar{\vartheta}. \quad (1184)$$

Die Elimination von  $\bar{Q}_\alpha$  liefert mit

$$4 k^4 = \frac{a^2}{B} E h = \frac{12(1-\mu^2)a^2}{h^2}, \quad k = \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad (1185)$$

$$\bar{\vartheta}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{\vartheta} = 0. \quad (1186)$$

Durch Elimination von  $\bar{\vartheta}$  entsteht

$$\bar{Q}_\alpha^{IV} + 4 k^4 \bar{Q}_\alpha = 0. \quad (1187)$$

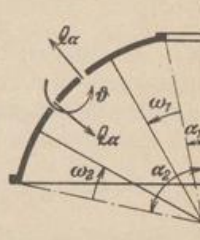


Abb. 806.

Die Gleichungen werden mit dem aus Abschn. 22 bekannten Exponentialansatz gelöst. Da hiernach beide Funktionen  $\bar{\vartheta}$ ,  $\bar{Q}_\alpha$  ebenso wie alle daraus abgeleiteten Schnittkräfte und Verschiebungen schnell vom Rande aus abklingen, werden sie je nach der Betrachtung der oberen oder unteren Randzone auf den Winkel  $\omega_1 = (\alpha - \alpha_1)$ ,  $d\omega_1 = d\alpha$  oder  $\omega_2 = (\alpha_2 - \alpha)$ ,  $d\omega_2 = -d\alpha$  als unabhängiger Veränderlicher bezogen (Abb. 806). Daher ist in beiden Fällen

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta} &= e^{-k\omega} (\bar{A}_1 \cos k\omega + \bar{A}_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (\bar{A}_3 \cos k\omega + \bar{A}_4 \sin k\omega), \\ \bar{Q}_\alpha &= e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) + e^{k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega), \end{aligned} \right\} (1188a)$$

oder nach S. 141 auch

$$\bar{Q}_\alpha = C_1 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi_1) + C_2 e^{k\omega} \cos(k\omega + \psi_2). \quad (1188b)$$

Die Integrationskonstanten  $\bar{A}_3, \bar{A}_4$  und  $A_3, A_4$  oder  $C_2, \psi_2$  einer Lösung für die geschlossene Kugelschale mit  $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$  als unabhängiger Veränderlicher sind Null, da die Bedingungen  $\vartheta = 0, Q_\alpha = 0$  im Scheitel nur auf diese Weise erfüllt werden können. Die Funktion  $\vartheta(\omega)$  und  $Q_\alpha(\omega)$  verlaufen daher ebenso wie alle abgeleiteten Funktionen der übrigen Schnittkräfte und Verschiebungen nach gedämpften Schwingungen mit dem Winkel  $2\pi/k$  als Schwingungslänge und  $\pi$  als logarithmischem Dekrement. Sie klingen mit wachsendem  $\omega$  um so schneller ab, je größer  $k$  ist. Der Einfluß der von den Randstörungen des Längsspannungszustandes herrührenden Randkräfte  $M_{\alpha_2}, Q_{\alpha_2}$  ist daher auf eine schmale Randzone beschränkt. Das Ergebnis läßt sich auch leicht auf Grund des St. Venantschen Prinzips einsehen, da die Randkräfte im Gleichgewicht stehen. Es bestätigt die Richtigkeit der Annahmen für die Näherungslösung, da die zweiten Ableitungen  $\bar{\vartheta}'', \bar{Q}_\alpha''$  den Betrag  $k^2$  als Faktor enthalten, und daher als Glieder des linearen Ansatzes (1182) oder (1183) wesentlich größere Bedeutung besitzen als  $\bar{\vartheta}', \bar{\vartheta}$  oder  $\bar{Q}_\alpha', \bar{Q}_\alpha$ .

Die Lösung  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{Q}_\alpha$  offener Schalen nach (1187) enthält streng genommen vier Integrationskonstante, die aus vier Bedingungen für die Verschiebungen oder für die Schnittkräfte an den beiden Schalenrändern berechnet werden können. Ist die Schalenzone  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  jedoch breit, so klingen die von jeder Randbelastung herrührenden Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes so weit ab, daß je zwei Integrationskonstante  $A_1, A_2$  und  $A_3, A_4$  oder  $C_1, \psi_1$  und  $C_2, \psi_2$  unabhängig voneinander aus

$$\bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_1 \cos k\omega + A_2 \sin k\omega) \quad \text{und} \quad \bar{Q}_\alpha = e^{-k\omega} (A_3 \cos k\omega + A_4 \sin k\omega) \quad (1189)$$



angegeben werden können, je nachdem der Breitenunterschied  $\omega_2 = \alpha_2 - \alpha$  oder  $\omega_1 = \alpha - \alpha_1$  vom unteren oder oberen Rande gerechnet wird.

Rechenvorschrift. Im Bereiche des oberen Randes der offenen Kugelschale ist

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_1} \cos(k\omega_1 + \psi) \quad (1190)$$

im Bereiche des unteren Randes

$$\bar{Q}_\alpha = C e^{-k\omega_2} \cos(k\omega_2 + \psi). \quad (1191)$$

Die Gleichungen bilden die Grundlage für die Berechnung aller Komponenten des Spannungs- und Formänderungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen (1181) und den Verträglichkeitsbedingungen (1177). Das obere Vorzeichen gilt in der oberen, das untere in der unteren Randzone der Schale.

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_\alpha &= -\bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha = -C e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \bar{N}_\beta &= -\bar{Q}_\alpha = \pm C k \sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{\vartheta} &= \frac{\bar{Q}'_\alpha}{hE} = +C \frac{2k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi), \\ \bar{M}_\alpha &= -\frac{B}{a} (\bar{\vartheta}' + \mu \bar{\vartheta} \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{B}{a} \bar{\vartheta}' = \mp C \frac{B}{ahE} 2k^3 \sqrt{2} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right), \\ \bar{M}_\beta &= \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}, \\ \bar{\Delta r} &= r_\alpha \bar{\varepsilon}_\beta = \frac{r_\alpha}{hE} (\bar{N}_\beta - \mu \bar{N}_\alpha) = -\frac{r_\alpha}{hE} (\bar{Q}'_\alpha - \mu \bar{Q}_\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \approx -\frac{r_\alpha \bar{Q}'_\alpha}{hE}. \end{aligned} \right\} (1192)$$

Die Näherungslösungen für  $\bar{M}_\alpha$  und  $\bar{\varepsilon}_\beta$  lassen sich ebenso begründen wie die Vernachlässigung von  $\bar{Q}_\alpha$  neben  $\bar{Q}'_\alpha$  in (1183).

Die Integrationskonstanten  $C, \psi$  sind bei starrem Unterbau durch die Stützung der Schale, am oberen Rande durch vorgeschriebene äußere Kräfte bestimmt.

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt

$$\left. \begin{aligned} \omega = 0, \alpha = \alpha_2: \quad \varepsilon_{\beta 2,0} + \bar{\varepsilon}_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2} = 0, \\ M_{\alpha 2,0} + \bar{M}_{\alpha 2} = M_{\alpha 2} = 0 = \bar{M}_{\alpha 2}, \end{aligned} \right\} (1193)$$

wenn die Dehnungen des Längsspannungszustandes wieder mit  $\varepsilon_{\beta,0}$  bezeichnet werden. Die Biegemomente  $M_{\alpha,0}$  sind Null.

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha 2} = C \frac{B}{ahE} 2k^3 \sqrt{2} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } \psi = \frac{\pi}{4}, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{hE} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad \text{d. h. } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h \sqrt{2}} hE. \end{aligned} \right\} (1194)$$

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.  $\omega = 0, \alpha = \alpha_2$ .

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 = \vartheta_{2,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin \psi = 0, \\ \varepsilon_{\beta 2} = \varepsilon_{\beta 2,0} - C \frac{k \sqrt{2}}{hE} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \text{für } \vartheta_{2,0} \approx 0 \text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = \frac{\varepsilon_{\beta 2,0}}{h} hE. \end{aligned} \right\} (1195)$$

3. Der obere Rand ist durch einen starren Druckring abgeschlossen.  $\omega = 0, \alpha = \alpha_1$ .



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\beta 1} &= \varepsilon_{\beta 1,0} + C \frac{k\sqrt{2}}{hE} \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \vartheta_1 &= \vartheta_{1,0} + C \frac{2k^2}{hE} \sin\psi = 0, \\ \text{für } \vartheta_{1,0} &\approx 0 \text{ ist } \psi = 0 \text{ und } C = -\frac{\varepsilon_{\beta 1,0}}{k} hE. \end{aligned} \right\} \quad (1196)$$

Damit sind in Verbindung mit (1192) auch alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes aus einer Randstörung der statisch bestimmt gestützten Schale bekannt (S. 766). Sie werden mit den zugeordneten Komponenten des Längsspannungszustandes überlagert.

**Biegungsspannungen am Rand einer Kugelschale bei Belastung durch Eigengewicht.**  
(Vgl. Abb. 777,  $\alpha_2 = 60^\circ$ .)

1. Der untere Rand ist unverschieblich, aber frei drehbar gestützt. Nach (1123) ist für den Längsspannungszustand

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{1}{Eh} (N_{\beta,0} - \mu N_{\alpha,0}) = \frac{ag}{Eh} \frac{1 + \mu - \cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad \text{und mit } \mu = \frac{1}{6}, \alpha \rightarrow \alpha_2$$

$$\varepsilon_{\beta,0} = \frac{ag}{Eh} \frac{1,1667 - 0,5 - 0,25}{1 + 0,5} = 0,278 \frac{ag}{Eh}.$$

Für  $a/h = 200$  ist nach (1185)

$$k = \sqrt{200 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 18,49,$$

so daß nach (1194)

$$C = ag \frac{0,278}{k\sqrt{2}} = 0,01064 ag, \quad \psi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun

$$\bar{N}_\alpha = -0,01064 ag e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right) \text{ctg}\alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,278 ag e^{-k\omega} \cos(k\omega),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,0815 ag h e^{-k\omega} \sin(k\omega),$$

$$\frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00311 ag h \text{ctg}\alpha e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \text{ctg}\alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Längskräfte  $\bar{N}_\alpha$  sind gegenüber  $N_{\alpha,0}$  aus dem Längsspannungszustand zu vernachlässigen. Die Längskräfte  $N_\beta = N_{\beta,0} + \bar{N}_\beta$  sind in Abb. 807a für die Randzone  $50^\circ < \alpha < 60^\circ$  dargestellt. Abb. 807b zeigt die Biegemomente der Randzone.

2. Der untere Rand ist starr eingespannt.

Für den Längsspannungszustand ist nach (1123) und (1126)

$$\varepsilon_{\beta,0} = 0,278 \frac{ag}{Eh}, \quad \vartheta_{2,0} = -\frac{ag}{Eh} (2 + \mu) \sin\alpha_2 = -1,878 \frac{ag}{Eh}.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten dann mit  $C = C_1 ag$

$$-1,878 + C_1 \cdot 683 \sin\psi = 0,$$

$$0,278 - C_1 26,12 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

oder

$$-49 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 190,1 \sin\psi = 0,$$

$$\text{tg}\psi = \frac{49}{190,1\sqrt{2} - 49} = 0,223, \quad \psi = 12^\circ 30' \equiv 0,2182,$$

$$C_1 = \frac{1,878}{683 \sin\psi} = 0,0127, \quad C = 0,0127 ag.$$

(Für  $\vartheta_{2,0} \approx 0$  ist  $\psi = 0$ ,  $C \approx 0,0151 ag$ .)

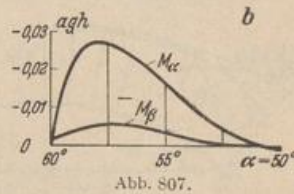
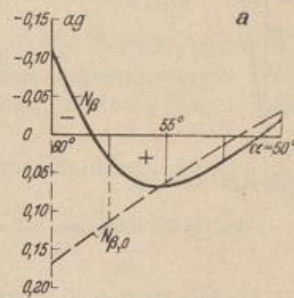
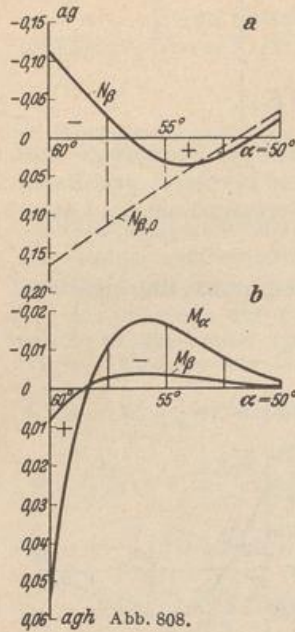


Abb. 807.



Die Schnittkräfte nach (1192) infolge der Randstörung werden nun



$$\bar{N}_\alpha = -0,0127 a g e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = -0,332 a g e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = 0,0973 a g h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = 0,00372 a g h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind für die Randzone  $50^\circ < \alpha < 60^\circ$  in Abb. 808 dargestellt.

**Schnittkräfte in einem Stützboden bei Wasserauflast  $f = 2a$ .**  
(Vgl. Abb. 781,  $\alpha_2 = 40^\circ$ .)

Der Rand der Schale ist starr eingespannt.

Nach (1132) ist mit  $f = 2a$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $\alpha_2 = 40^\circ$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta 2,0} &= -\frac{1}{Eh} \frac{\gamma a^2}{6} \left[ 3 \frac{f}{a} (1 - \mu) - 6 \cos \alpha_2 + 2(1 + \mu) \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right] \\ &= -0,585 \frac{\gamma a^2}{Eh}, \end{aligned}$$

$$\vartheta_{2,0} = \frac{\gamma a^2}{Eh} \sin \alpha_2 = 0,643 \frac{\gamma a^2}{Eh}$$

Aus (1185) folgt mit  $a/h = 25$

$$k = \sqrt{25 \sqrt{3} \cdot 0,9722} = 6,53.$$

Die Randbedingungen (1195) lauten nunmehr mit  $C = C_1 \gamma a^2$

$$0,643 + C_1 85,3 \sin \psi = 0,$$

$$-0,585 - C_1 9,22 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

oder

$$-5,93 \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) + 49,9 \sin \psi = 0,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{5,93}{49,9 \sqrt{2} - 5,93} = 0,0917,$$

$$\psi = 5^\circ 14' \equiv 0,0915,$$

$$C_1 = -0,0826, \quad C = -0,0826 \gamma a^2.$$

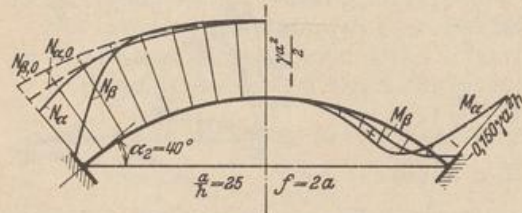


Abb. 809. Schnittkräfte im eingespannten Stützboden.

(Für  $\vartheta_{2,0} \approx 0$  ist  $\psi = 0$ ,  $C \approx -0,0896 \gamma a^2$ .)

Die Schnittkräfte infolge der Randstörung sind nach (1192)

$$\bar{N}_\alpha = 0,0826 \gamma a^2 e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\bar{N}_\beta = 0,762 \gamma a^2 e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\bar{M}_\alpha = -0,223 \gamma a^2 h e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta} = -0,0242 \gamma a^2 h \operatorname{ctg} \alpha e^{-k\omega} \sin(k\omega + \psi),$$

$$\bar{M}_\beta = \mu \bar{M}_\alpha - \frac{B \operatorname{ctg} \alpha}{a} \bar{\vartheta}.$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 809 dargestellt.

Verbindung einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken. Der Spannungszustand eines elastischen Gebildes aus einer Kugelschale mit verwandten Tragwerken erfährt keine Änderung, wenn die Verbindung am Anschluß der Kugel-



schale durch einen Breitenschnitt gelöst wird und die inneren Kräfte an beiden Ufern als äußere Kräfte zur Belastung hinzutreten. Diese sind rotationssymmetrisch, die Längskraft  $N_\alpha$  nach S. 745 aus den Gleichgewichtsbedingungen bekannt, die Querkraft  $Q_\alpha$  oder ihre waagerechte Komponente  $H = X_1$  und das Anschlußmoment  $M_\alpha = X_2$  statisch unbestimmt. Sie lassen sich aus der Bedingung berechnen, daß die gegenseitige Verschiebung  $\delta_1$  (positiv im Sinne von  $X_1$ ) und die gegenseitige Verdrehung  $\delta_2$  (positiv im Sinne von  $X_2$ ) der beiden Ufer des Breitenschnittes Null sein müssen, wenn die Formänderung des vorgegebenen Flächentragwerks mit der Formänderung des Hauptsystems durch die Belastung und die überzähligen Schnittkräfte  $X_1, X_2$  übereinstimmt. Diese wird ebenso wie in Abschn. 24 als virtuelle Arbeit berechnet. Nach Abb. 810 ist

$$I_1 \delta_1 = I_1 (\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}) = 0,$$

$$I_2 \delta_2 = I_2 (\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}) = 0.$$

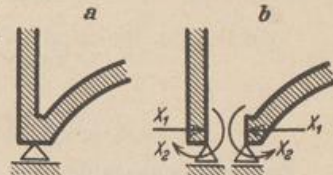


Abb. 810.

Jede Komponente  $\delta_{10}, \delta_{11}$  usw. des Verschiebungszustandes besteht aus zwei Teilen ( $\delta_{10} = \delta_{10,1} + \delta_{10,2}$ ,  $\delta_{11} = \delta_{11,1} + \delta_{11,2}$  usw.), von denen  $\delta_{10,1}, \delta_{11,1}$  usw. durch die Formänderung der Kugelschale,  $\delta_{10,2}, \delta_{11,2}$  usw. durch die Formänderung des angeschlossenen Tragwerks, also durch die Formänderung torsionssteifer Ringe, Platten, Kegel- oder Zylinderschalen hervorgerufen werden.

Die Vorzahlen  $\delta_{11,1}, \delta_{12,1}$  werden aus (1192) für die Randbedingungen der Abb. 810 berechnet.

1. Belastungszustand  $X_1 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,1} = 0, \quad Q_{\alpha 2,1} = -\sin \alpha_2; \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad C = -\sqrt{2} \sin \alpha_2.$$

$$\delta_{11,1} = \frac{2k a}{E h} \sin^2 \alpha_2, \quad \delta_{21,1} = -\frac{2k^2}{E h} \sin \alpha_2. \quad (1197)$$

Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,1} &= \sqrt{2} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,1} &= 2k \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ \vartheta_{\alpha,1} &= -\frac{2\sqrt{2}k^2}{hE} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ M_{\alpha,1} &= \frac{kh}{\sqrt{3}(1-\mu^2)} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \sin(k\omega), \\ Q_{\alpha,1} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin \alpha_2 \cos \left( k\omega + \frac{\pi}{4} \right), \\ \Delta r_{\alpha,1} &= \frac{2ka}{Eh} \sin \alpha_2 e^{-k\omega} \cos(k\omega) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (1198)$$

2. Belastungszustand  $X_2 = 1$  (Abb. 810).

Randbedingungen:

$$M_{\alpha 2,2} = -1, \quad Q_{\alpha 2,2} = 0; \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{ahE}{2k^3 B}.$$

$$\delta_{22,1} = \frac{a}{kB}, \quad \delta_{12,1} = -\frac{a^2}{2k^2 B} \sin \alpha_2 = -\frac{2k^2}{Eh} \sin \alpha_2. \quad (1199)$$



Schnittkräfte nach (1192).

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha,2} &= \frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega) \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_{\beta,2} &= -\frac{a h E}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ \vartheta_{\alpha,2} &= \frac{a}{k B} e^{-k\omega} \cos(k\omega), \\ M_{\alpha,2} &= -\sqrt{2} e^{-k\omega} \sin\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right), \\ Q_{\alpha,2} &= -\frac{a h E}{2 k^3 B} e^{-k\omega} \sin(k\omega), \\ \Delta r_{\alpha,2} &= -\frac{a^2}{\sqrt{2} k^3 B} e^{-k\omega} \sin \alpha \cos\left(k\omega + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} (1200)$$

Die Belastungszahlen  $\delta_{10,1}$ ,  $\delta_{20,1}$  gelten für die nach Abb. 810 b abgestützte Kugelschale. Ihr Spannungszustand ist statisch unbestimmt, da die Stützkkräfte nicht tangential zur Mittelfläche eingetragen werden. Hierzu ist noch eine Schubkraft  $H = -N_{\alpha} \cos \alpha$  notwendig (vgl. S. 752). Die Belastungszahlen werden daher in die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  für die statisch bestimmt gestützte Kugelschale und die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  für die Kugelschale mit den Randkräften  $X_1 = H$ ,  $X_2 = 0$  zerlegt. Die Anteile  $\bar{\delta}_{10,1}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1}$  sind nahezu die gleichen wie beim Membranzustand und daher nach S. 751 ff. bekannt. Die Anteile  $\delta'_{10,1}$ ,  $\delta'_{20,1}$  sind mit (1197)

$$\delta'_{10,1} = H \delta_{11,1}, \quad \delta'_{20,1} = H \delta_{21,1}. \quad (1201)$$

Damit lauten die vollständigen Belastungszahlen

$$\delta_{10,1} = \bar{\delta}_{10,1} + \delta'_{10,1}, \quad \delta_{20,1} = \bar{\delta}_{20,1} + \delta'_{20,1}.$$

Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916. — Lichtenstern, E.: Die biegefesten Kugelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 347.



Abb. 811.

**b) Die biegegesteife Kegelschale mit gleichbleibender Wandstärke.** Der Krümmungshalbmesser  $R_{\beta}$  ist unendlich, der Winkel  $\alpha$  konstant und daher nicht mehr als ortsbestimmende Koordinate geeignet. Er wird durch den Abschnitt  $y$  der Mantellinie ersetzt, so daß  $ds = R_{\beta} d\alpha = dy$ ,  $R_{\alpha} = y \operatorname{ctg} \alpha$ . Damit lassen sich die allgemeinen Beziehungen (1176), (1177) zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes mit ( )' für  $d( )/dy$  folgendermaßen anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\nu} = v', \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\nu} = \vartheta', \\ \kappa_{\beta} = \frac{\vartheta}{y}, \quad \vartheta = w', \end{aligned} \right\} (1202)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{\nu} = D \left( v' + \mu \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} \right), \quad N_{\beta} = D \left( \frac{v - w \operatorname{tg} \alpha}{y} + \mu v' \right), \quad D = \frac{h E}{1 - \mu^2}, \\ M_{\nu} = -B \left( \vartheta' + \mu \frac{\vartheta}{y} \right), \quad M_{\beta} = -B \left( \mu \vartheta' + \frac{\vartheta}{y} \right), \quad B = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1203)$$

Belastung und Schnittkräfte eines differentialen Schalenabschnitts unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178). Sie lauten für die Längskräfte

$$(N_{\nu} y)' - N_{\beta} + p_{\nu} y = 0 \quad \text{und} \quad (Q_{\nu} y)' + N_{\beta} \operatorname{tg} \alpha + p_z y = 0 \quad (1204)$$

oder in einer Gleichung zusammengefaßt und integriert

$$(N_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + Q_{\nu}) y + \int (p_{\nu} \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c = 0. \quad (1205)$$



Dazu tritt

$$(M_y y)' - M_\beta - Q_y y = 0 \quad \text{oder} \quad y M_y' + M_y - M_\beta - Q_y y = 0. \quad (1206)$$

Aus dieser wird mit (1203)

$$y \vartheta'' + \vartheta' - \frac{\vartheta}{y} = -\frac{Q_y y}{B}. \quad (1207)$$

Durch die Verknüpfung der Beziehungen (1202) entsteht

$$(y \varepsilon_\beta)' = \varepsilon_y - \vartheta \operatorname{tg} \alpha. \quad (1208)$$

Die Dehnungen  $\varepsilon_\beta$  und  $\varepsilon_y$  werden aus (1104) berechnet. Hierin ist nach (1204)

$$N_\beta = -(Q_y y)' \operatorname{ctg} \alpha - p_z y \operatorname{ctg} \alpha, \\ N_y = -Q_y \operatorname{ctg} \alpha - \frac{F}{y} \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{mit} \quad F(y) = \int (p_y \operatorname{tg} \alpha + p_z) y dy + c.$$

Damit  $N_y$  für  $y = 0$  endlich bleibt, ist die Integrationskonstante  $c$  für die geschlossene Kegelschale Null. Auf diese Weise kann aus (1208) die folgende zu (1207) simultane Differentialgleichung entwickelt werden:

$$\left. \begin{aligned} y(Q_y y)'' + (Q_y y)' - \frac{(Q_y y)}{y} &= h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \vartheta + \Phi(y) \\ \text{mit} \quad \Phi(y) &= \frac{F(y)}{y} + \mu y p_y \operatorname{tg} \alpha - (p_z y^2)' \end{aligned} \right\} \quad (1209)$$

Die Lösung  $\vartheta, Q_y$  besteht aus dem allgemeinen Integral der beiden homogenen Gleichungen (1207) und (1209) und aus einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichungen, das sich für Eigengewicht  $p_y = g \sin \alpha$ ,  $p_z = g \cos \alpha$  folgendermaßen entwickeln läßt:

$$F(y) = \frac{g y^2}{2 \cos \alpha}, \quad \Phi(y) = (1 + 2\mu \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha) \frac{g y}{2 \cos \alpha} = g_1 y. \quad (1210)$$

Wird  $Q_{y0} = 0$  und  $\vartheta_0 = A_1 y$  angenommen, so ergeben

$$A_1 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E}, \quad \vartheta_0 = -\frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{h E} y \quad (1211)$$

eine partikuläre Lösung von (1207), (1209). Aus dieser folgt mit (1203)

$$Q_{y0} = 0, \quad M_{y0} = M_{\beta 0} = \frac{g_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \mu} \cdot \frac{h^2}{12} = \text{const.} \quad (1212)$$

Die Biegungsspannungen einer statisch bestimmt gestützten Kegelschale (Abb. 786) sind also im Vergleich zu dem Anteil aus den Randstörungen nach S. 776 klein von höherer Ordnung. Der Spannungs- und Verschiebungszustand kann daher durch die Angaben auf S. 756 ff. für den Längsspannungszustand beschrieben werden. Das gleiche gilt von allen rotationssymmetrischen Belastungsfällen.

Die Integration der homogenen simultanen Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} y \bar{\vartheta}'' + \bar{\vartheta}' - \frac{\bar{\vartheta}}{y} &= -\frac{\bar{Q}_y y}{B}, & y(\bar{Q}_y y)'' + (\bar{Q}_y y)' - \frac{(\bar{Q}_y y)}{y} &= h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (1213)$$

oder

$$y^2 \bar{Q}_y'' + 3y \bar{Q}_y' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta}$$

kann nach den Bemerkungen auf S. 769 vereinfacht werden, da die Funktionen  $\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}'$  und  $\bar{Q}_y, \bar{Q}_y'$  im Vergleich zu den Ableitungen  $\bar{\vartheta}'' \bar{Q}_y''$  klein von zweiter Ordnung sind. Der elastische Zusammenhang läßt sich daher mit großer Genauigkeit durch die Gleichungen

$$\bar{\vartheta}'' = -\bar{Q}_y/B, \quad y^2 \bar{Q}_y'' = h E \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \bar{\vartheta} \quad (1214)$$



beschreiben, so daß entweder  $\bar{\vartheta}$  oder  $\bar{Q}_y$  eliminiert und aus einer der folgenden Gleichungen berechnet werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta}^{IV} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B y^2} \bar{\vartheta} &= 0, & (y^2 \bar{Q}_y'')' + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B} \bar{Q}_y &= 0 \\ \text{oder} & & (y V'')' + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B y} V &= 0 \quad \text{mit} \quad y \bar{Q}_y = \bar{V}. \end{aligned} \right\} \quad (1215)$$

Die erste Gleichung stimmt bis auf den Beiwert  $hE \operatorname{tg}^2 \alpha / B y^2 = 4k^4 = 4/L^4$  mit (1186) überein. Dieser ist im Vergleich zu (1185) nicht mehr konstant, sondern eine mit  $y$  veränderliche, vorgeschriebene Funktion. Da die Integration aus diesem Grunde in der Regel Schwierigkeiten bereitet, zerlegt man den Bereich  $l-a$  nach J. W. Geckeler durch Breitenschnitte in Zonen mit annähernd konstantem  $L$  und begnügt sich mit dieser Näherungslösung. Dabei kann die Vorzahl  $4/L^4$  in den beiden Randzonen mit  $y=a$  oder  $y=l$  gebildet werden. Die ortsbestimmende Koordinate des Winkels  $\vartheta$  wird auf den oberen Rand ( $s_1 = y - a$ ,  $ds_1 = dy$ ) oder auf den unteren Rand ( $s_2 = l - y$ ,  $ds_2 = -dy$ ) bezogen, je nachdem die Untersuchung den Spannungen am oberen oder unteren Rande gilt (Abb. 812). Die Gleichungen (1215) lauten also

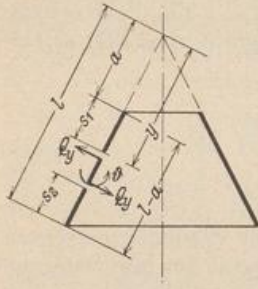


Abb. 812.

$$\frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds_1^4} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B a^2} \bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds_2^4} + \frac{hE \operatorname{tg}^2 \alpha}{B l^2} \bar{\vartheta} = 0$$

oder mit

$$\frac{1}{L_1^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \text{und} \quad \frac{1}{L_2^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{l^2 h^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1216)$$

allgemein

$$\frac{d^4 \bar{\vartheta}}{ds^4} + \frac{4}{L^4} \bar{\vartheta} = 0 \quad \text{und mit} \quad \frac{s}{L} = \eta \quad \text{auch} \quad \frac{d^4 \bar{\vartheta}}{d\eta^4} + 4 \bar{\vartheta} = 0. \quad (1217)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist auf S. 769 erörtert worden. Sie enthält vier Integrationskonstante, von denen bei geschlossener Kegelschale  $C_2$ ,  $\psi_2$  wiederum Null sind, da die Verdrehung  $\bar{\vartheta}$  und die Querkraft  $\bar{Q}_y$  aus Symmetriegründen an der Spitze Null sein müssen. Die Lösung der Differentialgleichung lautet dann  $\bar{\vartheta} = e^{-\eta}(A_1 \cos \eta + A_2 \sin \eta)$  oder  $\bar{\vartheta} = e^{-\eta} C_1 \cos(\eta + \psi_1)$ ,  $\eta = s_2/L_2$ . (1218)

Die Integrationskonstanten  $A_1$ ,  $A_2$  oder  $C_1$ ,  $\psi_2$  sind durch die Randbedingungen bestimmt.

a) Frei drehbare, unverschiebliche Stützung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0, \quad \vartheta' = \vartheta'_0 + \bar{\vartheta}' = 0. \quad (1219)$$

b) Starre Einspannung des Randes:

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta 0} + \bar{\varepsilon}_\beta = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta} = 0. \quad (1220)$$

Mit  $\bar{\vartheta}$  sind auch die Schnittkräfte aus der statisch unbestimmten Stützung der Kegelschale bekannt (1203).

$$\bar{M}_y = -B \bar{\vartheta}', \quad \bar{M}_\beta = -B(\mu \bar{\vartheta}' + \bar{\vartheta}/y), \quad \bar{Q}_y = -B \bar{\vartheta}'', \quad \bar{N}_y = -\bar{Q}_y \operatorname{ctg} \alpha, \quad \bar{N}_\beta = (\bar{N}_y y)'. \quad (1221)$$

Sie klingen um so schneller vom Rande aus ab, je größer  $\eta$  ist, und bilden zusammen mit den Schnittkräften des Längsspannungszustandes aus der Belastung (S. 756 ff.) das endgültige Ergebnis.

$$M_y = \bar{M}_y, \quad N_y = N_{y0} + \bar{N}_y, \quad \text{usw.} \quad (1222)$$



Die Gleichung (1218) dient auch zur Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der Kegelschale für eine vorgeschriebene Belastung durch Randkräfte  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  (Abb. 813 u. 814). Das Ergebnis wird bei der Berechnung von zusammengesetzten elastischen Tragwerken (Abb. 825 u. 828) verwendet.

a) Unterer Rand (Abb. 813).

Belastung  $X_1 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2L^2}{L_2 E h} \cos^2 \alpha, & \delta_{21} &= -\frac{L_2^2}{2B} \sin \alpha, \\ \bar{\vartheta} &= -\frac{L_2^2}{2B} e^{-\eta_2} \sin \alpha (\sin \eta_2 + \cos \eta_2), \\ \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_2 E h} e^{-\eta_2} \cos \eta_2, \\ \bar{M}_y &= L_2 e^{-\eta_2} \sin \alpha \sin \eta_2, \\ \bar{Q}_y &= e^{-\eta_2} \sin \alpha (\sin \eta_2 - \cos \eta_2). \end{aligned} \right\} (1223)$$

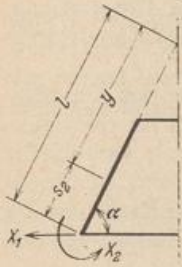


Abb. 813.



Abb. 814.

Belastung  $X_2 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= -\frac{L_2^2}{2B} \sin \alpha, & \delta_{22} &= \frac{L_2}{B}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_2}{B} e^{-\eta_2} \cos \eta_2, & \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_2^2 E h \sin \alpha} e^{-\eta_2} (\sin \eta_2 - \cos \eta_2), \\ \bar{M}_y &= -e^{-\eta_2} (\sin \eta_2 + \cos \eta_2), & \bar{Q}_y &= -\frac{2}{L_2} e^{-\eta_2} \sin \eta_2. \end{aligned} \right\} (1224)$$

b) Oberer Rand (Abb. 814).

Belastung  $X_1 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2a^2}{L_1 E h} \cos^2 \alpha, & \delta_{21} &= \frac{L_1^2}{2B} \sin \alpha, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_1^2}{2B} e^{-\eta_1} \sin \alpha (\sin \eta_1 + \cos \eta_1), & \Delta \bar{r}_z &= \frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_1 E h} e^{-\eta_1} \cos \eta_1, \\ \bar{M}_y &= L_1 e^{-\eta_1} \sin \alpha \sin \eta_1, & \bar{Q}_y &= -e^{-\eta_1} \sin \alpha (\sin \eta_1 - \cos \eta_1). \end{aligned} \right\} (1225)$$

Belastung  $X_2 = 1$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{L_1^2}{2B} \sin \alpha, & \delta_{22} &= \frac{L_1}{B}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{L_1}{B} e^{-\eta_1} \cos \eta_1, & \Delta \bar{r}_z &= -\frac{2y^2 \cos^2 \alpha}{L_1^2 E h \sin \alpha} e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 - \cos \eta_1), \\ \bar{M}_y &= e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 + \cos \eta_1), & \bar{Q}_y &= -\frac{2}{L_1} e^{-\eta_1} \sin \eta_1. \end{aligned} \right\} (1226)$$

Werden die Randkräfte  $X_1$ ,  $X_2$ , mit einem anderen Richtungssinn als in Abb. 813 und 814 festgelegt, verwendet, so sind die Vorzeichen in (1223) bis (1226) entsprechend abzuändern. Für die Belastungszahlen gelten die Bemerkungen auf S. 774. (Vgl. auch die Beispiele auf S. 786 ff.)

Um die Näherungslösung (1218) mit konstantem  $L$  nach S. 776 zu verbessern, wird die Gleichung (1217) schrittweise für schmale, etwa 0,5 m breite Zonen  $k-1$ ,  $k$  und Mittelwerte  $1/L_k$  usw. aus den Abmessungen der Zonen angeschrieben. Zur Berechnung der Integrationskonstanten der Gleichung für die Randzone 1 dienen die Stützenbedingungen. Die Gleichung (1218) liefert die Randbedingungen für die Lösung der zweiten Zone. Die einzelnen Schritte der Rechenvorschrift sind also voneinander unabhängig, so daß keine mathematischen Schwierigkeiten entstehen.

Die allgemeine Lösung (1188b) der Differentialgleichung für die offene Kegelschale mit den Breitenkreisen  $r_1$ ,  $r_2$  enthält vier Integrationskonstante  $C_1$ ,  $\psi_1$  und  $C_2$ ,  $\psi_2$ , die aus den vier Bedingungsgleichungen für den Ver-

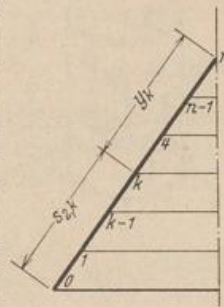


Abb. 815.



schiebungs- und Spannungszustand an den beiden Rändern bestimmt werden müssen. Da jedoch die Wirkung aus den Randstörungen schnell abklingt, genügt bei offenen Kegelschalen mit  $5r_1 < r_2$  eine Näherungslösung, bei welcher die Integrationskonstanten  $C_1, \psi_1$  zunächst ebenso wie bei der geschlossenen Kegelschale für  $C_2 = 0, \psi_2 = 0$  bestimmt werden, um sie bei der Berechnung der Integrationskonstanten  $C_2, \psi_2$  aus der vollständigen Lösung mit den Bedingungen am Rande  $y = a$  zu verwenden.

Um die elastischen Eigenschaften der Kegelschale mit denjenigen der Zylinderschale zu vergleichen, können die allgemeinen Differentialgleichungen für die Spannungen und Verschiebungen auf S. 774 nach F. Kann auch dadurch vereinfacht werden, daß die Biegesteifigkeit der Schale im Breitenchnitt, die Querspannung des Baustoffs und die Verschiebung  $v$  des Breitenchnittes in Richtung der  $y$ -Achse vernachlässigt werden ( $M_\beta = 0, \mu = 0, v = 0$ ). In diesem Falle folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen auf S. 774

$$\left. \begin{aligned} (M_y y)'' = (Q_y y)' = -N_\beta \operatorname{tg} \alpha - p_z y \quad \text{und mit } N_\beta = -D \frac{w}{y} \operatorname{tg} \alpha \\ B (y w'')'' + w \frac{D \operatorname{tg}^2 \alpha}{y} - p_z y = 0. \end{aligned} \right\} (1227)$$

Diese Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians zerfällt nach H. Reißner in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit Zylinderfunktionen integriert werden können.

Um die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration der Differentialgleichungen (1207) und (1209) zu umgehen, können die Ableitungen der Funktionen  $\vartheta, Q_y, y^2 Q_y''$  in den Differentialgleichungen (1213) und in den Differentialbeziehungen (1221) der Schnittkräfte nach S. 130 durch Differenzenquotienten ersetzt werden, so daß fünfgliedrige Differenzgleichungen entstehen. Diese werden für die Intervallgrenzen einer Aufteilung des Integrationsbereichs  $l - a$  in Strecken  $\Delta y$  angeschrieben und bilden zusammen mit den Randbedingungen in den Breitenchnitten  $y = a$  und  $y = l$  einen vollständigen Ansatz zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten. Die Rechenvorschrift dient auf S. 789 zur Untersuchung des Spannungszustandes einer Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke.

Dubois, F.: Über die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917. — Honegger, E.: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke. Luzern 1919. — Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forscherarb. Eisenbeton Heft 29. Berlin 1921.

c) Die Zylinderschale. Grundlagen der Lösung. Die allgemeinen Beziehungen (1177) zwischen Verzerrung und Verschiebung der Mittelfläche werden durch die geometrischen Eigenschaften der Zylinderschale  $R_\beta = \infty, R_\beta d\alpha = dy, \alpha = 90^\circ, \operatorname{ctg} \alpha = 0, R_\alpha = a = \operatorname{const}$  vereinfacht. Mit der Abkürzung  $(\ )'$  für  $d(\ )/dy$  ist nach (1177)

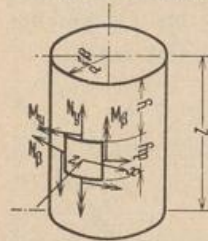


Abb. 816.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_y = v', \quad \varepsilon_\beta = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_\alpha = \varkappa_y = \vartheta', \quad \varkappa_\beta = 0, \\ \vartheta = w' = -a \left( \frac{N_\beta - \mu N_y}{E h} \right)', \end{aligned} \right\} (1228)$$

so daß die Schnittkräfte nach dem Hookeschen Gesetz (1176) folgendermaßen angeschrieben werden können:

$$\left. \begin{aligned} N_y = D \left( v' - \mu \frac{w}{a} \right), \quad N_\beta = D \left( -\frac{w}{a} + \mu v' \right), \quad M_y = -B \vartheta', \quad M_\beta = -\mu B \vartheta', \\ D = \frac{E h}{1 - \mu^2}, \quad B = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (1229)$$



Sie unterliegen den Gleichgewichtsbedingungen (1178)

$$N'_v + p_v = 0, \quad Q'_v + \frac{N_\beta}{a} + p_z = 0, \quad M'_v - Q_v = 0. \quad (1230)$$

Lösung für unveränderliche Wandstärke  $h$ . Die Steifigkeit  $D$  der Schale gegen Dehnung und ihre Steifigkeit  $B$  gegen Biegung sind konstant. In diesem Falle liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung (1230) und die Zusammenfassung der ersten beiden Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit (1228) und (1229) zwei simultane totale Differentialgleichungen.

$$\vartheta'' = -\frac{Q_v}{B}, \quad Q''_v = \frac{D(1-\mu^2)}{a^2} \vartheta - p'_z + \frac{\mu}{a} p_v. \quad (1231)$$

Durch die Elimination der einen Unbekannten entsteht die Differentialgleichung für die andere.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^{IV} + \frac{4}{L^4} \vartheta &= \frac{1}{B} \left( p'_z - \frac{\mu}{a} p_v \right), & Q^{IV}_v + \frac{4}{L^4} Q_v &= - \left( p'_z - \frac{\mu}{a} p_v \right)'' \\ \frac{1}{L^4} &= \frac{3(1-\mu^2)}{h^2 \cdot a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1232)$$

Die Verknüpfung von  $M'_v = Q'_v$  mit den übrigen Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen liefert die Differentialgleichung der Biegelinie des Meridians

$$w^{IV} + \frac{4}{L^4} w = \frac{1}{B} \left( p_z + \mu \frac{N_v}{a} \right), \quad N_v = - \int p_v dy + C. \quad (1233)$$

Die vollständige Lösung der Differentialgleichungen für  $Q_v$  oder  $w$  besteht aus einem von der Belastung  $p_v, p_z$  abhängigen partikulären Integral  $Q_{v0}, w_0$  der inhomogenen Gleichung und aus der allgemeinen Lösung  $\bar{Q}_v, \bar{w}$  der homogenen Gleichung mit vier Integrationskonstanten.

$$Q_v = Q_{v0} + \bar{Q}_v \quad w = w_0 + \bar{w}. \quad (1234)$$

Flüssigkeitsfüllung:

$$p_v = 0, \quad N_v = 0, \quad p_z = -\gamma y, \quad Q_{v0} = 0, \quad w_0 = -\frac{L^4}{4B} \gamma y = -\frac{a^2}{Eh} \gamma y. \quad (1235)$$

Füllgut im Sinne von S. 14:

$$\left. \begin{aligned} p_v = 0, \quad N_v = 0, \quad p_z &= -p_{s, \max} (1 - e^{-y/y_0}), & Q_{v0} &= \frac{p_{s, \max} y_0}{1 + 4 \left( \frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0}, \\ w_0 &= -p_{s, \max} \left[ \frac{a^2}{Eh} - \frac{1}{B} \frac{y_0^4}{1 + 4 \left( \frac{y_0}{L} \right)^4} e^{-y/y_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1236)$$

Die homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{d^4 \bar{Q}_v}{d(y/L)^4} + 4 \bar{Q}_v = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/L)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad (1237)$$

sind auf S. 769 gelöst worden. Das Ergebnis  $\bar{Q}_v, \bar{w}$  unterscheidet sich allein durch die Bedeutung der Integrationskonstanten. Sind diese aus den Randbedingungen bestimmt worden, so lassen sich alle Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes anschreiben. Aus  $Q_v(y)$  wird

$$\left. \begin{aligned} N_v &= - \int p_v dy + C, & E h w &= a^2 (Q'_v + p_z) + \mu a N_v, \\ N_\beta &= -a (Q'_v + p_z), & E h \vartheta &= a^2 (Q''_v + p'_z) - \mu a p_v. \end{aligned} \right\} \quad (1238)$$

Aus  $w(y)$  folgt

$$\left. \begin{aligned} N_v &= - \int p_v dy + C, & N_\beta &= -E h \frac{w}{a} + \mu N_v, & \vartheta &= w', \\ M_v &= -B w'', & M_\beta &= -\mu B w'', & Q_v &= -B w'''. \end{aligned} \right\} \quad (1239)$$



Die Untersuchung wird daher auf die Ableitung des Spannungszustandes aus den Verschiebungen  $w$  beschränkt. Nach Abb. 816 ist mit (1237)

$$\frac{L^4}{l^4} \frac{d^4 \bar{w}}{d(y/l)^4} + 4 \bar{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d(\lambda \eta)^4} + 4 \bar{w} = 0, \quad \lambda = \frac{l}{L}, \quad \eta = \frac{y}{l}. \quad (1240)$$

Der Buchstabe  $L$  bezeichnet eine für jede Zylinderschale charakteristische Länge, welche von den Abmessungen des Breitenschnittes und von den elastischen Eigenschaften des Baustoffs abhängt. Sie beträgt bei Verwendung von Eisenbeton mit  $\mu = 1/6$

$$L = a : \sqrt{\frac{a}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}} = a : 1,31 \sqrt{\frac{a}{h}}. \quad (1241)$$

$l/L = \lambda$  ist eine Schalenkonstante,  $y/l = \eta$  die unbenannte, ortsbestimmende Koordinate. Nach S. 769 ist

$$\bar{w} = C_1 e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_2 e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta + C_3 e^{\lambda \eta} \cos \lambda \eta + C_4 e^{\lambda \eta} \sin \lambda \eta \quad (1242)$$

und mit  $C_1 = A_1 \cos \gamma_1, \quad C_2 = -A_1 \sin \gamma_1$  usw.

auch  $\bar{w} = A_1 e^{-\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_1) + A_2 e^{+\lambda \eta} \cos(\lambda \eta + \gamma_2).$

Der abklingende Anteil der Funktion allein ist eine periodisch gedämpfte Schwingung. Die halbe Wellenlänge ist  $l_0 = \pi l / \lambda = \pi L$ , das logarithmische Dekrement  $\pi$ , so daß die Amplituden der Funktion  $\bar{w}$  und aller ihrer Ableitungen mit jeder halben Welle auf  $1/23,14$  des vorhergehenden Ausschlags zurückgehen. Sie klingen also um so schneller ab, je größer  $\lambda$  oder je kleiner  $L$  ist. Aus diesem Grunde gelten Schalen mit  $l > 7L$  als unendlich lang nach einer Richtung. Bei diesen sind die Integrationskonstanten  $C_3, C_4$  oder  $A_2, \gamma_2$  Null, damit die Wirkung der Randkräfte in  $\eta = 0$  für  $\eta = \infty$  verschwindet.

Die allgemeine Rechenvorschrift zerfällt daher bei hohen Zylinderschalen mit  $l > 7L$  in zwei Teillösungen für den unendlich langen Zylinder, bei welchen  $\eta$  sowohl

für  $w_0$  wie für  $\bar{w}$  entweder vom oberen oder unteren Rande gerechnet wird (Abb. 817). In beiden Fällen ist nach (1242)

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= e^{-\lambda \eta} (C_1 \cos \lambda \eta + C_2 \sin \lambda \eta) \quad \text{und mit } d\bar{w}/d(\lambda \eta) = \bar{w}' \text{ usw.} \\ \bar{w}' &= -e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta) + C_2 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta)], \\ \bar{w}'' &= 2 e^{-\lambda \eta} (C_1 \sin \lambda \eta - C_2 \cos \lambda \eta), \\ \bar{w}''' &= -2 e^{-\lambda \eta} [C_1 (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta) - C_2 (\sin \lambda \eta + \cos \lambda \eta)], \end{aligned} \right\} \quad (1243)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\beta &= -\frac{E h}{a} (w_0 + \bar{w}) + \mu N_\nu, & w' &= w'_0 + \frac{\bar{w}'}{L}, \\ M_\nu &= -B w'' = -B \left( w''_0 + \frac{\bar{w}''}{L^2} \right), & Q_\nu &= -B w''' = -B \left( w'''_0 + \frac{\bar{w}'''}{L^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1244)$$

Das Ergebnis (1244) gilt selbstverständlich auch für die vollständige Lösung  $\bar{w}$  (1242) der homogenen Differentialgleichung. Es bedeutet mechanisch die Überlagerung der Verschiebungen  $w_0$  und der Schnittkräfte  $N_{\nu 0}, N_{\beta 0}$  der statisch bestimmt gestützten Schale aus der vorgeschriebenen Belastung  $p_\nu, p_z$  mit den Anteilen  $\bar{w}, \bar{M}_\nu, \bar{M}_\beta$  aus den Biegemomenten und Querkräften ( $X_1$  bis  $X_4$ ), welche durch Randstörungen, also durch statisch unbestimmten Anschluß der Schale, unverschiebliche Lagerung und Einspannung des Schalenrandes hervorgerufen werden. Sind die Randkräfte bekannt, so läßt sich der Verschiebungs- und Spannungs-

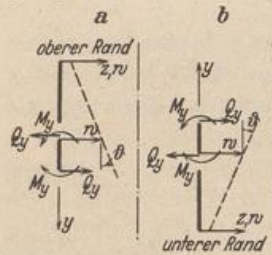


Abb. 817.



zustand der Schale nach der folgenden Rechenvorschrift anschreiben:

$$w = w_0 + \sum X_i w_i, \quad N_\beta = N_{\beta 0} + \sum X_i N_{\beta i}, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (1245)$$

Die Komponenten  $w_0, N_{\beta 0}$  aus der Belastung der statisch bestimmt gestützten biegeungssteifen Schale stimmen ebenso wie bei der Kugel- und Kegelschale nahezu mit den Schnittkräften und Verschiebungen des Längsspannungszustandes überein und sind in einzelnen Belastungsfällen mit diesen identisch. Daher können die Komponenten  $w_0, N_{\beta 0}$  nach den Angaben in Abschn. 80 eingesetzt werden. Die Schnittkräfte  $N_{\beta i}, M_{\nu i}$  und die Verschiebungen  $w_i$  der biegeungssteifen Schale werden für  $X_i = 1$  aus den homogenen Gleichungen (1237) berechnet. Dabei sind die übrigen Randkräfte Null. Die Integrationskonstanten werden dabei allerdings in der Regel für die Randbedingungen eines nach einer Richtung unendlich langen Zylinders angegeben, zumal diese Lösung bereits aus Abschn. 22 bekannt ist.

Lösung für  $X_1 = 1$  (Abb. 818a):

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{2a^2}{LEh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & \vartheta_1 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ N_{\beta 1} &= -\frac{2a}{L} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, & M_{\nu 1} &= -L e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta, \\ & & Q_{\nu 1} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta - \cos \lambda\eta). \end{aligned} \right\} \quad (1246)$$

Lösung für  $X_2 = 1$  (Abb. 818b):

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= -\frac{2a^2}{L^2Eh} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & \vartheta_2 &= \frac{4a^2}{L^3Eh} e^{-\lambda\eta} \cos \lambda\eta, \\ N_{\beta 2} &= -\frac{2a}{L^2} e^{-\lambda\eta} (\cos \lambda\eta - \sin \lambda\eta), & M_{\nu 2} &= e^{-\lambda\eta} (\sin \lambda\eta + \cos \lambda\eta), \\ Q_{\nu 2} &= -\frac{2}{L} e^{-\lambda\eta} \sin \lambda\eta. \end{aligned} \right\} \quad (1247)$$

Die Anschlußkräfte  $X_i (i = 1 \dots 4)$  sind durch die geometrischen oder statischen Bedingungen aus der vorgeschriebenen Abstützung  $\delta_i (i = 1 \dots 4)$  der beiden Schalenränder  $a, b$  oder durch ihre Verbindung mit benachbarten Bauteilen (Platte, Kegelschale, Kugelschale) bestimmt. Die Buchstaben  $\delta_i$  bedeuten dann die gegenseitige Verschiebung der Ränder oder die gegenseitige Verdrehung der Endtangentialen der benachbarten rotationssymmetrischen Flächen ( $\delta_i = \delta_{i,1} + \delta_{i,2}$ , vgl. S. 773). Auch hierbei wird in der Regel mit dem einseitig unendlich langen Zylinder gerechnet, um die Aufgabe zu vereinfachen. Nach (1246) und (1247) ist

$$\delta_{11,2} = \frac{2a^2}{LEh}, \quad \delta_{12,2} = \delta_{21,2} = -\frac{2a^2}{L^2Eh}, \quad \delta_{22,2} = \frac{4a^2}{L^3Eh}. \quad (1248)$$

1. Starre Einspannung des Randes  $a (\eta = 0)$  eines unendlich langen Zylinders.

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} = 0,$$

$$\delta_2 = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0.$$

Mit (1248) und  $\delta_{10} = w_{a0}, \delta_{20} = w'_{a0}$  wird

$$\left. \begin{aligned} X_2 = M_a &= -\frac{L^2 E h}{2a^2} (w_{a0} + L w'_{a0}), \\ X_1 = -Q_a &= -\frac{L E h}{2a^2} (2w_{a0} + L w'_{a0}). \end{aligned} \right\} \quad (1249)$$

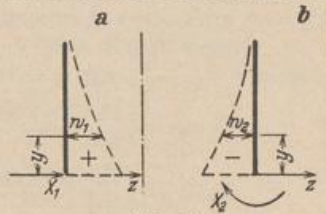


Abb. 818.



2. Gelenkige Lagerung des Randes  $a(\eta = 0)$  eines unendlich langen Zylinders.

$$M_a = X_2 = 0$$

und

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

also mit (1248)

$$X_1 = -Q_a = -\frac{L E h}{2 a^2} w_{a0}. \quad (1250)$$

Damit sind nach (1244) auch die Formänderungen und Schnittkräfte bekannt.

Zylinderschale mit  $h = \text{const}$  als Behälter (Abb. 819). Der untere Rand des Mantels ist im Behälterboden starr eingespannt, der obere Rand kann frei, gelenkig gelagert oder ebenfalls eingespannt sein. Um die strenge Lösung der Aufgabe zu begründen, sollen die Abmessungen des Behälters eine relativ große charakteristische Länge  $L$  bestimmen und daher die Integrationskonstanten der Lösung (1242) von den Bedingungen an beiden Rändern abhängen. Nach S. 760 ist

$$p_z = -\gamma y = -\gamma L \lambda \eta, \quad w_0 = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta. \quad (1251)$$

Die vollständige Lösung  $w = w_0 + \bar{w}$  der inhomogenen Differentialgleichung lautet daher nach (260) transformiert

$$w = -\gamma \frac{L a^2}{E h} \lambda \eta + U_1 \cos \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_2 \cos \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta + U_3 \sin \lambda \eta \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \eta + U_4 \sin \lambda \eta \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda \eta. \quad (1252)$$

Werden die Ableitungen der Funktion  $w$  nach der Veränderlichen  $(\lambda \eta)$  mit  $w'$ ,  $w''$  usw. bezeichnet, so sind nach (1244)

$$\vartheta = \frac{1}{L} w', \quad M_\nu = -\frac{B}{L^2} w'', \quad M_\beta = -\mu \frac{B}{L^2} w''', \quad Q_\nu = -\frac{B}{L^3} w'''. \quad (1253)$$

Die Funktionen  $w'$  usw. sind auf S. 141 angeschrieben. Die Vorzeichen sind

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{a} \sqrt[4]{3 \frac{a^2}{h^2} (1 - \mu^2)}, \quad \frac{B}{L^2} = \frac{E h^2}{4 a} \frac{1}{\sqrt[4]{3 (1 - \mu^2)}}, \quad (1254)$$

so daß die Integrationskonstanten  $U_1 \dots U_4$  leicht aus den Randbedingungen für  $\lambda \eta = 0$  oder  $\lambda \eta = \lambda$  berechnet werden können.

1. Oberer Rand frei,  $\lambda \eta = 0$  mit  $w'' = 0$  und  $w''' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$ , mit  $w = 0$ ,  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 2 \lambda \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\lambda (\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda)}, & U_4 &= 0, \\ U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - 1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\cos^2 \lambda + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \lambda} = U_3. \end{aligned} \right\} \quad (1255)$$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert  $\lambda \eta = 0$  mit  $w = 0$  und  $w'' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$  mit  $w = 0$ ,  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}, \\ U_4 &= 0, & U_3 &= +\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{1/\lambda \cdot \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (1256)$$

3. Oberer Rand eingespannt  $\lambda \eta = 0$  mit  $w = 0$  und  $w' = 0$ , unterer Rand eingespannt  $\lambda \eta = \lambda$  mit  $w = 0$  und  $w' = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) \sin \lambda - \lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_3 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{\lambda (\sin \lambda \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda + \cos \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda) - \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda (\sin \lambda + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda)}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}, \\ U_4 &= -\gamma \frac{L a^2}{E h} \frac{(\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \lambda - \cos \lambda) (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda + \sin \lambda) - 2 \lambda \sin \lambda \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \lambda}{\lambda (\mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n}^2 \lambda - \sin^2 \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (1257)$$



Damit sind auch alle Komponenten (1253) des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Ihre Berechnung wird durch die bekannten Tabellen der hyperbolischen Funktionen von K. Hayashi erleichtert. Sind diese nicht zur Hand, so kann in der Regel ( $h \ll a$ )

$$\operatorname{Sin} \lambda = \operatorname{Coj} \lambda = \frac{1}{2} e^\lambda$$

gesetzt und  $e^\lambda$  als  $\operatorname{num} \ln e^\lambda = \operatorname{num} \lambda$  nach Taschenbüchern bestimmt werden. Das Spannungsmoment ist dann für  $\eta = 1$  und  $\mu = 0$  in allen 3 Fällen

$$M_y \approx \gamma \frac{a^2 h^2}{6l} \lambda (\lambda - 1). \quad (1258)$$

**Berechnung eines Wasserbehälters.**

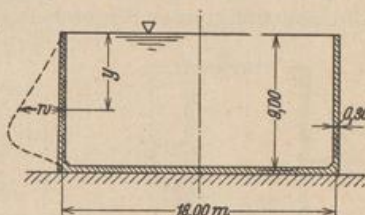
a) Vollständige Lösung nach (1252) für starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$a = 9,0 \text{ m}; \quad l = 9,0 \text{ m}; \quad h = 0,30 \text{ m}; \quad a/h = 30.$

Nach (1241) ist  $L = \frac{9,0}{1,31 \sqrt{30}} = 1,258,$

$\lambda = 7,17, \quad \gamma = 1 \text{ t/m}^3, \quad E = 2100000 \text{ t/m}^2,$

$\gamma \frac{l a^2}{E h} = 1,156 \cdot 10^{-3}.$



1. Oberer Rand frei. Nach (1255) ist  $U_4 = 0$  und

$$U_1 = -1,156 \cdot 10^{-3} \frac{409,64 + 504,60 - 14,34 \cdot 409,64}{7,17 \cdot 423275} = 18,89 \cdot 10^{-7},$$

$$U_2 = U_3 = -1,156 \cdot 10^{-3} \frac{409,64 - 504,60 - \frac{1}{7,17} \cdot 409,64}{423275} = 4,15 \cdot 10^{-7},$$

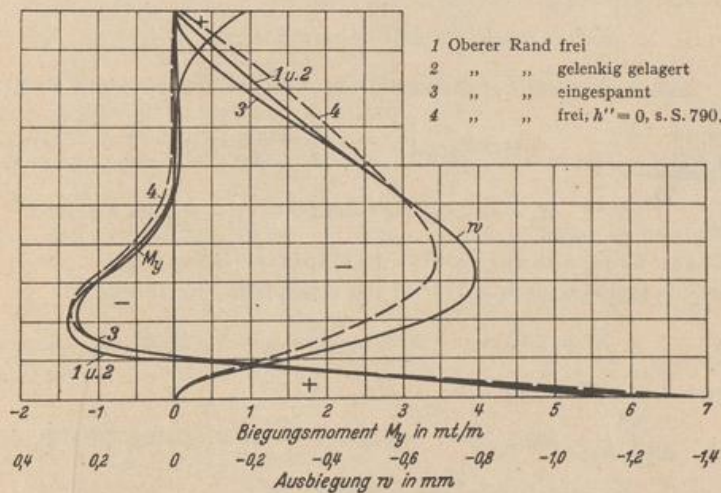


Abb. 820.

damit nach (1252) und (1253) mit (1251)

$$w = -0,161 \cdot 10^{-3} / \eta + 10^{-7} [18,89 \cos \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta + 4,15 (\cos \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta + \sin \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta)],$$

$$M_y = 0,614 \cdot 10^{-3} [1,39 \sin \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta + 4,15 (\sin \lambda \eta \operatorname{Coj} \lambda \eta - \cos \lambda \eta \operatorname{Sin} \lambda \eta)].$$

Am unteren Rand ist  $M_a = 6,08 \text{ mt/m}.$

2. Oberer Rand gelenkig gelagert. Nach (1256) ist

$$U_1 = U_4 = 0, \quad U_2 = 23,05 \cdot 10^{-7}, \quad U_3 = 4,15 \cdot 10^{-7}.$$



3. Oberer Rand starr eingespannt. Nach (1257) ist

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 23,06 \cdot 10^{-7}, \quad U_3 = 1,598 \cdot 10^{-4}, \quad U_4 = -1,585 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ausbiegung  $w$  und die Biegemomente  $M_v$  sind in Abb. 820 dargestellt. Die Ringkraft  $N_\beta$  ist nach (1244) proportional der Ausbiegung  $w$ .

b) Näherungsweise ist für alle 3 Randbedingungen nach (1258)

$$M_a \approx 1,0 \frac{9,0^2 \cdot 0,30^2}{6 \cdot 9,0} \cdot 7,17 \cdot 6,17 = 5,97 \text{ mt/m.}$$

c) Die Teillösung (1243) für den unendlich langen Zylinder ergibt nach (1249)

$$M_a = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 6,12 \text{ mt/m.}$$

Der Verlauf der Funktionen  $w$  und  $M_v$  stimmt mit den Kurven 1 und 2 Abb. 820 so gut überein, daß der Unterschied in der Zeichnung nicht hervortritt.

### Untersuchung eines Wasserbehälters nach (1234) bei verschiedenen Randbedingungen.

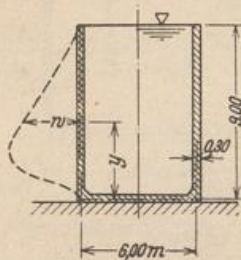


Abb. 821.

a) Starre Einspannung des unteren Schalenrandes.

$$a = 3,0 \text{ m}, \quad l = 9,0 \text{ m}, \quad h = 0,3 \text{ m}, \quad a/h = 10.$$

$$\text{Nach (1241) ist } L = \frac{3,0}{1,31 \sqrt{10}} = 0,723,$$

$$\lambda = 12,45, \quad \gamma = 1,0 \text{ t/m}^3, \quad E h = 0,63 \cdot 10^6.$$

Für den Längsspannungszustand ist nach (1154)

$$w_0 = -\gamma \frac{a^2}{E h} (l - y), \quad w'_0 = \gamma \frac{a^2}{E h}.$$

Damit wird nach (1249) das Einspannungsmoment

$$M_a = X_2 = -\frac{L^2 E h}{2 a^2} \left( -\gamma \frac{a^2 l}{E h} + L \gamma \frac{a^2}{E h} \right) = \frac{L^3 \gamma}{2} (\lambda - 1) = 2,165 \text{ mt/m}$$

und

$$X_1 = \frac{L^2}{2} \gamma (2 \lambda - 1) = 6,25 \text{ t/m,}$$

so daß nach (1243) und (1244) Formänderung und Schnittkräfte bestimmt sind (Abb. 824a).

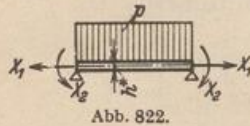


Abb. 822.

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h} \left[ 1 - \eta - e^{-\lambda \eta} \left( \cos \lambda \eta + \left( 1 - \frac{L}{l} \right) \sin \lambda \eta \right) \right],$$

$$M_v = -L^2 \frac{l \gamma}{2} e^{-\lambda \eta} \left( \sin \lambda \eta - \left( 1 - \frac{L}{l} \right) \cos \lambda \eta \right).$$

b) Elastische Einspannung in eine Kreisplatte (Abb. 824b).

1. Formänderungsgrößen nach S. 773 für die Kreisplatte mit Tabelle 63.

$$h^* = 0,40 \text{ m}, \quad N = \frac{E h^{*3}}{12(1 - \mu^2)} = 11520 \text{ mt.}$$

$$X_1 = 1: \quad \delta_{11,1} = \delta_{21,1} = 0, \quad w_1^* = 0, \quad M_{r,1} = 0.$$

$$X_2 = 1: \quad \delta_{22,1} = \frac{3,0}{N(1 + \mu)} = 223,2 \cdot 10^{-6}, \quad w_2^* = -\frac{a^2}{2N(1 + \mu)} \Phi_1 = -335 \cdot 10^{-6} \cdot \Phi_1; \quad M_{r,2} = -1.$$

$$p = \gamma l: \quad \delta_{10,1} = 0, \quad \delta_{20,1} = -\gamma \frac{l a^3}{8N(1 + \mu)} = -2265 \cdot 10^{-6}.$$

$$w_0^* = \gamma \frac{l a^4}{64N(1 + \mu)} [2(3 + \mu) \Phi_1 - (1 + \mu) \Phi_0] = 5365 \cdot 10^{-6} (\Phi_1 - 0,184 \Phi_0).$$

$$M_{r,0} = \gamma \frac{l a^2}{16} (3 + \mu) \Phi_1 = 16,07 \Phi_1.$$

2. Formänderungsgrößen für die Zylinderschale nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 39,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -54,7 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,2} = 151,2 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10,2} = w_{0a} = -128,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,2} = w'_{0a} = 14,3 \cdot 10^{-6}.$$



3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit  $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$ .

$X_1$	$X_2$		
39,5	-54,7	128,6	$X_1 = 14,518 \text{ t/m}$ ,
-54,7	374,4	2250,7	$X_2 = 8,133 \text{ mt/m}$ .

4. Formänderung und Schnittkräfte der Schale Abb. 824b. Nach (1243) und (1244) ist

$$w = -\gamma \frac{a^2 l}{E h} (1 - \eta) + 14,518 w_1 + 8,133 w_2$$

$$= -128,6 \cdot 10^{-6} [(1 - \eta) - e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 3,44 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_v = 14,518 M_1 + 8,133 M_2$$

$$= -2,358 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - 3,44 \cos \lambda \eta).$$

5. Formänderung und Schnittkräfte der Platte. Abb. 824b.

$$w^* = 5365 \cdot 10^{-6} (\Phi_1 - 0,184 \Phi_0) - 8,133 \cdot 335 \cdot 10^{-6} \Phi_1$$

$$= 10^{-6} (2640 \Phi_1 - 987 \Phi_0),$$

$$M_r = 16,07 \Phi_1 - 8,133.$$

c) Elastische Einspannung in eine Kugelschale. Abb. 824c.

1. Formänderungsgrößen für die Kugelschale nach (1197) und (1199) mit

$$a^* = 4,67 \text{ m}, \quad h^* = 0,20 \text{ m}, \quad a^*/h^* = 23,35.$$

Nach (1185) ist

$$k = \sqrt{23,35 \sqrt{3 \cdot 0,9722}} = 6,32, \quad \frac{1}{B} = 695 \cdot 10^{-6},$$

und mit  $\alpha_2 = 40^\circ$ ,  $\sin \alpha_2 = 0,6428$ ,  $E h^* = 0,42 \cdot 10^6$ ,

$$\delta_{11,1} = 58,1 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = -122,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 513 \cdot 10^{-6}.$$

Mit  $f = 9 + 4,67 \cdot \cos \alpha_2 = 12,58 \text{ m}$  und  $f/a^* = 2,69$  wird nach (1132)

$$\bar{\delta}_{10,1} = \Delta \nu_{\alpha_2} = -136 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \bar{\delta}_{20,1} = \vartheta_{\alpha_2} = 33,3 \cdot 10^{-6}.$$

Die Horizontalkraft  $H$  beträgt nach S. 752 mit (1132)

$$H = -N_{\alpha_2} \cos \alpha_2 = +\gamma \frac{a^{*2}}{6} \left( 3 \frac{f}{a^*} - 2 \frac{1 - \cos^3 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2} \right) \cos \alpha_2 = +15,1 \text{ t/m}$$

und damit nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = 15,1 \cdot 58,1 \cdot 10^{-6} = 878 \cdot 10^{-6}, \quad \delta'_{20,1} = -15,1 \cdot 122,5 \cdot 10^{-6} = -1850 \cdot 10^{-6},$$

so daß

$$\delta_{10,1} = (-136 + 878) \cdot 10^{-6} = 742 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,1} = (33,3 - 1850) \cdot 10^{-6} = -1816,7 \cdot 10^{-6}$$

2. Formänderungsgrößen der Zylinderschale wie unter b).

3. Berechnung der Anschlußkräfte nach S. 773 mit  $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}$ .

$X_1$	$X_2$		
97,6	-177,2	-613,4	$X_1 = -2,634 \text{ t/m}$ ,
-177,2	664,2	1802,4	$X_2 = 2,011 \text{ mt/m}$ .

4. Formänderungen und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = -10^{-6} \cdot 128,6 [(1 - \eta) + 1,67 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta - 0,513 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_v = 3,917 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta + 0,513 \cos \lambda \eta).$$

5. Schnittkräfte in der Kugelschale nach (1192)

$$M_\alpha = (X_1 + H) M_1 + X_2 M_2 = e^{-k \omega} \left[ 5,94 \sin(k \omega) - 2,84 \sin \left( k \omega + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

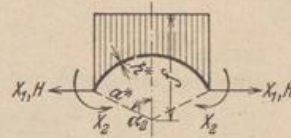


Abb. 823.



d) Berechnung für Temperatur und Schwinden bei eingespanntem unterem Rand.

Die Formänderungsgrößen aus  $X_1 = 1, X_2 = 1$  werden wie auf S. 784

$$\delta_{11} = 39,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12} = -54,7 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22} = 151,2 \cdot 10^{-6}.$$

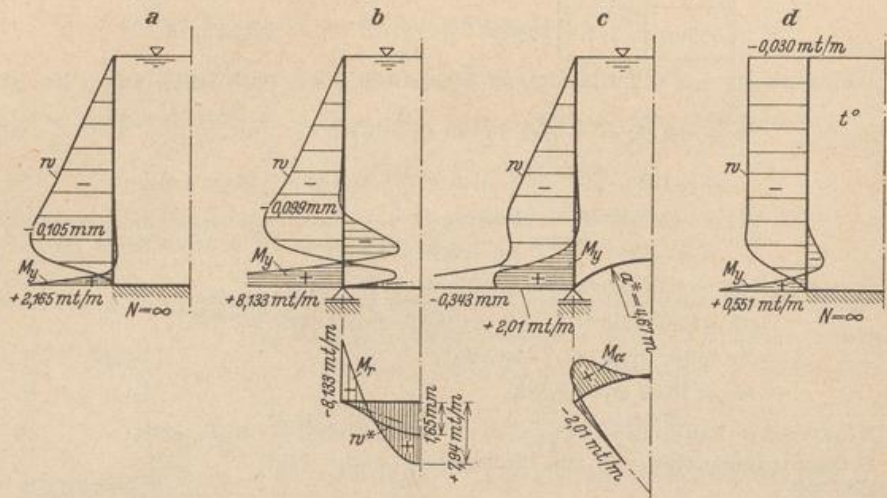


Abb. 824.

Für Temperaturwirkung ist nach (1157) mit  $\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$

$$\delta_{10} = w_{0a} = -\alpha_t \cdot t \cdot a = -30 \cdot t \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20} = 0.$$

Damit lauten die Gleichungen auf S. 773

$X_1$	$X_2$		
39,5	- 54,7	$30 \cdot t$	$X_1 = 1,522 \cdot t \text{ t/m}$ ,
- 54,7	151,2	0	$X_2 = 0,551 \cdot t \text{ mt/m}$ .

Formänderung und Schnittkräfte betragen nach (1243), (1244) Abb. 824 d

$$w = -30 \cdot t \cdot 10^{-6} [1 - e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + \sin \lambda \eta)],$$

$$M = -0,551 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - \cos \lambda \eta) \cdot t = 1.$$

### Berechnung eines Silos.

#### 1. Geometrische Grundlagen.

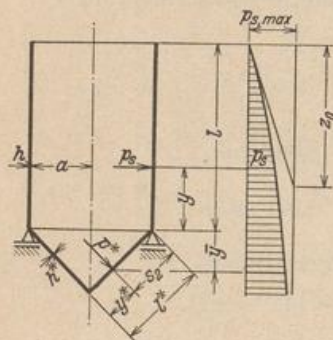


Abb. 825.

Zylinderschale:  $a = 3,0 \text{ m}, l = 9,0 \text{ m}, h = 0,20 \text{ m},$

$$E h = 0,42 \cdot 10^6, \quad a/h = 15, \quad L = 0,591 \text{ m},$$

$$\lambda = 15,25, \quad \eta = y/l.$$

Kegelschale:  $\alpha = 45^\circ, l^* = 4,24 \text{ m}, h^* = 0,25 \text{ m},$

$$E h^* = 0,525 \cdot 10^6, \quad L_2^* = 0,788 \text{ m}, \quad B^* = 10^6/355,$$

$$\eta_2 = s_2/L_2^*.$$

2. Belastung. Füllgut: Roggen. Nach S. 14 ist (Abb. 825)

$$\gamma = 0,7 \text{ t/m}^3, \quad h_1 = 0,248, \quad \mu' = 0,44, \quad F/U = 3/2,$$

$$p_{s, \max} = \frac{0,7}{0,44} \frac{3}{2} = 2,39, \quad p_b, \max = \frac{2,39}{0,248} = 9,62,$$

$$z_0 = \frac{1,5}{0,44 \cdot 0,248} = 13,75,$$

$$p_s = 2,39 (1 - e^{-x}), \quad p_b = 9,62 (1 - e^{-x}), \quad x = \frac{l - y}{z_0} = \frac{9 - y}{13,75}.$$



Zylinderschale:  $p_z = -2,39 (1 - e^{-x})$ .

Kegelschale:  $p_z^* = -p_s \sin^2 \alpha - p_b \cos^2 \alpha = -6,01 \left(1 - e^{-\frac{l+y}{z_0}}\right)$ ,  
 $p_z^* = -6,01 (1 - e^{-x^*})$ ,  $x^* = \frac{16,96 - y^*}{19,43}$ .

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1155) ist

$$w_0 = -\frac{3,0^2}{0,42} \cdot 10^{-6} \cdot 2,39 (1 - e^{-x}) = -51,3 \cdot 10^{-6} (1 - e^{-x}),$$

$$\vartheta_0 = \frac{51,3 \cdot 10^{-6}}{13,75} e^{-x} = 3,73 \cdot 10^{-6} e^{-x},$$

so daß mit  $y = 0$ :

$$\delta_{10,2} = -24,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{20,2} = 1,94 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus  $X_1 = 1, X_2 = 1$  (Abb. 826) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 72,5 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -122,6 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,2} = 415,0 \cdot 10^{-6}.$$

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (1138) folgt

$$N_{\beta 0} = -\gamma^* p_z = 6,01 \gamma^* (1 - e^{-x^*})$$

und

$$(N_{\gamma 0} \gamma^*)' = 6,01 \gamma^* (1 - e^{-x^*}),$$

woraus

$$N_{\gamma 0} = 6,01 \left[ \frac{\gamma^*}{2} - 19,43 e^{-x^*} + \frac{19,43^2}{\gamma^*} (e^{-x^*} - e^{-0,872}) \right].$$

Damit wird nach (1140)

$$\Delta r_{z,0} = 8,1 \cdot 10^{-6} \gamma^* \left\{ \gamma^* (1 - e^{-x^*}) - \mu \left[ \frac{\gamma^*}{2} - 19,43 e^{-x^*} \left(1 - \frac{19,43}{\gamma^*}\right) - \frac{19,43^2}{\gamma^*} e^{-0,872} \right] \right\},$$

und nach (1141)

$$\vartheta_0^* = -11,46 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{3}{2} \gamma^* - e^{-x^*} \left( \frac{19,43^2}{\gamma^*} - 19,43 + 2 \gamma^* + \frac{\gamma^{*2}}{19,43} \right) + \frac{19,43^2}{\gamma^*} \cdot e^{-0,872} \right].$$

Die Formänderungen am Rande im Sinne der Definition nach Abb. 826 betragen daher

$$\bar{\delta}_{10,1} = (\Delta r_{z,0})_{\gamma^*=1} = 63,3 \cdot 10^{-6},$$

$$\bar{\delta}_{20,1} = -(\vartheta_0^*)_{\gamma^*=1} = 29,3 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus  $X_1 = 1, X_2 = 1$  ist nach (1223) und (1224) unter Beachtung des Wirkungssinnes von  $X_2$  nach Abb. 826

$$\delta_{11,1} = 43,4 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = 77,9 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 279,5 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung  $H$ . Nach Abb. 767 ist

$$H = -(N_{\gamma 0})_{\gamma^*=1} \cdot \cos \alpha = -4,67 \text{ t}$$

und nach (1201)

$$\delta'_{10,1} = -4,67 \cdot 43,4 \cdot 10^{-6} = -202,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta'_{20,1} = -4,67 \cdot 77,9 \cdot 10^{-6} = -363,5 \cdot 10^{-6}.$$

5. Berechnung der Überzähligen.

$$\delta_{11} = (72,5 + 43,4) \cdot 10^{-6} = 115,9 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{12} = (-122,6 + 77,9) \cdot 10^{-6} = -44,7 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{22} = (415,0 + 279,5) \cdot 10^{-6} = 694,5 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{10} = (-24,6 + 63,3 - 202,5) \cdot 10^{-6} = -163,8 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{20} = (1,94 + 29,3 - 363,5) \cdot 10^{-6} = -332,26 \cdot 10^{-6}.$$

$X_1$	$X_2$		
115,9	-44,7	163,8	$X_1 = 1,639 \text{ t/m}$ ,
-44,7	694,5	332,26	$X_2 = 0,584 \text{ mt/m}$ .

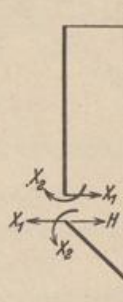


Abb. 826.



6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 1,639 w_1 + 0,584 w_2$$

$$= -51,3 \cdot 10^{-6} [(1 - e^{-\lambda}) - 0,923 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 1,516 \sin \lambda \eta)]$$

$$M_y = 1,639 M_1 + 0,584 M_2 = 0,384 e^{-\lambda \eta} [1,516 \cos \lambda \eta - \sin \lambda \eta]$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_{z,0} = \Delta r_{z,0} + (1,639 - 4,67) \Delta r_{z,1} + 0,584 \Delta r_{z,2}$$

$$= \Delta r_{z,0} - 3,031 \Delta r_{z,1} + 0,584 \Delta r_{z,2}$$

$\Delta r_{z,0}$  auf S. 787. Nach (1223) und (1224) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2,41 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_2} \cos \eta_2,$$

$$\Delta r_{z,2} = 4,33 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_2} (\cos \eta_2 - \sin \eta_2),$$

$$M_y^* = -3,031 M_1 + 0,584 M_2 = 0,584 e^{-\eta_2} [\cos \eta_2 - 1,89 \sin \eta_2]$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 827 dargestellt.

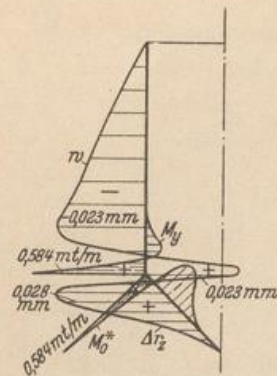


Abb. 827.

Berechnung eines Kühlturmes.

1. Geometrische Grundlagen (Abb. 828).

Zylinderschale:  $a = 5,5 \text{ m}$ ,  $l = 15,0 \text{ m}$ ,  $h = 0,07 \text{ m}$

$$E h = 0,147 \cdot 10^6, \quad a/h = 78,6, \quad L = 0,474 \text{ m}, \quad \lambda = 31,7, \quad \eta = y/l$$

Kegelschale:  $\alpha = 65^\circ$ ,  $l^* = 17,0 \text{ m}$ ,  $a^* = 13,0 \text{ m}$ ,  $h^* = 0,10 \text{ m}$

$$E h^* = 0,210 \cdot 10^6, \quad L_1^* = 0,596 \text{ m}, \quad B^* = 10^6/5560, \quad \eta_1 = s_1/L_1^*$$

2. Belastung. Eigengewicht.

Zylinderschale  $g = 0,168 \text{ t/m}^2$ ; Kegelschale  $g^* = 0,24 \text{ t/m}^2$ .

3. Formänderung der Zylinderschale.

a) Membranzustand. Nach (1153) ist

$$w_0 = -\frac{\mu}{E h} a g l (1 - \eta) = -10^{-6} \cdot 15,73 (1 - \eta),$$

$$\vartheta_0 = 10^{-6} \cdot \frac{15,73}{l} = 10^{-6} \cdot 1,05,$$

so daß mit  $\eta = 0$   $\delta_{10,2} = -15,73 \cdot 10^{-6}$ ,

$$\delta_{20,2} = 1,05 \cdot 10^{-6}.$$

b) Für die Belastung aus  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  (Abb. 829) ist nach (1248)

$$\delta_{11,2} = 868 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,2} = -1836 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta_{22,2} = 7750 \cdot 10^{-6}.$$

4. Formänderung der Kegelschale.

a) Membranzustand. Nach (1142) und (1145) ist mit  $z = y^* \sin \alpha$  und

$$G_0 = g \cdot l \cdot 2 a \pi = 87 \text{ t}$$

$$\Delta r_{z,0} = -\frac{g^* y^{*2}}{E h^*} \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha \left\{ 1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \alpha} \left[ 1 - \left( \frac{a^*}{y^*} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\mu G_0}{2 \pi E h^* \sin \alpha}$$

$$= 10^{-6} \left\{ 12,12 - 0,0444 y^{*2} \left[ 1,145 + \left( \frac{13}{y^*} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\vartheta_0 = -\frac{g^* y^*}{E h^*} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \left[ \frac{1}{2} + \mu - (2 + \mu) \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \left( \frac{a^*}{y^*} \right)^2 \right] - \frac{G_0}{E h^* \cdot 2 \pi y^* \sin^2 \alpha}$$

$$= -10^{-6} \left\{ 0,294 y^* \left[ 0,56 - \left( \frac{13}{y^*} \right)^2 \right] + \frac{80,3}{y^*} \right\}.$$

Mit  $y^* = a^*$  wird  $\bar{\delta}_{10,1} = -3,96 \cdot 10^{-6}$ ,  $\bar{\delta}_{20,1} = -4,49 \cdot 10^{-6}$ .

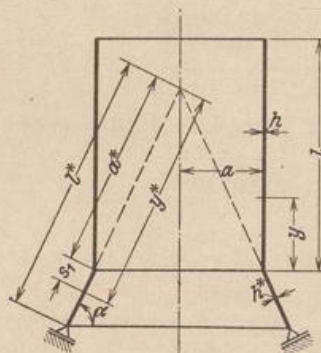


Abb. 828.

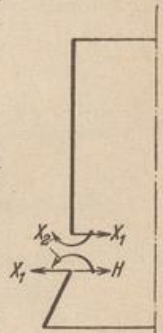


Abb. 829.



b) Die Belastung  $X_1 = 1, X_2 = 1$  liefert nach (1225) und (1226)

$$\delta_{11,1} = 482 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{12,1} = 896 \cdot 10^{-6}, \quad \delta_{22,1} = 3320 \cdot 10^{-6}.$$

c) Belastung  $H$ . Nach (1145) ist

$$-H = \frac{G_0}{2\pi a} \operatorname{ctg} \alpha = +1,175 \text{ t/m}$$

und daher nach (1201)  $\delta'_{10,1} = -1,175 \cdot 482 \cdot 10^{-6} = -566 \cdot 10^{-6},$   
 $\delta'_{20,1} = -1,175 \cdot 896 \cdot 10^{-6} = -1053 \cdot 10^{-6}.$

5. Berechnung der Überzähligen. ( $\delta_{ik} = \delta_{ik,1} + \delta_{ik,2}, \delta_{i0} = \delta'_{i0,1} + \delta'_{i0,1} + \delta_{i0,2}$ )

$X_1$	$X_2$		
1350	-940	581	$X_1 = 0,532 \text{ t/m}$
-940	11070	1056	$X_2 = 0,141 \text{ mt/m}.$

6. Formänderung und Schnittkräfte der Zylinderschale nach (1243) und (1244)

$$w = w_0 + 0,532 w_1 + 0,141 w_2$$

$$= -15,73 \cdot 10^{-6} [(1 - \eta) - 12,85 e^{-\lambda \eta} (\cos \lambda \eta + 1,281 \sin \lambda \eta)],$$

$$M_y = 0,532 M_1 + 0,141 M_2 = -0,110 e^{-\lambda \eta} (\sin \lambda \eta - 1,281 \cos \lambda \eta).$$

7. Formänderung und Schnittkräfte der Kegelschale nach (1202) und (1221)

$$\Delta r_z = \Delta r_{z,0} + (0,532 - 1,175) \Delta r_{z,1} + 0,141 \Delta r_{z,2}$$

$$= \Delta r_{z,0} - 0,643 \Delta r_{z,1} + 0,141 \Delta r_{z,2}.$$

$\Delta r_{z,0}$  auf S. 788. Nach (1225) und (1226) ist

$$\Delta r_{z,1} = 2,855 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_1} \cos \eta_1,$$

$$\Delta r_{z,2} = -5,28 \cdot 10^{-6} y^{*2} e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 - \cos \eta_1).$$

Formänderung und Schnittkräfte sind in Abb. 830 dargestellt.

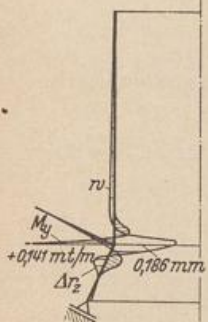


Abb. 830.

Die Zylinderschale mit veränderlicher Wanddicke. Näherungslösungen der allgemeinen Aufgabe entstehen nach S. 778 durch die Unterteilung des Integrationsbereichs  $l$  in  $n$  gleichgroße Abschnitte  $\Delta y = s$  mit der Punktfolge  $0, 1 \dots k \dots n$  und durch die Umwandlung der Differentialquotienten der Differentialgleichung des Problems in Differenzenquotienten.

Die Differentialgleichung der Biegelinie  $w$  des Meridianschnittes mit beliebig veränderlicher Wanddicke  $h$  lautet nach (1229) für

$$N_y = 0, \quad M_y'' + \frac{N_\beta}{a} + \mathcal{P}_z = 0, \quad M_y'' = -(B w''')'$$

$$\left( \frac{h^3}{h_0^3} w'' \right)'' + 4 w \frac{h}{h_0} \frac{3(1-\mu^2)}{a^2 h_0^3} = 12 \frac{(1-\mu^2)}{E h_0^3} \mathcal{P}_z. \quad (1259)$$

Aus dieser werden nach (211) mit  $h_k/h_0 = \zeta_k$  die folgenden Differenzengleichungen abgeleitet:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1} - 2 \zeta_k^3 \Delta^2 w_k + \zeta_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} + 4 \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4} w_k &= \frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} \mathcal{P}_{z,k}. \\ \zeta_{k-1}^3 w_{k-2} - 2 w_{k-1} (\zeta_{k-1}^3 + \zeta_k^3) + w_k (\zeta_{k-1}^3 + 4 [\zeta_k^3 + \zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}] + \zeta_{k+1}^3) & \\ - 2 w_{k+1} (\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3) + \zeta_{k+1}^3 w_{k+2} &= \frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} \mathcal{P}_{z,k}, \quad k = 1 \dots (n-1). \end{aligned} \right\} \quad (1260)$$

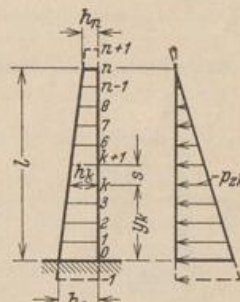


Abb. 831.



Die Rechenvorschrift besteht neben diesen  $(n-1)$  linearen Gleichungen aus vier Randbedingungen für  $w, w', M$  oder  $Q$  am Rande  $y = 0$  und  $y = l$ . Sie enthält ebenso viele Wurzeln  $w_k (k = -1 \dots n+1)$ , die daher eindeutig bestimmt sind. Die Randbedingungen sind Vorschriften über den Verschiebungs- oder Spannungszustand. Dieser läßt sich nach (1229) ebenfalls durch Differenzen ausdrücken.

$$\left. \begin{aligned} w'_k &\approx \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2s}, \quad -N_{\beta k} = \frac{E h_k}{a} w_k, \quad M_{y k} = -\frac{E h_k^3}{12(1-\mu^2)} \frac{(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1})}{s^2}, \\ Q_k &= -\frac{E}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{h_{k+1}^3 \Delta^2 w_{k+1} - h_{k-1}^3 \Delta^2 w_{k-1}}{2s^3} \right). \end{aligned} \right\} (1261)$$

Sind keine Randbedingungen vorgeschrieben, sondern nur durch die Verbindung des Breitenschnittes mit anderen elastischen Bauteilen bestimmt, so müssen hier ebenso wie auf S. 781 zunächst die Anschlußkräfte berechnet werden. Die Komponenten  $\delta_{10}, \delta_{20}$  des Verschiebungszustandes ergeben sich in der Regel aus der partikulären Lösung von (1259), die Vorzahlen  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$  des Ansatzes lassen sich genügend genau aus den Differenzgleichungen eines unendlich langen Zylinders mit vorgeschriebenen Randkräften nach S. 789 für  $X_1 = Q_y = 1, My = 0$  oder  $X_2 = My = 1, Q_y = 0$  berechnen. Da die Funktionen  $w(y)$  in diesem Falle schnell abklingen, werden die Verschiebungen  $w_{k,1}, w_{k,2}$  außerhalb einer geschätzten Randzone Null gesetzt, ohne die Bedingungen am entgegengesetzten Rande zu berücksichtigen.

**Berechnung des Wasserbehälters Abb. 819 für linear veränderliche Wandstärke ( $h'' = 0$ ).**

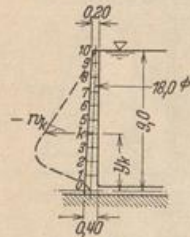


Abb. 832.

1. Geometrische Abmessungen (Abb. 832).  $l = 9,0 \text{ m}, a = 9,0 \text{ m}.$

$$h_0 = 0,40 \text{ m}, \quad h_{10} = 0,20 \text{ m}, \quad h_k = \frac{h_0}{c} (c - y_k),$$

$$c = \frac{l h_0}{h_0 - h_{10}} = 18,0, \quad \zeta_k = \frac{h_k}{h_0} = 1 - \frac{y_k}{18,0}.$$

Der Integrationsbereich  $l$  wird in 10 gleiche Teile geteilt.  $s = 0,9 \text{ m}.$

2. Belastung. Wasserdruck,  $p_{z,k} = -1,0 (l - y_k).$

3. Randbedingungen. Der untere Rand  $y = 0$  ist starr eingespannt,  $w = 0, w' = 0$ , also  $w_{-1} = w_1$ . Der obere Rand ist kräftefrei,  $Q_{10} = 0, M_{y10} = 0$ , daher mit (1261)

$$w_{11} = 2 w_{10} - w_9, \quad w_{12} = \frac{\zeta_9^3}{\zeta_{11}^3} (w_8 - 2 w_9 + w_{10}) + 3 w_{10} - 2 w_9.$$

4. Vorzahlen der Differenzgleichungen (1260)

$$\frac{12(1-\mu^2)s^4}{E h_0^3} p_{z,k} = \frac{s^4}{B_0} p_{z,k} = -\frac{0,057}{1000} (9,0 - y_k), \quad \frac{s^4}{L_0^4} = 0,1475.$$

$k$	$y_k$	$\zeta_k$	$\zeta_k^2$	$\zeta_k^3 + \zeta_{k+1}^3$	$\zeta_k \frac{s^4}{L_0^4}$	[ ] Gl. (1260)	$\frac{\zeta_{k-1}^3}{\zeta_{k+1}^3}$ + 4 [ ]	$9,0 - y_k$	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{z,k}$
-1	-0,9	1,05	1,105	2,158	0,1550	1,3130	—	—	—
0	0	1	1	1,857	0,1475	1,1475	6,595	9	-0,513
1	0,9	0,95	0,857	1,586	0,1401	0,9971	5,719	8,1	-0,461
2	1,8	0,9	0,729	1,343	0,1328	0,8618	4,921	7,2	-0,411
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



## 5. Die Bedingungsgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$10^3 \frac{s^4}{B_0} p_{x,k}$
6,719	-3,172	0,729								-0,461
-3,172	4,921	-2,686	0,614							-0,411
0,729	-2,686	4,199	-2,252	0,512						-0,359
	0,614	-2,252	3,536	-1,868	0,422					-0,308
		0,512	-1,868	2,988	-1,530	0,343				-0,256
			0,422	-1,530	2,485	-1,236	0,275			-0,205
				0,343	-1,236	2,044	-0,982	0,216		-0,154
					0,275	-0,982	1,661	-0,764	0,166	-0,103
						0,216	-0,764	1,204	-0,332	-0,051
							0,166	-0,332	0,313	0

6. Auflösung. Die Iteration einer Näherungslösung liefert

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^3 w_k =$	-0,2396	-0,5144	-0,6616	-0,6777	-0,6131	-0,5146	-0,4047	-0,2860	-0,1547	-0,0124 mm

7. Schnittkräfte nach (1261). Die Ausbiegung  $w_k$  und das Biegemoment  $M_{y,k}$  sind in Abb. 820 S. 783 durch die Linie 4 dargestellt.

Pöschl, T., u. K. v. Terzaghi: Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Berlin 1913 und 1926. — Meißner, E.: Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefäße mit linear veränderlicher Wandstärke. Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 1917 S. 153. — Pasternak, P.: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern. Schweiz. Bauztg. Bd. 86 (1925) S. 129. — Derselbe: Vereinfachte Berechnung der Biegebeanspruchung in dünnwandigen kreisrunden Behältern. Verh. 2. Int. Kongr. f. techn. Mechanik. Zürich 1927. — Derselbe: Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken. Schweiz. Bauztg. Bd. 90 (1927). — Susok, K.: Formeln zur praktischen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit linear veränderlichen Wandstärken. Beton u. Eisen 1927 S. 450. — Steuermann, E.: Beitrag zur Berechnung des zylindrischen Behälters mit veränderlicher Wandstärke. Beton u. Eisen 1928 S. 286. — Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1930 S. 22. — Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyklinderschale. Ing.-Arch. 1931 S. 463. — Stange, K.: Der Spannungszustand einer Kreisringschale. Ing.-Arch. 1931 S. 47. — Abdank, R.: Berechnung ganz oder teilweise gefüllter, freitragender, dünnwandiger Rohrleitungen mit beliebig geneigter Achse. Bautechn. 1931 S. 419. — v. Sanden, K., u. F. Tölke: Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszyklindrischer Schalen. Ing.-Arch. 1931 S. 24.

## 82. Membrantheorie von Rohr und Tonne.

Tonne und Rohr werden bei zahlreichen Anwendungen im Bauwesen längs der Ränder oder längs ausgezeichneter Mantellinien  $\alpha = \text{const}$  stetig unterstützt und bei der statischen Untersuchung unendlich lang angenommen (Abb. 833). Eine von  $x$  unabhängige Belastung  $p = p(\alpha)$  erzeugt dann mit  $\mu = 0$  einen ebenen Spannungszustand, dessen Komponenten ebenso wie beim biegeungssteifen gekrümmten Stabe berechnet werden (S. 131 und 136). Durch die Abstützung einzelner Querschnitte des Flächentragwerks mit biegeungssteifen Rahmen, Bindern oder Querwänden



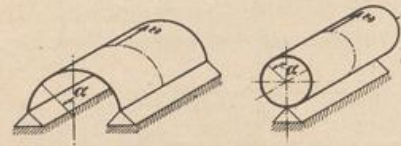


Abb. 833.

entstehen freitragende Rohre und Tonnen, deren differentiale Streifen sich nicht mehr gleichartig verhalten, so daß die Spannungen nach der Schalentheorie berechnet werden müssen. Gelten dabei mit  $h \ll r$  dieselben Annahmen wie auf S. 743, so lassen sich die inneren Kräfte auch hier durch Schnittkräfte, also durch Längs- und Querkräfte, Biegungs- und Drillungsmomente ausdrücken. Die räumliche Tragwirkung der Tonne ist zuerst von A. Föppl an Fachwerken (1894), von D. Thoma und E. Schwerin an Rohren (1920) und von F. Bauersfeld und

U. Finsterwalder an freitragenden Gewölben (1928) untersucht worden.

Um die Rechnung zu vereinfachen, können die Biegungsspannungen gegenüber den Dehnungsspannungen eines Abschnitts zunächst ebenso wie bei den rotations-symmetrischen Schalen vernachlässigt werden, wenn die Randbedingungen vollständig erfüllt sind oder wenn die Randstörungen keinen wesentlichen Einfluß auf den Spannungs- und Formänderungszustand besitzen. Das Kraftfeld der Schale wird dann allein durch Längskräfte und Schubkräfte beschrieben, während die Biegung nur geringe Nebenspannungen erzeugt.

Zur Berechnung der Längskräfte  $N_x$ ,  $N_\alpha$  und der Schubkräfte  $N_{x\alpha}$  genügen die drei Gleichgewichtsbedingungen. Die Aufgabe ist also ebenso wie bei den rotations-symmetrischen Schalen statisch bestimmt. Die Gleichgewichtsbedingungen werden für die äußeren Kräfte eines differentialen Schalentheils  $dx \cdot r d\alpha$  angeschrieben und dabei auf das Achsensystem der Abb. 838 bezogen. Der Ursprung der  $x$ -Achse fällt in den mittleren Breitenschnitt zwischen zwei Querstützen (Abstand  $2l$ ). Diese bedeuten Ränder des stetigen Zusammenhangs und damit Randbedingungen für die mathematische Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes. Das-

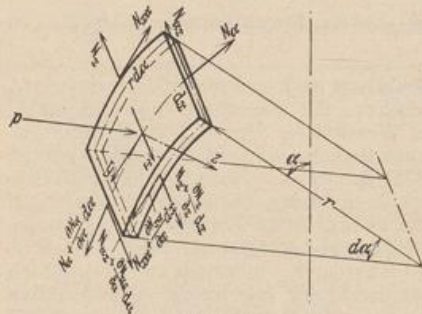


Abb. 834.

selbe gilt von der Begrenzung der Tonnenschalen längs der Erzeugenden. Randstörungen des Membranzustandes sind also nur dann ausgeschlossen, wenn die an den Rändern der Schale vorhandenen Kräfte den stützenden Randgliedern ohne Zwang zugeführt werden können.

Die Wanddicke  $h$  ist konstant, die Belastung  $p$  eine stetige Funktion von  $x$  und  $\alpha$ . Ihre Komponenten werden mit  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  bezeichnet. Die Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche im Sinne der drei in Abb. 834 eingetragenen Achsen sind  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte an dem differentialen Abschnitt

Abb. 834

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx r d\alpha + \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha dx + p_x dx r d\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha dx + \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial x} dx r d\alpha + p_y dx r d\alpha = 0,$$

$$N_\alpha dx d\alpha + p_z dx r d\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + p_y = 0, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\alpha}}{r \partial \alpha} + p_x = 0, \quad N_\alpha + p_z r = 0. \quad (1262)$$

Die Schnittkräfte können daher unabhängig voneinander berechnet werden.

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -r p_z, & N_{x\alpha} &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} dx - \int p_y dx + C_1(\alpha), \\ N_x &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\alpha}}{\partial \alpha} dx - \int p_x dx + C_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1263)$$



Die Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  sind unabhängig von  $x$ , aber Funktionen von  $\alpha$ , und daher nur durch Randbedingungen für  $x = \text{const}$  bestimmt. Bei freier Auflagerung der Schale auf zwei Querstützen sind die Längskräfte  $N_x$  an den freien Rändern in  $x = \pm l$  Null; bei freier Auskragung der Schale sind Längskraft  $N_x$  und Schubkraft  $N_{\alpha x}$  am freien Rand Null. Randstörungen des Membranzustandes sind dabei aber nur dann ausgeschlossen, wenn die Dehnung von Schalenrand und Querstütze stetig ineinander übergehen. In allen anderen Fällen entstehen ebenso wie bei der Verbindung von Rotationsschale und Ringträger Biegungsspannungen, die sich allerdings ebenso wie dort nur auf eine schmale Randzone beschränken und daher keine große Bedeutung besitzen.

Der Verschiebungszustand der Mittelfläche ( $u, v, w$ ) läßt sich mit den als bekannt anzusehenden Schnittkräften aus den folgenden Beziehungen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_\alpha), & \varepsilon_\alpha &= \frac{\partial v}{r \partial \alpha} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}(N_\alpha - \mu N_x), \\ \gamma_{x\alpha} &= \frac{\partial u}{r \partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{\alpha x}. \end{aligned} \right\} (1264)$$

**Spannungszustand einer freitragenden Druckrohrleitung.**

1. Lösung für Eigengewicht  $p_x = 0, p_y = g \sin \alpha, p_z = g \cos \alpha$ .

Nach (1263) ist

$$N_\alpha = -a g \cos \alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -\frac{1}{a} \int a g \sin \alpha dx - g \int \sin \alpha dx + C_1 = -2 g x \sin \alpha + C_1.$$

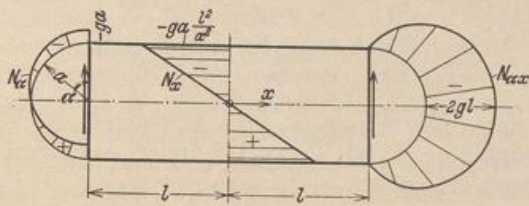


Abb. 835. Schnittkräfte infolge Eigengewicht.



Abb. 836.

Aus Symmetriegründen ist  $N_{\alpha x} = 0$  für  $x = 0$ , also  $C_1 = 0$ .

$$N_x = +\frac{1}{a} \int 2 g x \cos \alpha dx + C_2 = \frac{g}{a} \cos \alpha (x^2 + C_2).$$

Für  $x = l$  ist  $N_x = 0$ , also  $C_2 = -l^2$ . Die Schnittkräfte lauten nunmehr

$$N_\alpha = -g a \cos \alpha, \quad N_{\alpha x} = -2 g x \sin \alpha, \quad N_x = -g a \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \cos \alpha.$$

Sie sind in Abb. 835 dargestellt.

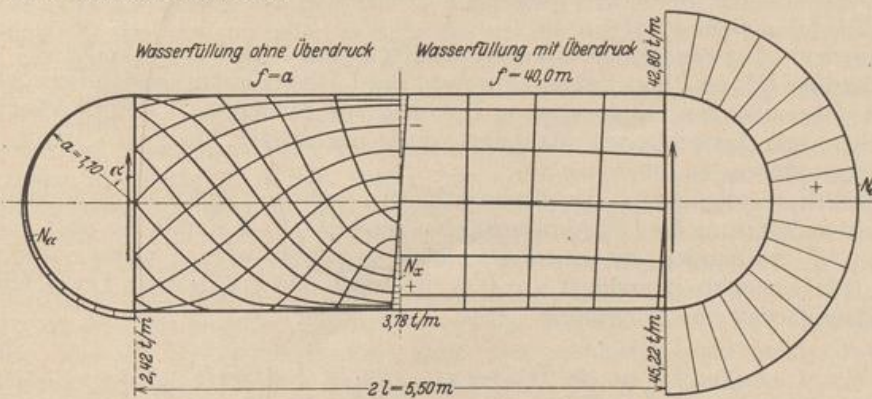


Abb. 837. Schnittkräfte und Spannungstrajektorien in einem Rohrabschnitt.



2. Lösung für Wasserüberdruck  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ ,  $p_z = -\gamma(f - a \cos \alpha)$  (Abb. 836). Die Integration nach (1263) liefert

$$N_\alpha = a^2 \gamma \left( \frac{f}{a} - \cos \alpha \right), \quad N_{\alpha x} = -\gamma a x \sin \alpha, \quad N_x = -\gamma \frac{l^2}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \cos \alpha.$$

Die Schnittkräfte und Spannungstrajektorien sind bei Wasserfüllung ohne Überdruck, also für  $f = a = 1,10$  m auf der linken Seite, bei Wasserfüllung mit  $f = 40,0$  m auf der rechten Seite der Abb. 837 eingetragen. Die Hauptspannungen werden also bei wachsendem Überdruck immer mehr zu Ringspannungen. Dabei wird die Durchbiegung des Rohres kleiner.

**Die Tonnenschale mit Querstützung.** Die Mittelfläche der Tonnenschale ist ein zum Meridianschnitt  $\alpha = 0$  symmetrischer Abschnitt einer Zylinderfläche mit parallelen Rändern  $\alpha = \alpha^* = \text{const}$ . Die Krümmung des Breitenschnittes  $1/r$  ist eine Funktion von  $\alpha$ , die Wanddicke  $h$  in der Regel konstant. Das Flächen-tragwerk ruht entweder auf allen vier Rändern oder trägt sich zwischen den Querwänden frei. Daneben sind auch noch andere Stützungsmöglichkeiten vorhanden.

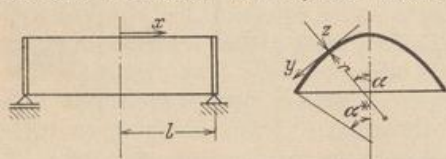


Abb. 838.

Die Belastung  $p$  wirkt stetig, wird aber im Hinblick auf die Anwendung im Bauwesen derart angenommen, daß  $p_x = 0$  und

$p_y, p_z$  allein stetige Funktionen von  $\alpha$ , also unabhängig von  $x$  sind. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (1263) lauten dann folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z r, & N_{\alpha x} &= -\left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) x + C_1(\alpha), \\ N_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{x}{r} \frac{\partial C_1(\alpha)}{\partial \alpha} + C_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1265)$$

Tragwerk und Belastung sind zum Querschnitt  $x = 0$  symmetrisch, so daß zur Berechnung der Integrationskonstanten  $C_1(\alpha), C_2(\alpha)$  bei freier Auflagerung der Ränder  $x = \pm l$  folgende Bedingungen gelten:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: & \quad N_{\alpha x} = 0 \quad \text{also} \quad C_1(\alpha) = 0, \\ x = \pm l: & \quad N_x = 0 \quad \text{also} \quad C_2(\alpha) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \frac{l^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1266)$$

Die Schnittkräfte sind daher

$$N_\alpha = -p_z r, \quad N_{\alpha x} = -\left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) x, \quad N_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{l^2 - x^2}{2} \right). \quad (1267)$$

Ist  $x = 0$  der freie Rand einer einseitig eingespannten Tonne mit  $N_x = 0, N_{\alpha x} = 0$ , so ist  $C_1(\alpha) = 0$  und  $C_2(\alpha) = 0$ .

An den Längsrändern  $\alpha^* = \text{const}$  werden in der Regel Längskräfte  $N_\alpha^*$  und Schubkräfte  $N_{\alpha x}^*$  an Randglieder abgegeben. Der Längsspannungszustand der Schale bleibt dabei aber nur erhalten, wenn Dehnung und Spannung in der Grenzschicht zwischen den benachbarten Bauteilen stetig ineinander übergehen, ohne daß Biegungsspannungen entstehen.

Sind die Endtangente des Breitenschnittes senkrecht ( $\alpha^* = 90^\circ$ ), so sind bei lotrechter Belastung die Längskräfte  $N_\alpha^*$  Null und daher am Rande nur noch Schubkräfte  $N_{\alpha x}^*$  vorhanden, die einem Randglied zugeführt werden müssen. Sie sind nach (1267) zum Breitenschnitt  $x = 0$  symmetrisch und erzeugen im Querschnitt  $x$  des Randliedes eine Längskraft

$$S = -\left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \int_l^x x dx = \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{l^2 - x^2}{2} \right). \quad (1268)$$



Die Längskräfte  $S$  der beiden Randglieder bilden mit den Längskräften  $N_x$  eines Querschnitts der Tonne eine Gleichgewichtsgruppe

$$S + \int_0^{\alpha^*} N_x r d\alpha = 0$$

und erhalten damit die Bedeutung der Biegungslängskraft eines Balkenträgers.

Die Form des Breitenschnittes steht mit dem Spannungszustand in einer Beziehung, die sich bei der Belastung der Tonne durch Eigengewicht  $g = \text{const}$  leicht verfolgen läßt, wenn der Parameter  $n$  in der Gleichung des Breitenschnittes  $1/r = 1/a \cdot \cos^n \alpha$  durch verschiedene ganze Zahlen ersetzt wird.  $n = 3$  liefert eine Parabel,  $n = 2$  eine Kettenlinie,  $n = 0$  einen Kreis und  $n = -1$  eine Zyklode. Mit  $p_x = 0$ ,  $p_y = g \sin \alpha$ ,  $p_z = g \cos \alpha$  ist dann

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -g a / \cos^{n-1} \alpha, \quad \text{die Bogenkraft} \quad H = -N_\alpha \cos \alpha = g a / \cos^{n-2} \alpha, \\ N_{x\alpha} &= -g x (2-n) \sin \alpha, \quad N_x = -g \frac{(2-n)}{a} \cos^{n+1} \alpha \frac{l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (1269)$$

a) Der Breitenschnitt ist eine Kettenlinie:  $n = 2$ .

$$H = g a = \text{const}, \quad N_{x\alpha} = 0, \quad N_x = 0, \quad S = 0. \quad (1270)$$

Die Tonne überträgt das Eigengewicht abgesehen von Randstörungen biegungsfrei nach den Bauteilen am Rande  $\alpha^* = \text{const}$ .

b) Der Breitenschnitt ist der Kettenlinie einbeschrieben:  $n > 2$ .

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem  $\alpha$  zu, die Schubkräfte  $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$  und die Längskräfte  $N_x$  sind positiv und daher  $S$  negativ.

c) Der Breitenschnitt ist gegen die Kettenlinie überhöht:  $n < 2$ .

Der Bogenschub nimmt mit wachsendem  $\alpha$  ab, die Schubkräfte  $N_{\alpha x} = N_{x\alpha}$  und die Längskräfte  $N_x$  sind negativ, die Längskraft  $S$  der Randglieder positiv. Bei Tonnen mit senkrechter Endtangente ( $N_x^* = 0$ ) wird das Eigengewicht vollständig nach den Querstützen abgetragen. Die Tonne wird zum Träger. Für freitragende Schalendächer mit Querstützung durch Wände oder Binder sind nur die überhöhten Breitenschnitte geeignet.

Nach diesen Untersuchungen kann das Gleichgewicht zwischen der stetigen Belastung einer Tonnenschale und den inneren Kräften eines Längsspannungszustandes nur in Verbindung mit einem Randglied hergestellt werden, dessen Längskraft  $S$  die Schubkräfte  $N_{\alpha x}$  am Rande der Schale  $\alpha^*$  aufnimmt und ausgleicht. Da jedoch der Sinn der Längskraft  $S$  des Randgliedes dem Sinne der Längskraft  $N_x$  des Schalenrandes stets entgegengesetzt ist, so kann sich in der Randzone kein Längsspannungszustand ausbilden. Die Unstetigkeit der Formänderung zwischen Schalenrand und Randglied bedeutet vielmehr stets Krümmungsänderungen durch Biegung. Sie sind um so größer, je mehr die mit der Angliederung besonderer Bauteile verbundene unstetige Gewichtsvermehrung die Annahmen über die äußeren Kräfte in den Gleichgewichtsbedingungen für den Längsspannungszustand verändert. Dabei ist zunächst noch immer ein Breitenschnitt mit senkrechter Endtangente angenommen worden. Die Verbindung von flachen Kreiszyinderschalen mit hohen Randträgern zwingt jedoch von vornherein ebenso wie die unstetige Belastung oder die unstetige Krümmung der Tonnenschalen dazu, die Biegungsspannungen des Flächentragwerks in den Vordergrund zu stellen. Dabei werden die Anschlußkräfte zwischen Träger und Schale in ähnlicher Weise wie bei den rotations-symmetrischen Schalen als die überzähligen Größen eines Hauptsystems betrachtet, das durch die Trennung der Randträger von der Schale entsteht. Die überzähligen Größen, also die Biegemomente, Längs- und Schubkräfte sind jetzt allerdings nicht mehr konstant, sondern Funktionen von  $x$ , die als periodische Funktionen in trigonometrischen Reihen entwickelt angenommen werden. Das Ergebnis entsteht

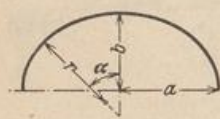


aber ebenso wie bei den biegungssteifen rotationssymmetrischen Schalen durch die Überlagerung des Längsspannungszustandes aus der vorgeschriebenen Belastung mit den Biegungsspannungen aus den überzähligen Größen, für deren Berechnung die geometrischen Bedingungen über die gegenseitige Verschiebung und Verdrehung der Ufer der Anschlußquerschnitte von Schalen und Randträger verwendet werden. Die Lösung des Problems ist von U. Finsterwalder gezeigt worden. Mit Rücksicht auf Platzmangel muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

1. Der Breitenschnitt ist eine Ellipse.

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht  $p_y = g \sin \alpha$ ;  $p_x = g \cos \alpha$ .



$$N_\alpha = -g a^2 b^2 \frac{\cos \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$N_{x\alpha} = -g x \frac{2 a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \sin \alpha,$$

$$N_x = -\frac{g l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \cos \alpha \frac{3 a^2 b^2 - 3 a^2 (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha - (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2}{a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}$$

Abb. 839.

Schnittkräfte aus Schneelast.  $p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $p_x = p_s \cos^2 \alpha$ .

$$N_\alpha = -p_s a^2 b^2 \frac{\cos^2 \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$N_{x\alpha} = -3 p_s a^2 x \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$N_x = \frac{3}{2} p_s \frac{l^2}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}}$$

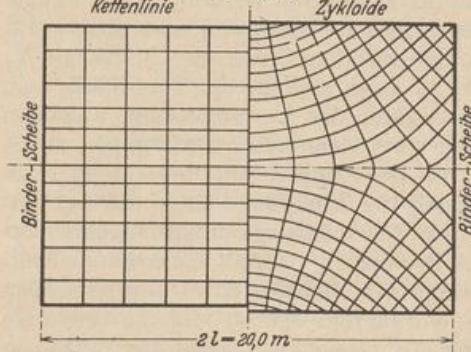
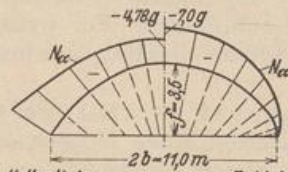


Abb. 840.

Gleichung der

Kettenlinie	Zykloide
$y = 8,28 - 4,78 \cos \frac{x}{4,78}$	$x = \frac{l}{2} (\varphi - \sin \varphi)$
$a = 4,78$	$y = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi)$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$
	$a = 2f$

2. Der Breitenschnitt ist eine Zykloide.

$$r = a \cos \alpha$$

Schnittkräfte aus Eigengewicht

$$p_y = g \sin \alpha, \quad p_x = g \cos \alpha$$

$$N_\alpha = -g a \cos^2 \alpha, \quad N_{x\alpha} = -3 g a \frac{x}{a} \sin \alpha,$$

$$N_x = -\frac{3}{2} g a \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

Die Schnittkräfte und Trajektorien sind in Abb. 840 mit denjenigen für eine Kettenlinie als Breitenschnitt verglichen worden.

Schnittkräfte aus Schneelast

$$p_y = p_s \sin \alpha \cos \alpha, \quad p_x = p_s \cos^2 \alpha$$

$$N_\alpha = -p_s a \cos^3 \alpha, \quad N_{x\alpha} = -4 p_s x \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$N_x = 2 p_s a \frac{l^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

Schwerin, E.: Über die Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen. Berlin 1918 und Arm. Beton 1919 S. 25. — Thoma, D.: Die Beanspruchung freitragender mit Wasser gefüllter Rohre. Z. ges. Turbinenwes. 1920 S. 17. — Schwerin, E.: Über die Spannungen in freitragenden gefüllten Rohren. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 340. —



Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nichtachsensymmetrischer Belastung. Ing.-Arch. 1929 S. 22. — Geckeler, J.: Zur Theorie der Elastizität flacher rotationsymmetrischer Schalen. Ing.-Arch. 1930 S. 255. — Rüsck, H.: Theorie der querversteiften Zylinderschalen für schmale, unsymmetrische Kreissegmente. Diss. München 1931. — Finsterwalder, U.: Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933) S. 43.

### 83. Vieleckkuppeln.

Die Breitenschnitte der zyklisch symmetrischen Tragwerke sind in der Regel Vielecke mit gerader Seitenzahl ( $2n$ ). Sie bilden  $n$  Tonnenschalen, die untereinander kongruent sind und sich gegeneinander in  $n$  Gratlinien abstützen. Die Krümmung des Querschnitts  $1/R_\beta$  kann sich beliebig ändern. Sie ist jedoch in der Regel mathematisch bestimmt, der Querschnitt also z. B. ein Kreisbogen, eine Ellipse oder eine Zyklode.

Der Schalensektor ist durch einen Rand  $\alpha = \alpha_2$  und durch zwei Gratlinien begrenzt, welche den Winkel  $2\varphi = \pi/n$  einschließen (Abb. 841). Sind die Randbedingungen für  $\alpha = \alpha_2$  nach S. 794 erfüllt und Randstörungen ohne Bedeutung, so erzeugt jede stetige Belastung allein Schnittkräfte  $N_\alpha$ ,  $N_{\alpha x}$ ,  $N_x$ . Die allgemeinen Angaben darüber auf S. 794 enthalten zwei Funktionen  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$  als Integrationskonstante, über die im Sinne des Längsspannungszustandes in den Graten so verfügt werden kann, daß die Hauptschnittkräfte mit der Tangente an die Gratlinien zusammenfallen und daher die Komponenten in Richtung der Haupt- und Binormalen Null sind. Die Anzahl  $2n$  der unbekanntenen Funktionen  $f(\alpha)$  stimmt mit der Anzahl  $2n$  der verfügbaren Bedingungengleichungen der Schale für den Längsspannungszustand des Tragwerks in den Graten überein. Die Grate erhalten daher bei jeder stetigen Belastung der Tonnen im wesentlichen nur Längskräfte.

Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen (1262) für eine Belastung aus  $p_x = 0$ ,  $p_y = p_y(\alpha)$ ,  $p_z = p_z(\alpha)$  liefert mit  $R_\beta \equiv r$

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -\left(\frac{\partial N_\alpha}{R_\beta \partial \alpha} + p_y\right) x + f_1(\alpha) = -p_y^* x + f_1(\alpha), \\ N_x &= \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} x^2 - \frac{\partial f_1(\alpha)}{R_\beta \partial \alpha} x + f_2(\alpha). \end{aligned} \right\} (1271)$$

Die Belastung ist entweder symmetrisch (Eigengewicht, Schneelast) oder antisymmetrisch (Windbelastung).

Die Unstetigkeit der Mittelfläche in den Gratlinien zwingt zur Zerlegung des Spannungsbildes. Der eine Anteil beschreibt die Tragwirkung der Tonne zur Übertragung der Belastung nach den Gratlinien, der andere die Tragwirkung der Kuppel zur Übertragung der Randkräfte in den Gratlinien nach den Stützpunkten und Randgliedern.

Lösung bei zyklisch symmetrischer Belastung.

Anteil I. Die Schubkräfte  $N_{\alpha x}$  sind in allen Symmetrieebenen, also auch in den Querschnitten  $x=0$  (Abb. 841) Null, so daß nach (1271)  $f_1(\alpha) = 0$ . Durch die Ausnutzung der Symmetrie ist in den Gratschnitten nur noch die Bedingung verfügbar, daß die Komponente  $B_\alpha$  der Hauptschnittkraft in  $x = l_\alpha$  in Richtung der Binormalen Null ist. Darnach gilt für den Grundriß eines differentialen Schalenteils (Abb. 842)

$$B_\alpha = (N_{\alpha,1} - 2N_{\alpha x,1} \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_{\alpha,1} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi) R_\beta d\alpha \cos \varphi = 0,$$

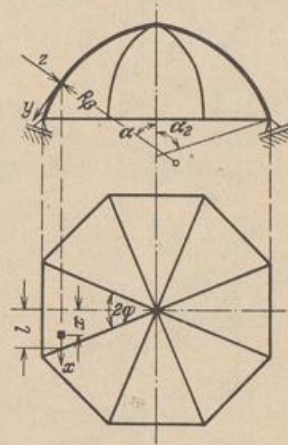


Abb. 841.

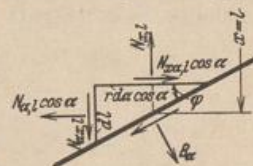


Abb. 842.



und mit (1271)

$$N_{\alpha x, l} = -p_y^* l, \quad N_{x, l} = \frac{\partial p_y^*}{2R_\beta \partial \alpha} l^2 + f_2(\alpha)$$

also

$$f_2(\alpha) = -\frac{l^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - 2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + p_z R_\beta \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (1272)$$

Die Trägerwirkung des Schalensektors besteht daher aus den Schnittkräften

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -p_z R_\beta, & N_{\alpha x} &= -p_y^* x, & N_x^{(T)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} - f_2(\alpha), \\ f_3(\alpha) &= +2p_y^* l \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + N_\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1273)$$

Sie sind jedoch nur durch die Längskraft  $Z_\alpha^{(T)}$  eines Zugliedes am Rande  $\alpha = \alpha_2$  im Gleichgewicht

$$Z_\alpha^{(T)} = +\frac{l^2 - x^2}{2} p_y^* + \int_0^{\alpha_2} f_3(\alpha) R_\beta d\alpha. \quad (1274)$$

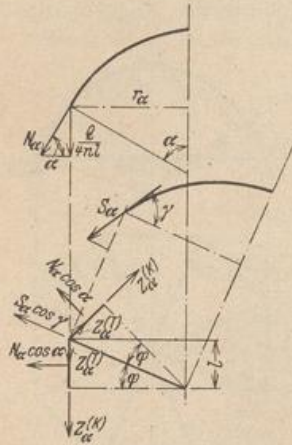


Abb. 843.

Anteil II. Der Spannungszustand durch die Kuppelwirkung des Tragwerks besteht aus Längskräften  $N_x^{(K)}$ , die von der nach den Graten abgetragenen Belastung hervorgerufen werden. Sie lassen sich nach (1096) am einfachsten als Zuwachs der Resultierenden  $Z_\alpha^{(K)}$  aller Längskräfte oberhalb eines Breitenschnittes  $\alpha$  berechnen.

Durch diesen werden neben der Resultierenden  $Q_\alpha$  der Belastung die Schnittkräfte  $N_\alpha$ ,  $Z_\alpha^{(T)}$  und die Längskraft  $S_\alpha$  in Richtung der Grattangenten zu äußeren Kräften, die miteinander im Gleichgewicht sind. Die Summe aller senkrechten Komponenten liefert  $S_\alpha$  (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha + 4nlN_\alpha \sin \alpha + 2nS_\alpha \sin \gamma &= 0, & \text{also mit } \sin \gamma &= 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}, \\ S_\alpha &= -\left(\frac{Q_\alpha}{2n} - 2p_z R_\beta r_\alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi\right) \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha / \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1275)$$

Zum Gleichgewicht der waagerechten Komponenten der Schnittkräfte  $S_\alpha$ ,  $N_\alpha$  mit der Schubkraft  $Z_\alpha^{(T)}$  an den Eckpunkten eines freien Breitenschnittes  $\alpha$  ist die Längskraft  $Z_\alpha^{(K)}$  eines Zugringes notwendig (Abb. 843).

$$\left. \begin{aligned} Z_\alpha^{(K)} + \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha + \int_0^\alpha f_3(\alpha) R_\beta d\alpha &= 0 \\ \text{und} \\ N_\alpha^{(K)} = -\frac{\partial Z_\alpha^{(K)}}{R_\beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left( \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) + f_3(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1276)$$

Durch die Überlagerung der Anteile I und II des Spannungszustandes entsteht die gesuchte Schnittkraft

$$\left. \begin{aligned} N_x = N_x^{(T)} + N_x^{(K)} &= -\frac{l^2 - x^2}{2} \frac{\partial p_y^*}{R_\beta \partial \alpha} + \frac{\partial}{R_\beta \partial \alpha} \left( \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha \right) \\ \text{mit} \\ \frac{S_\alpha \cos \gamma}{2 \sin \varphi} + r_\alpha N_\alpha \cos \alpha &= -\frac{Q_\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{2n \sin 2\varphi} + p_z R_\beta r_\alpha \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi}, & \varphi &= \pi/2n. \end{aligned} \right\} \quad (1277)$$

Eigengewicht:  $p_x = 0$ ,  $p_y = g \sin \alpha$ ,  $p_z = g \cos \alpha$ .

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \int_0^\alpha g R_\beta r_\alpha d\alpha = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha g}. \quad (1278)$$



Schneelast:  $p_x = 0$ ,  $p_y = p \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $p_z = p \cos^2 \alpha$ .

$$Q_\alpha = 4n \operatorname{tg} \varphi \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{p_0}{2} r_\alpha^2 = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} Q_{\alpha 2}. \quad (1279)$$

a) Der Meridian ist ein Kreisbogen (Abb. 844):

$$Q_{\alpha 1} = g a [a(1 - \cos \alpha) - c \alpha], \quad Q_{\alpha 2} = \frac{p_0}{2} (a \sin \alpha - c)^2. \quad (1280)$$

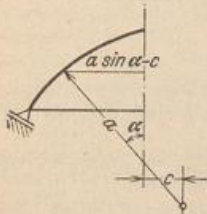


Abb. 844.

b) Der Meridian ist eine Zykloide (Abb. 845):

$$\left. \begin{aligned} Q_{\alpha 1} &= 2 g f^2 \left( \alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha - \frac{2}{3} \right), \\ Q_{\alpha 2} &= \frac{p}{8} f^2 (2\alpha + \sin 2\alpha)^2 \end{aligned} \right\} (1281)$$

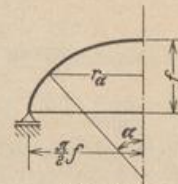


Abb. 845.

Ist die Meridiankurve anderweit festgelegt, so werden die Integrationen in Verbindung mit  $R_\beta d\alpha = ds \rightarrow \Delta s$  als Summe und die Differentialquotienten ebenso wie auf S. 763 angenähert als Differenzenquotienten berechnet.

**Berechnung einer Vieleckkuppel.**

Die Kuppel hat einen achteckigen Grundriß nach Abb. 841 mit  $2n = 8$ ,  $\varphi = \pi/8$  und einen Kreisquerschnitt mit dem Radius  $a = 20,5$  m. Die Belastung besteht aus Eigengewicht  $g = 0,20$  t/m<sup>2</sup>. Nach (1273) ist

$$N_\alpha = -g a \cos \alpha = -4,1 \cos \alpha,$$

$$N_{\alpha x} = -2 g x \sin \alpha = -0,4 x \sin \alpha,$$

oder für

$$x = l = a \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi;$$

$$N_{\alpha x}(x=l) = -3,39 \sin^2 \alpha.$$

Für den Kreisquerschnitt ist nach (1278) und (1280)  $Q_\alpha = 16 g a^2 (1 - \cos \alpha) \operatorname{tg} \varphi$  und die Längskraft in den Graten nach (1275)

$$S_\alpha = 2 g a^2 \operatorname{tg} \varphi [(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 1] \sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}}.$$

Die Ringkraft ist nach (1277) für  $x = 0$

$$N_{x(x=0)} = \frac{g a}{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \left[ 1 - \cos \alpha [1 + \sin^4 \alpha (\beta - \sin^2 \varphi)] \right].$$

Die Schnittkräfte sind in Abb. 846 dargestellt.

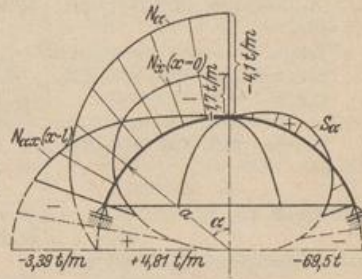


Abb. 846.

Dischinger, F.: Die Theorie der Vieleckkuppeln. Diss. Dresden und Beton u. Eisen 1929 S. 100.