



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

I. Die Grundlagen der Baustatik

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

# I. Die Grundlagen der Baustatik.

## 1. Aufgabe und Ziel.

Brauchbarkeit und Güte eines Bauwerks werden nach dem wirtschaftlichen Erfolg, nach der Sicherheit und der betrieblichen Eignung beurteilt. Sie hängen daher in vieler Beziehung von den physikalischen Eigenschaften des Bauwerks ab, welche durch den Baustoff, dessen Verarbeitung und durch die Gestaltung des Tragwerks bestimmt werden. Die technische und wissenschaftliche Erkenntnis ist in der jüngsten Zeit auf allen diesen Gebieten wesentlich vorwärtsgeschritten, so daß die Forderungen der Gegenwart an die Zuverlässigkeit des betrieblichen Erfolges ebenfalls erweitert worden sind. Er wird nicht mehr allein nach der Festigkeit des Bauwerks unter vorgeschriebenen äußeren Kräften, sondern oft auch nach den kinetischen, akustischen und thermodynamischen Eigenschaften des Tragwerks beurteilt.

Zum Nachweis der Sicherheit des Tragwerks gegen Zerstörung dient der Festigkeitsbegriff. Er wird ebenso auf das Gefüge des Baustoffes wie auf die summarische Zusammenfassung aller durch Gestaltung und Ausführung bestimmten Eigenschaften des Bauwerks angewendet. Der Bruch bedeutet physikalisch die Überwindung der Kohäsion und plastischen Verformbarkeit des Baustoffes durch innere Kräfte  $\Delta K$ , welche durch die Belastung hervorgerufen worden sind. Sie werden auf ein Flächenteilchen  $\Delta F$  des stetig angenommenen Mittels bezogen. Der Quotient der beiden gerichteten Größen  $\Delta K/\Delta F$  erhält nach einem Grenzübergang für  $\Delta F = 0$  die Bezeichnung Spannung. Ihre Komponenten winkelrecht und parallel zu  $\Delta F$  sind die Normalspannung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$ .

Die Spannungen sind an zwei gegenüberliegenden Punkten der beiden Ufer eines Querschnitts gleich groß und entgegengesetzt gerichtet. Sie bilden einen Tensor, mit dessen Transformation auf die veränderliche Richtung des Flächenteils  $\Delta F$  eines differentialen Tetraeders 3 Hauptspannungsrichtungen und 3 Hauptschubspannungsrichtungen bestimmt werden. Diese dienen zur Beschreibung des Spannungszustandes und damit auch zur Beschreibung der Festigkeit von Baustoff und Tragwerk.

Der Spannungszustand wird zum Teil durch die Eigenspannungen aus der Herstellung und Verarbeitung des Baustoffes, im wesentlichen jedoch durch äußere Kräfte erzeugt, welche dem Tragwerk als Lasten und Stützkkräfte eingeprägt sind. Daher ist die ausführliche und physikalisch einwandfreie Diskussion der äußeren Kräfte für die Sicherheit und für die wirtschaftliche Gestaltung eines Bauwerks von grundlegender Bedeutung. Sie kann oft nur durch Idealisierung von Belastung und Stützung erreicht werden. Hierbei trennen sich unter Umständen die Wege, welche die Technik im Gegensatz zur Wissenschaft einschlägt.

Die Beurteilung der Sicherheit als Ziel jeder baustatischen Untersuchung beruht hiernach auf der Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Tragwerks für einen physikalisch idealen Baustoff und vorgeschriebene äußere Ursachen.



## 2. Die Belastung des Tragwerks.

**Physikalische Kennzeichnung der Belastung.** Die Belastung des Tragwerks gilt in der Regel als unabhängig von der Zeit. Sie umfaßt ständige oder zufällige Lasten und Verkehrslasten, die sich relativ zum Bauteil bewegen. Die Lasten sind also dauernd in Ruhe oder werden so langsam eingetragen, daß die Geschwindigkeit der eintretenden Formänderung des Tragwerks vernachlässigt werden kann. Diese Voraussetzung ist bei einer plötzlichen Belastung nicht mehr erfüllt. Die elastischen Kräfte des Bauteils sind in diesem Falle nicht mehr im Gleichgewicht mit der Belastung, so daß freie Schwingungen mit den für den Bauteil charakteristischen Eigenfrequenzen entstehen. Dasselbe gilt bei der Eintragung von kinetischer Energie durch fallende Körper, durch die plötzliche Änderung der Fahrzeuggeschwindigkeit bei Brücken und durch Kurzschluß bei Turbinenfundamenten.

Von besonderer Bedeutung sind die periodisch veränderlichen Kräfte, welche durch Fahrzeuge und durch die hin- und hergehende oder drehende Bewegung von Maschinenteilen hervorgerufen werden. Sie vermögen unter Umständen selbst bei geringer Größe die Anfangsbewegung der Formänderung zu erzwungenen Schwingungen aufzuschaukeln und damit elastische Kräfte hervorzurufen, welche einem Vielfachen der ruhenden Last entsprechen und den Zusammenbruch des Bauwerks herbeiführen.

Die Lasten werden nach ihrer Ursache in eingeprägte Kräfte (Eigenschwere, Windkräfte, Wasserdruck, Erddruck) und Trägheitskräfte im Sinne des d'Alembertschen Prinzips (Fliehkräfte geführter Fahrzeuge, Massenkräfte bewegter Maschinenteile) unterschieden. Hierzu treten Zwangskräfte aus dem physikalischen Verhalten der Baustoffe, welche durch Erhärten, Schwinden, Quellen, durch Wärmeübergang und Wärmeabfall bei gleichförmiger oder ungleichförmiger Temperaturänderung und durch die erzwungene Verschiebung eines Punktes hervorgerufen werden.

Die eingeprägten Kräfte werden als Massenkräfte  $b \, dm$  auf die Masse  $dm$ , als Flächenkräfte  $p \, dO$  auf das Differential  $dO$  der Oberfläche des Körpers bezogen. Die Flächenkraft ist gleichförmig verteilt oder als beliebige stetige und unstetige Funktion der Koordinaten der belasteten Fläche gegeben. Ist diese klein, so wird meist die resultierende Kraft  $\int p \, dO$  als Punkt- oder Einzellast verwendet. Diese Idealisierung vereinfacht die Untersuchung und genügt nach dem St. Venantschen Prinzip zur Beschreibung der Festigkeit in dem der Belastung nicht unmittelbar benachbarten Bereich des Tragwerks. Der Spannungszustand nächst dem Lastangriff bedarf stets einer besonderen Untersuchung. Sie wird in der Regel durch eine summarische Abschätzung ersetzt, welche die einwandfreie konstruktive Ausgestaltung ermöglicht. In vielen Fällen sind die bei der Übertragung von Einzellasten zu beachtenden Annahmen durch behördliche Bestimmungen vorgeschrieben (Best. A § 19, Din 1075 § 6). Trotzdem kann unter Umständen die eingehende Untersuchung über die Eintragung notwendig oder nützlich sein. Das Ergebnis hängt von den elastischen oder plastischen Eigenschaften des Zwischenmittels und von den elastischen Eigenschaften des Tragwerks ab. Flächen- und Einzellasten werden entweder unmittelbar oder mittelbar durch Zwischenkonstruktionen in das Bauwerk eingetragen.

**Die Definition der Belastung in den amtlichen Bestimmungen.** Die ruhende oder ständige Belastung eines Tragwerks besteht im wesentlichen in der Eigenschwere der Bauteile und der Ausrüstung des Tragwerks. Ihre Größe ist in jedem Lande durch amtliche Bestimmungen der Bau- oder Verwaltungsbehörden vereinbart. Schnee- und Windbelastung oder Wasserdruck, Erddruck und der Boden- oder Seitendruck eines Füllgutes gelten als zufällige Lasten, deren Lage zum Bauwerk als unveränderlich angenommen wird. Größe und Richtung sind physikalisch bekannt oder werden auf Grund von Versuchen abgeschätzt. Im Gegensatz hierzu



können die Nutzlasten jede Stellung zum Tragwerk in beliebiger oder vorgeschriebener Aufteilung einnehmen.

Die Bestimmungen über die in Preußen bei Hochbauten anzunehmenden Lasten sind durch den Erlaß des Ministeriums für Volkswohlfahrt vom 24. 12. 1919 festgesetzt und später erweitert worden. In anderen Ländern gelten ähnliche Vorschriften.

Die Belastung von Straßenbrücken ist mit Din 1071 und 1072 vereinbart, die Berechnungsgrundlagen für Eisenbahnbrücken durch die B. E. der Deutschen Reichsbahngesellschaft (II. Auflage 1930) vorgeschrieben worden. In diesen werden Hauptkräfte, Wind- und Zusatzkräfte unterschieden. Die Verkehrslasten richten sich nach der Brückenklasse. Die Seitenkräfte aus der Bewegung der Fahrzeuge und dem Strömungswiderstand der Bauteile bei Wind, also Größe und Verteilung des Winddruckes sind hier nach Erfahrung und Messung festgesetzt worden. Die besonderen Vorschriften zum Festigkeitsnachweis massiver Brücken werden in Din 1075 behandelt.

Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und über die zulässigen Beanspruchungen der Baustoffe. Elfte ergänzte Auflage. Berlin 1932. — Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton (Din 1044—1048). Berlin 1932. — Berechnungsgrundlagen für massive Brücken (Din 1075). Berlin 1930. — Belastungsannahmen für Straßenbrücken (Din 1072). Berlin 1926. — Richtlinien für die Überwachung und Prüfung massiver Straßenbrücken (Din 1077). Berlin 1932. — Berechnungsgrundlagen für eiserne Eisenbahnbrücken (BE). Ausgabe 1930. — Grundlagen für die Berechnung der Standfestigkeit hoher, freistehender Schornsteine (Din 1056) Ausgabe 1929. — Vorschriften für Starkstrom-Freileitungen 1928.

### 3. Schnee- und Windbelastung.

Die Angaben über Schneebelastung bedürfen keiner Erläuterung. Sie können mit einfachen Messungen nachgeprüft und für außergewöhnliche meteorologische Verhältnisse abgeändert werden.

Die Vorschriften über den Winddruck auf Bauwerke beruhen auf der Größe und Verteilung des Widerstandes  $W$ , den ein Körper in einer gleichmäßigen Strömung erzeugt. Er wird nach dem folgenden Ansatz berechnet:

$$W = \zeta \frac{\rho}{2} v^2 \Phi. \quad (1)$$

In diesem bedeuten  $\Phi$  den Querschnitt des angeströmten Körpers,  $\rho = \gamma/g$  die Dichte des strömenden Mittels. Sie beträgt für Luft im Durchschnitt  $0,125 \text{ kg sek}^2/\text{m}^4$ .  $\zeta$  ist ein von der Form des angeströmten Körpers abhängiger Beiwert,  $v$  die Geschwindigkeit der ungestörten Luftströmung. In der Natur werden Böengeschwindigkeit und größte mittlere Geschwindigkeit der Windströmung gemessen. Während die Böengeschwindigkeit für die Festigkeit der Bauteile maßgebend ist, kommt für die Stabilität der Bauwerke nur die mittlere Windgeschwindigkeit in Betracht. Man rechnet im Binnenlande unter Einhaltung einer von den Verwaltungsbehörden für beide Fälle verschieden groß vorgeschriebenen Sicherheit mit  $v = 35 \text{ m/sek}$ , wenn auch hier in Bodennähe Böengeschwindigkeiten von  $50 \text{ m/sek}$ , im Küstengebiet sogar von  $60 \text{ m/sek}$  festgestellt worden sind. Die Frequenz der Windstöße ist mit  $n = 24$  bis  $40/\text{Minute}$  gemessen worden.

Der Beiwert  $\zeta$  wird durch Modellversuche im Windkanal bestimmt. Die Größe von  $\zeta$  hängt von dem Verlauf der Strömung im sogenannten Totwassergebiet des Körpers ab. Sie ist um so kleiner, je besser das Totwassergebiet durch die Form des Körpers oder auch durch die zunehmende Geschwindigkeit  $v$  der Strömung belüftet wird. In der Regel wird bei dem Nachweis von Stabilität und Festigkeit der Bauwerke mit einem Mittelwert von  $\zeta = 1,6$  gerechnet und damit ein Körperwiderstand von

$$W = 0,1 v^2 \Phi = 125 \Phi \text{ in kg, } \Phi \text{ in m}^2 \quad (2)$$

erhalten.



Mit der Ermittlung des Körperwiderstandes ist nichts über die Verteilung der Kraft über den Umfang des angeströmten Körpers bekannt. Sie besteht aus positiven und negativen Bereichen, die sich mit der Windgeschwindigkeit ändern und unter Umständen durch Ablösung der Strömung zu Spitzen entwickeln. In der Literatur sind nur Messungen an einzelnen kleinen Modellen veröffentlicht worden. Sie zeigen bereits die Schwierigkeiten, denen allgemeine Angaben über die Verteilung des Strömungswiderstandes am Körperumfang begegnen. Aus diesem Grunde begnügt man sich mit dem einfachsten Ansatz, setzt dabei allerdings stillschweigend voraus, daß der Winddruck als eingeprägte Kraft im Festigkeitsnachweis gegenüber den anderen Lasten zurücktritt. Schließen die angeströmte Fläche  $F$  und die Strömungsrichtung miteinander den Winkel  $\varphi$  ein, so verwenden die amtlichen Bestimmungen

$$W_{\varphi} = 0,1 v^2 F \sin^2 \varphi = 125 F \sin^2 \varphi \text{ in kg, } F \text{ in m}^2. \quad (3)$$

Bei modernen Großbauten, wie Kühl- und Wassertürmen, Kuppelbauten, Hochhäusern und Schornsteinen, welche ihre Umgebung hoch überragen, ist stets eine eingehende Untersuchung über die Größe und Verteilung des Körperwiderstandes am Platze, zumal die allgemeinen Angaben nur für gleichförmige Strömung gelten. Die ungünstigsten Strömungen werden unter Umständen auch senkrecht nach aufwärts oder abwärts gerichtete Komponenten des Winddrucks ergeben.

Eiffel: Resistance de l'air et l'ariation. Paris 1910. — Sonntag: Windsaugwirkungen. Zbl. Bauverw. 1916 und 1920. — Prandtl, L.: Neuere Einsichten in die Gesetze des Luftwiderstandes. Berlin 1921. — Buchegger: Windgeschwindigkeit und Winddruck. Bauing. 1922, S. 491. — Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lfg. München 1923. — Busch: Die Aufgabe des Bauingenieurs in der Winddruckfrage. Bauing. 1924. — Bilau, K.: Die Windkraft in Theorie und Praxis, im Jahrbuch der Deutschen Gesellschaft für Bauingenieurwesen 1927. Berlin 1927. — Vorläufiger Auszug aus Göttinger Messungen, im Jahrbuch der Deutschen Gesellschaft für Bauingenieurwesen 1928 S. 87; 1929 S. 160. — Schmidt, W.: Die Struktur des Windes. Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1929. — Flachsbar, O.: Winddruck auf Bauwerke. Naturwiss. 1930 S. 475. — Derselbe: Winddruck auf Schornsteine. Naturwiss. 1931 S. 759. — Derselbe: Winddruck auf vollwandige Bauwerke und Gitterfachwerke. Abhandlg. der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau Bd. 1 (1932). — Derselbe: Geschichte der experimentellen Hydro- und Aeromechanik Bd. 4 (1932). — Derselbe: Winddruckmessungen an einem Gasbehälter. 3. Lief. d. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen. — Derselbe: Modellversuche über den Winddruck auf geschlossene und offene Gebäude. 4. Lief. d. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen. 1932. — Dürbeck: Die Windverteilung bei amerikanischen Wolkenkratzern. Bautechn. 1932.

#### 4. Wasserdruck.

Der Druck des Wassers ist in ruhendem Zustand winkelrecht zur Begrenzung des Bauwerks gerichtet und mit der Wassertiefe verhältnismäßig. Er erzeugt durch das in den Baukörper eindringende Wasser Auftrieb und pflanzt sich im Grundwasser als Sohlendruck fort.

Die auf die Volumeneinheit bezogene Auftriebskraft  $\gamma_a$  entsteht nur durch den Druckunterschied an den undurchlässigen Zuschlagstoffen des Baukörpers. Ist  $\mu$  deren auf 1 m<sup>3</sup> bezogener Anteil,  $(1 - \mu)$  der Anteil des Bindemittels und  $\bar{\epsilon}$  die auf 1 m<sup>3</sup> des Baukörpers bezogene Wasseraufnahme, so beträgt

$$\gamma_a = \mu \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \mu}. \quad (4)$$

Die Mitwirkung des Wassers als Auftrieb  $\gamma_a$  wird in der Regel durch die Ausführung des Bauwerks ausgeschlossen. Die gleiche Auffassung wird von dem Talsperrenausschuß des Deutschen Wasserwirtschafts- und Wasserkraftverbandes vertreten.

Der Sohlendruck des Wassers erzeugt eine für die Stabilität zahlreicher Bauwerke wichtige äußere Kraft, deren Größe und Lage von der Druckverteilung und daher von der geologischen Beschaffenheit des Gebirges und von der Abdichtung oder Verherdung des Baugrundes abhängt. Bei durchlässigem Kies- und Sandboden



oder spaltenreichem Gebirge wird der hydrostatische Druck auf der ganzen Grenzfläche übertragen. Bei Felsuntergrund hängt der auf eine Fläche  $F$  bezogene mittlere Sohldruck, abgesehen von allgemeinen geologischen Verhältnissen, von der Zerklüftung des Untergrundes und von der Wirkung einer Sohlenentwässerung ab. Er wird als Produkt aus der Druckintensität und dem belasteten Flächenteil  $\alpha F$  bestimmt.

Der Druckabfall quer zur Achse wird bei Talsperren linear angenommen. Man setzt den Sohldruck an der Wasserseite gleich dem hydrostatischen Druck und an der Luftseite Null. Der Beiwert  $\alpha$  hängt ab von dem Spaltenreichtum des Gebirges und von der Güte des Anschlusses zwischen Felsen und aufgehendem Mauerwerk, also vom Druckabfall durch die Reibung des Wassers in den Poren. Er ist für die Abmessungen des Mauerquerschnittes von großer Bedeutung und muß durch Vorarbeiten sorgfältig bestimmt werden. In den Vorschlägen des Talsperrenausschusses des Deutschen Wasserwirtschafts- und Wasserkraftverbandes und in behördlichen Bestimmungen ist bei guten, mittleren oder weniger guten, natürlichen Verhältnissen  $\alpha = 0,2$  oder  $0,3$  oder  $0,4$  vorgesehen.

Lickfeld: Zbl. Bauverw. 1898. — Fillunger: Der Auftrieb in Talsperren. Öst. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst 1913. — Kammüller, K.: Die Theorie der Staumauern. Berlin 1929. — Mitteilungen des Deutschen Wasserwirtschafts- und Wasserkraftverbandes Nr. 28 (1930).

### 5. Erddruck.

Die Theorie des Erddrucks behandelt das Gleichgewicht lockerer Erdmassen mit idealisierten physikalischen Eigenschaften im Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung. Der Widerstand  $\tau^*$  gegen die relative Bewegung der Bestandteile aus der Kohäsion und der inneren Reibung der Schüttung wird längs eines Gleitlinienfeldes erschöpft. Gleichgewicht ist so lange vorhanden, als die Schubspannung längs einer Gleitfläche

$$\tau < \tau^* = \mu_0 \sigma + \tau_0 = \sigma \mu = \sigma \operatorname{tg} \varphi. \quad (5)$$

$\tau = \tau^*$  heißt Fließbedingung.  $\tau_0$  ist der Anteil des Schubwiderstandes aus der Kohäsion,  $\mu_0$  der Beiwert der Coulombschen Reibung. Er hängt von der Oberflächenbeschaffenheit und von dem Strukturwiderstand der Bestandteile ab. Der Winkel  $\varphi$  wird als Winkel der inneren Reibung bezeichnet.

Die Fließbedingung bestimmt mit den statischen Gleichgewichtsbedingungen und den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen (Abschnitt 8) die Form der Gleitflächen und den Spannungszustand an der Fließgrenze. Die Randwerte  $(\sigma \mp \tau) dF$  längs des stützenden Körpers werden bei der Untersuchung der Stabilität der Stützmauer als äußere Kräfte verwendet. Leider gelingt die Integration des Ansatzes nur in einfachen Fällen. Man ist daher im Bauwesen durch die mannigfache Art der Aufgaben und durch die physikalischen Eigenschaften des gewachsenen oder angeschütteten Erdbodens zur Vereinfachung der Theorie gezwungen. Sie stützt sich auf unmittelbare Beobachtung und Annahmen über den Bewegungsvorgang. Diese sind hier ebenso zulässig wie bei anderen technischen Aufgaben, deren Lösung durch Versuche als qualitativ richtige und quantitativ brauchbare Näherung bestätigt wird. Dabei tritt das statische Problem zurück. Die Gleitflächen werden nicht wie in der strengen Theorie berechnet, sondern als ebene oder gekrümmte Flächen mit Kreis oder logarithmischer Spirale als Leitkurve angenommen. Nebenher sind auch Methoden zur Beschreibung des Spannungszustandes im unbegrenzten Erdkörper angegeben worden, von denen diejenigen von W. I. M. Rankine und O. Mohr am meisten Beachtung gefunden haben. Die Beziehungen zwischen den physikalischen Eigenschaften des Erdbodens und dessen innerem Widerstand sind namentlich in der jüngsten Zeit geklärt worden.

**Physikalische Voraussetzungen.** Die Standsicherheit einer Stützmauer oder eines Bauwerks mit gleicher Zweckbestimmung beruht auf dem Gleichgewicht der

*verbal. addiert*



äußeren Kräfte, welche im Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung an einem durch Gleitflächen begrenzten Erdkörper angreifen. In diesem Falle ist  $\tau = \tau^* = \sigma \operatorname{tg} \varphi$ . Die inneren Kräfte werden in Normalkräfte  $\sigma dF$  und Schubkräfte  $\tau^* dF$  zerlegt und im Bereich der einzelnen Abschnitte der Begrenzung zu Mittelkräften zusammengefaßt, um damit die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien, vom Erdkörper losgetrennten Erdprismas zu untersuchen. Auf diese Weise kann die Standsicherheit von Böschungen, Spundwänden, Pfahlrosten und die Stabilität von Gründungen geprüft werden. Bei zahlreichen anderen Aufgaben wird der angreifende Teil der Randkräfte  $(\sigma \hat{+} \tau^*) dF$  von dem widerstehenden Teil getrennt und einzeln als aktiver und passiver Erddruck nach Größe, Richtung und Lage bestimmt, um aus dem Vergleich der Kräfte auf die Standsicherheit des Bauwerks zu schließen.

Der Grenzzustand der Bewegung hängt vom Gewicht und von der Schubfestigkeit des abgestützten Mittels ab. Diese wird in der Regel auf den Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  (S. 5) bezogen, den die Richtung der resultierenden Spannung  $\sigma \hat{+} \tau^*$  im Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung mit der Normalen zur Gleitfläche einschließt. Die Schubfestigkeit von Kiesen und Sanden beruht fast allein auf dem Strukturwiderstand, bei bindigen Böden außerdem noch auf der Kohäsion des Mittels. Hierbei spielen neben der Lagerung, Verdichtung und dem Porengehalt des Mittels vor allem die Molekularkräfte eine Rolle, die von dem Porenwasser hervorgerufen werden. Daher hängt die Schubfestigkeit auch von der Wasserdurchlässigkeit, der Wasseraufnahme und Wassersättigung ab. Sie ist eine Funktion der Normalspannung und sinkt mit zunehmendem  $\sigma$ . In jedem Falle sind die ungünstigsten Verhältnisse maßgebend, um einer Gleichgewichtsstörung mit Sicherheit durch ausreichende Standfestigkeit des Bauwerks zu begegnen. Die Bodenkonstanten werden daher bei unklaren Verhältnissen stets durch Versuche geprüft.

Im Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung bilden die differentialen Kräfte  $(\sigma \hat{+} \tau) dF$  längs der Stützwand mit der Normalen einen Winkel  $\delta'$ , dessen Grenzwert durch Versuche bestimmt werden kann, jedoch stets auch von den Bewegungen der Wand, von der Erschütterung und Wassersättigung des Erdkörpers und von der Grundwasserbewegung abhängig ist. Er ist kleiner als der Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  und kann ohne nähere Angaben bei günstigen örtlichen Verhältnissen mit  $0,6 \varphi$  geschätzt werden. In anderen Fällen wird  $\delta' = 0,5 \varphi$ ,  $\delta' = 0,3 \varphi$  oder auch  $\delta' = 0$  angenommen. Er ist für den Betrag des Erddrucks ohne große Bedeutung, dagegen für die Beurteilung der Stabilität der Stützmauer wichtig.

**Ansatz für die angenäherte Berechnung nach Coulomb und Poncelet.** Die Stützmauer gilt in der statischen Untersuchung als unendlich lang, so daß sich die Kräfte in Schnitten senkrecht zur Längsachse nicht ändern. Die ebene Gleitfläche der Anfangsbewegung schneidet die Bildebene in einer geraden Gleitlinie. Sie schließt mit der Wand und der Geländeoberfläche ein Erdprisma ein, dessen Elemente im Grenzzustand ein ruhendes Massensystem bilden. Die äußeren Kräfte an dem Erdprisma sind daher ebenso wie am starren Körper im Gleichgewicht. Zu ihnen zählen das Eigengewicht des Erdprismas, die Auflasten und die Mittelkräfte von  $(\sigma \hat{+} \tau) dF$  an den Gleitflächen im Erdkörper und längs der Wand.

Die resultierende Flächenkraft  $E$  bildet im Grenzzustand an jedem geraden Abschnitt der Wandlinie mit der Normalen den Winkel  $\delta'$  (Abb. 1) der ruhenden Reibung zwischen Erde und Mauerwerk. Sie ist eine Funktion physikalischer Konstanten. Die Richtung der Mittelkraft  $Q = \int (\sigma \hat{+} \tau) dF$  an der Gleitfläche ist durch das Verhältnis zwischen Schubspannung und Normalspannung  $\tau/\sigma = \operatorname{tg} (\pm \delta)$ , im Grenzfall  $\tau^*/\sigma = \operatorname{tg} (\pm \varphi)$  bestimmt. Das Vorzeichen ergibt sich aus dem Richtungssinn der Schubspannungen, also aus der Richtung der im Grenzfall eintretenden Bewegung. Das positive Vorzeichen ( $+ \varphi$ ) wird dem aktiven Erddruck  $E_a$  in



Richtung auf den stützenden Wandteil, das negative Vorzeichen ( $-\varphi$ ) dem passiven Erddruck  $E_p$  zugeordnet, welcher bei einer Bewegung der Stützmauer gegen den Erdkörper von diesem aufgenommen wird.

Die Ebene  $AC$  mit dem beliebigen Winkel  $\lambda$  begrenzt nach Abb. 1 ein Erdprisma von der Tiefe 1 m und dem Gewicht  $G(\lambda)$ . Der Erddruck  $E(\lambda)$  wird nach Größe und Richtung aus der Zerlegung von  $G$  nach  $E$  und  $Q$  gefunden. Im Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung ist mit  $\delta = \varphi$

$$E_p = G \frac{\sin(\lambda \mp \varphi)}{\sin(\lambda + \varphi \mp \varphi)}. \quad (6)$$

Der Betrag der Kraft  $E$  kann bei Annahme eines beliebigen Querschnittes  $AC_k$  als Gleitfläche durch Drehung der Abb. 1b ( $\delta = \varphi$ ) um  $(90 - \varphi)^0$  zeichnerisch im Lageplan angegeben werden (Abb. 2). Das Gewicht  $G$  des Erdprismas  $ABC_k$  und seiner Auflast erscheint dann auf dem freien Schenkel des von der Horizontalen aus aufgetragenen Winkels  $\varphi$ , der Böschungslinie. Die Kraft  $Q$  bildet mit  $G$  den Winkel  $(\lambda - \varphi)$ , liegt also auf  $AC_k$ , während die Kraft  $E$  mit der Böschungslinie den Winkel  $\psi$  einschließt. Diese Richtung wird als Stellungslinie bezeichnet. Sie wird als freier Schenkel eines Winkels  $(\varphi + \delta')$  erhalten, den diese Richtung mit der Wandlinie  $BA$  einschließt ( $\psi = \varphi - \delta'$ ). Der Schnittpunkt der Krafrichtungen von  $E$  und  $Q$  beschreibt bei veränderlichem Winkel  $\lambda$  eine stetige oder unstetige Linie, die als Culmannsche Erddrucklinie bezeichnet wird. Die zur Böschungslinie parallele Berührende an die Erddrucklinie liefert den Grenzwert der Kraft  $E$  und die Gleitlinie  $AC_0$  ( $\lambda = \lambda_0$ ). Diese begrenzt je nach Verwendung von  $+\varphi, +\delta'$  oder  $-\varphi, -\delta'$  das Prisma des größten aktiven Erddrucks  $E_a$  oder das Prisma des kleinsten passiven Erddrucks  $E_p$ , welcher zum Gleichgewicht der Kräfte nötig ist.

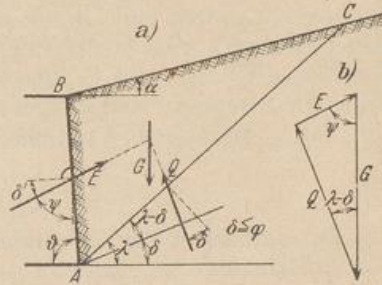


Abb. 1.

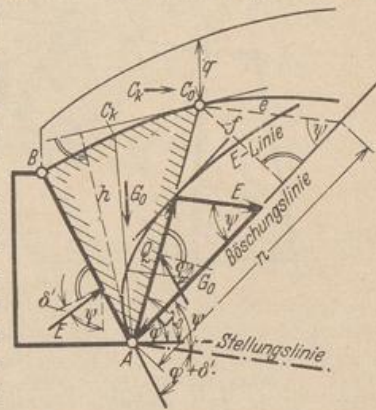


Abb. 2.

Das mathematische Kriterium ist bei einer stetigen Funktion  $G(\lambda)$

$$E_{\text{extrem}}: \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = \text{const}, \quad \text{also} \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0. \quad (7)$$

$E_a$  wird hiernach als unterer,  $E_p$  als oberer Grenzwert der Funktion  $E(\lambda)$  gefunden (Abb. 3). Die Kraft  $E_a$  oder  $E_p$  kann auch als konstanter, für die Stabilität der Stützmauer charakteristischer Wert angesehen werden, der mit dem Gewicht  $G(\lambda)$  und der Mittelkraft  $Q(\lambda)$  an dem beliebigen Erdprisma  $ABC$  im Gleichgewicht steht (Abb. 1). Die Mittelkraft  $Q(\lambda)$  bildet dann mit der Normalen zu  $AC$  einen mit  $\lambda$  veränderlichen Winkel  $\delta$ , der für  $\lambda = \lambda_0$  und  $AC \equiv AC_0$  zum Grenzwert  $\delta_{\text{extrem}} = \pm \varphi$  wird (Abb. 2). Der Querschnitt  $AC_0$  ist daher Gleitfläche. Dies bedeutet in Übereinstimmung mit (7) mathematisch:

$$\delta_{\text{extrem}}: \quad \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{und} \quad E = \text{const}, \quad \text{also} \quad \frac{dE}{d\lambda} = 0. \quad (8)$$

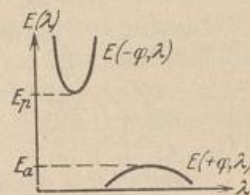


Abb. 3. Die Funktion des Erddrucks  $E(\lambda)$  bei vorgeschriebenem inneren Reibungswiderstand  $\pm \varphi$ .



Nach (6) und Abb. 2 ist für den aktiven Erddruck:

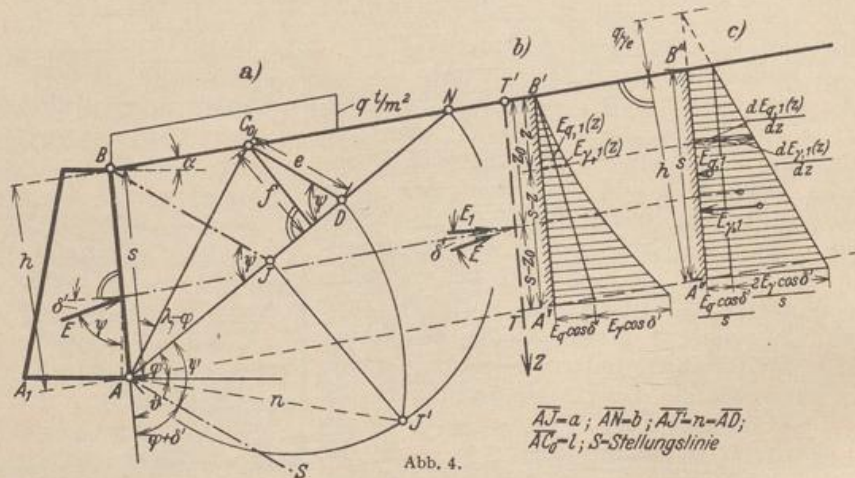
$$\frac{dE}{d\lambda} = G_0 \sin \psi + \frac{dG_0}{d\lambda} \sin(\lambda - \varphi) \sin(\lambda - \varphi + \psi) = 0;$$

$$G_0 = \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{2q}{h} \right) f n = \frac{1}{2} \gamma' f n \quad (\text{Rebhanscher Satz}). \quad (9)$$

$G_0$  ist das Gewicht eines durch  $AC_0$  abgetrennten Erdkeils mit allen darauf ruhenden Lasten. Es wird in der Regel auf 1 m Tiefe bezogen.  $\gamma$  in  $t/m^3$  bezeichnet das spezifische Gewicht der Erdmassen,  $q$  in  $t/m^2$  die Auflast im Punkt  $C_0$  der Geländelinie. Die Strecken  $f$  und  $n$  ergeben sich in Abb. 2 mit der Parallelen zur Stellungslinie in  $C_0$ , die Strecke  $h$  mit der Tangente zur Geländelinie in  $C_0$ . Nach (6) ist dann

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma' f n \frac{\sin(\lambda - \varphi)}{\sin(\lambda - \varphi + \psi)} = \frac{1}{2} \gamma' f e. \quad (10)$$

Die Brauchbarkeit der Coulombschen Annahme ebener Gleitflächen bei Erddruck auf Stützmauern ist durch Th. von Kármán nach der strengen Theorie (S. 5)



Beispiel:	$\alpha = 10^\circ,$	$q = 3,0 \text{ t/m}^2,$	$h = 6,0 \text{ m},$	Kraft bezogen auf 1 m Tiefe:
	$\vartheta = 85^\circ,$	$\gamma = 1,9 \text{ t/m}^3,$	$s = 6,21 \text{ m},$	$E_a = \frac{1}{2} \gamma' f e = 13,66 \text{ t},$
	$\varphi = 40^\circ,$	$\gamma' = 2,9 \text{ t/m}^3,$	$e = 3,17 \text{ m},$	$E_v = \frac{1}{2} \gamma' f e = 8,95 \text{ t},$
	$\delta' = 15^\circ,$	$q/\gamma = 1,58 \text{ m},$	$f = 2,97 \text{ m},$	$E_q = q f e/h = 4,71 \text{ t}.$

geprüft worden. Das Gleitlinienfeld ist dabei zunächst für eine raue lotrechte Wand und waagerechtes oder abfallendes Gelände und für die Fließbedingung (S. 5) berechnet worden. Das Ergebnis rechtfertigt die Annahmen der elementaren Theorie.

**Lösung bei gerader Wand- und Erdlinie.** Die Gleitlinie  $AC_0$  kann bei gerader Geländelinie und gleichförmig verteilter Nutzlast geometrisch bestimmt werden, da nach dem Rebhanschen Satze die Strecke  $\overline{AD} = n = \sqrt{ab}$  und  $DC_0$  zur Stellungslinie parallel ist. Die Aufgabe wird dann zeichnerisch folgendermaßen gelöst (Abb. 4).

Waagerechte Gerade durch den unteren Endpunkt  $A$  der Wandlinie  $AB$ , für welche der Erddruck angegeben werden soll. Auf dem freien Schenkel des Winkels  $\varphi$ , der Böschungslinie, wird die Strecke  $b = \overline{AN}$  durch die Geländelinie abgeschnitten. Die Parallele durch  $B$  zur Stellungslinie, die mit der Wandlinie den Winkel  $(\varphi - \delta')$  einschließt, schneidet  $AN$  im Punkte  $J$  ( $\overline{AJ} = a$ ). Die Strecke  $\overline{AD} = n$  wird als mittlere Proportionale zu den Strecken  $a$  und  $b$  konstruiert, so daß auch die Strecken  $e$  und  $f$  bekannt sind und  $E_a$  nach (10) angegeben werden kann. Um den passiven Erddruck  $E_p$  zeichnerisch zu bestimmen, werden die Winkel  $\varphi$ ,  $(\varphi + \delta')$ ,  $\delta'$  mit



negativem Vorzeichen verwendet, also in Abb. 4 nach der anderen Seite von  $AA_1$ ,  $AB$  und der Normalen zu  $AB$  angetragen.

Um den Betrag der Kraft  $E_a$  analytisch zu berechnen, werden die Strecken  $f$  und  $e$  durch  $h$  und die Funktionen der bekannten Winkel  $\vartheta$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$  und  $\delta'$  ausgedrückt. Das Ergebnis wird entweder auf  $\gamma'$  bezogen oder in die Anteile  $E_\gamma$  und  $E_q$ , dem Erddruck aus der Hinterfüllung ( $\gamma$ ) und der Auflast ( $q$ ), zerlegt.

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma' h^2 k_1 = E_\gamma + E_q = \frac{1}{2} \gamma h^2 k_1 + q h k_1; \quad (11)$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{2q}{h}; \quad k_1 = \frac{fe}{h^2}. \quad (12)$$

Schräge Wandlinie ( $\vartheta$ ), geneigtes Gelände ( $\pm \alpha$ ) Abb. 4:

$$k_1 = \frac{\sin^2(\varphi + \vartheta)}{\sin^2(\vartheta + \alpha) \cdot \sin(\vartheta - \delta') \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta') \cdot \sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\vartheta - \delta') \cdot \sin(\vartheta + \alpha)}} \right]^2}. \quad (13)$$

Lotrechte Wandlinie ( $\vartheta = 90^\circ$ ) und geneigtes Gelände ( $\pm \alpha$ ):

$$k_1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha \cdot \cos \delta' \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta') \sin(\varphi - \alpha)}{\cos \delta' \cos \alpha}} \right]^2}. \quad (14)$$

Lotrechte Wandlinie ( $\vartheta = 90^\circ$ ), waagerechtes Gelände ( $\alpha = 0$ ) und  $\delta' \neq 0$ :

$$k_1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \delta' \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta') \sin \varphi}{\cos \delta'}} \right]^2}. \quad (15)$$

Lotrechte Wandlinie ( $\vartheta = 90^\circ$ ), waagerechtes Gelände ( $\alpha = 0$ ) und  $\delta' = 0$ :

$$k_1 = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (16)$$

Bei Auswertung des passiven Erddrucks  $E_p$  werden  $\varphi$ ,  $\delta'$  und die Wurzel mit dem negativen Vorzeichen verwendet.

Während das Gewicht des Erdbodens nach den Angaben auf S. 12 durch kapillar gebundenes Porenwasser erhöht wird, ergibt sich in einem zusammenhängenden Grundwasserkörper durch den Druckunterschied an der Oberfläche der undurchlässigen Bestandteile eine Gewichtsverminderung (Auftrieb). Dafür wird der Druck auf die stützende Wand um den Wasserdruck vermehrt, der sich in durchlässigen Bodenarten allseitig ausbreitet. Die äußeren Kräfte setzen sich daher aus dem Erddruck auf die Wand ohne die Mitwirkung des Grundwassers, aus dem Wasserdruck und aus der Abminderung des Erddrucks durch Auftrieb zusammen. Dieser ist als Massenkraft  $\gamma_a$  auf das Kornvolumen  $\varepsilon = (1 - \bar{\varepsilon})$  des Erdbodens beschränkt.  $\bar{\varepsilon}$  bezeichnet den leicht meßbaren Porengehalt, der bei Sanden je nach der Lagerung mit 40% (locker), 30% (dicht), 25% (sehr dicht), bei locker gelagerten Kiesen mit 28%, bei dicht gelagerten Kiesen mit 20% eingeschätzt werden kann. Der Porengehalt eines sandigen Lehms beträgt im Durchschnitt 30%. Nach Abb. 5 ist daher bei gerader Wandlinie ( $s, s_w$ )

$$E \hat{=} W = E_q \hat{=} E_\gamma \hat{=} \gamma_w \frac{s_w t_w}{2} \hat{=} E_\gamma \frac{\gamma_w}{\gamma_s} \frac{s_w^2}{s^2} (1 - \bar{\varepsilon}). \quad (17)$$

**Lösung bei gerader Wand- und gebrochener Geländelinie.** Da Ableitung und Ergebnis nach (9) auch gültig bleiben, solange  $G(\lambda)$  im Bereiche von  $C_0$  stetig ist,

Tabelle 1 (vgl. auch S. 12).

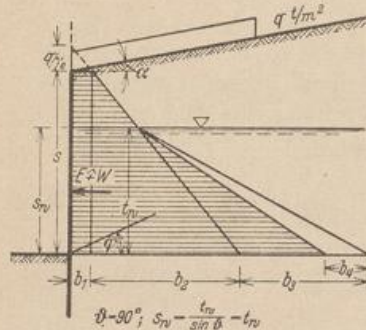
$$k_1 = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)$$

$$k_2 = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)$$

$\varphi^\circ$	$\mu = \operatorname{tg} \varphi$	$k_1$	$k_2$
45 <sup>0</sup>	1,000	0,172	5,828
40 <sup>0</sup>	0,839	0,217	4,599
35 <sup>0</sup>	0,700	0,271	3,690
30 <sup>0</sup>	0,577	0,333	3,000
27,5 <sup>0</sup>	0,521	0,368	2,716
25 <sup>0</sup>	0,466	0,406	2,464
22,5 <sup>0</sup>	0,414	0,446	2,240
20 <sup>0</sup>	0,364	0,490	2,040



kann das Dreieck  $ABC_0$  aus einer anderen mit ihr inhaltgleichen Fläche  $AB_1B_2 \dots C_0$  entstanden sein. Dabei muß der Punkt  $C_0$  zunächst auf einem Abschnitt  $B_3B_4$  der gebrochenen Geländelinie (Abb. 6) angenommen werden, dessen Verlängerung auf diese Weise zur Bezugsgeraden der Konstruktion S. 8 für gerade Geländelinie wird. Die Untersuchung muß unter Umständen mit einem benachbarten Abschnitt



Beispiel:

$\alpha = 10^\circ,$	$\gamma_w = 1,0 \text{ t/m}^3,$	$k_1 = 0,462,$
$\gamma = 25^\circ,$	$\gamma_e = 1,8 \text{ t/m}^3,$	$s = 8,0 \text{ m},$
$\delta' = 0^\circ,$	$q = 2,0 \text{ t/m}^2,$	$s_w = 5,5 \text{ m},$
$\phi = 90^\circ,$	$\tau = 0,3,$	$h = s \sin(\phi + \alpha) = s \cos \alpha = 7,87,$

$E_\gamma = \frac{1}{2} \gamma h^2 k_1 = 26,6 \text{ t},$        $E_q = q h k_1 = 7,4 \text{ t auf 1 m Tiefe},$   
 $\frac{s_w^2}{2} - E_\gamma \frac{s_w^2 (1 - \tau)}{s^2} = 10,2 \text{ t},$        $E \uparrow W = 44,2 \text{ t auf 1 m Tiefe},$   
 $b_1 = \frac{E_q}{s} = 0,93 \text{ t/m},$        $b_2 = \frac{2 E_\gamma}{s} = 6,65 \text{ t/m auf 1 m Tiefe},$   
 $b_3 = t_w = s_w = 5,50 \text{ t/m},$        $b_4 = \frac{2 E_\gamma}{s_w} \frac{s_w^2 (1 - \tau)}{s^2} = 1,78 \text{ t/m auf 1 m Tiefe}.$

Abb. 5.

wiederholt werden. Auflasten werden ebenso wie fehlende Anteile der Nutzlast  $q$  auf Teildreiecke des Erdprismas  $ABC_0$  durch Division mit  $\gamma_e$  oder  $\gamma'_e$  umgerechnet, diesem zugefügt oder von diesem abgezogen. Die Stellungslinie wird nach wie vor auf die vorgeschriebene Wandlinie bezogen.

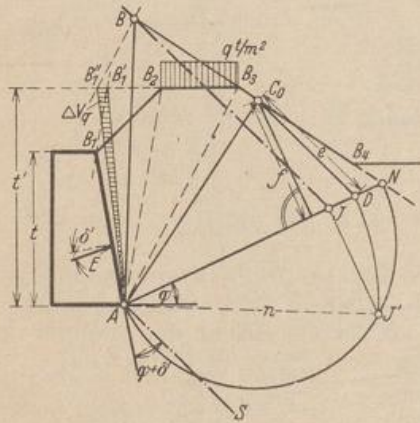


Abb. 6.

Beispiel:  $\gamma = 25^\circ,$        $t' = 8,5 \text{ m},$   
 $\delta' = 10^\circ,$        $B_2 B_3 = 3,0 \text{ m},$   
 $\gamma_e = 1,9 \text{ t/m}^3,$        $e = 5,36 \text{ m},$   
 $q = 1,0 \text{ t/m}^2,$        $f = 5,0 \text{ m}.$

Auflast  $P$  ersetzt durch das Gewicht des Erdprismas  $AB_1B_1''$ ,

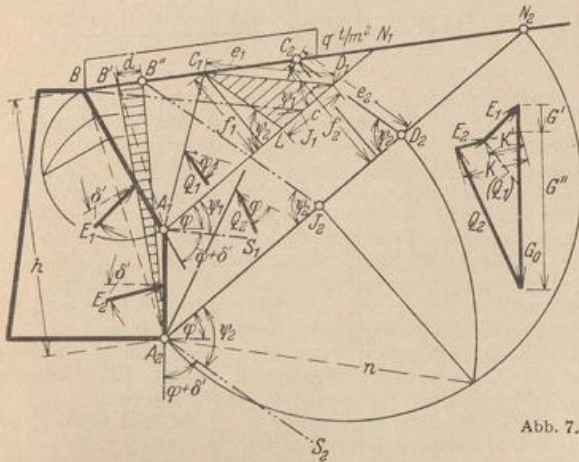
$P = \Delta V_q \gamma_e,$   
 $P = B_2 B_3 q = \frac{B_1' B_1''}{2} \gamma_e; \quad B_1' B_1'' = 0,37 \text{ m},$   
 $E = \frac{1}{2} f e \gamma_e = 25,46 \text{ t auf 1 m Tiefe}.$

verwandelt und damit die Grundlage der Untersuchung für die gerade Wandlinie gefunden worden ist.

**Lage der Mittelkraft  $E$  des Erddrucks.** Das Gewicht  $G$  eines Erdprismas steht mit den Kräften  $(\sigma \uparrow \tau) dF$  längs der Begrenzung im Gleichgewicht. Die statischen Bedingungen bestimmen mit der Fließbedingung (S. 5) in dem Grenzzustand zwischen Ruhe und Bewegung eindeutig die Form der Gleitflächen. Die Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte sind daher bei Annahmen über die Form der Gleitflächen nicht mehr erfüllt. Wenn daher auch nach (6) die geometrische Summe von  $E, Q, G$  Null ist, so ist in der Regel noch ein Kräftepaar vorhanden. Die Wirkungslinien  $E,$



$Q, G$  werden sich daher bei Annahme von ebenen Gleitflächen nicht in einem Punkte des Lageplanes schneiden. Dies trifft nur dann zu, wenn der Erddruck auf eine senkrechte Wandlinie nach Rankine parallel zur Geländelinie angenommen wird. Die Ergebnisse der folgenden Rechnung sind jedoch trotz dieses Vorbehaltes für die Anwendung im Bauwesen brauchbar.



Beispiel:

$$\begin{aligned} \varphi &= 40^\circ, & q &= 3,0 \text{ t/m}^2, \\ \delta' &= 15^\circ, & \gamma' &= 1,8 \text{ t/m}^3, \\ f_1 &= 3,00 \text{ m}, & f_2 &= 4,05 \text{ m}, \\ e_1 &= 4,20 \text{ m}, & e_2 &= 4,16 \text{ m}, \\ \text{Aus } C_1 L \parallel S_2, & & C_1 L &= 3,10 \text{ m}, \\ h &= 8,32 \text{ m}, & c &= 2,15 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G' &= \Delta(C_1 D_1 L) \gamma'_e = \frac{1}{2} f_1 c \gamma'_e = 8,12 \text{ t} \\ &= \Delta(A_2 B' B'') \gamma'_e = \frac{1}{2} d h \gamma'_e, \end{aligned}$$

$$d = f_1 \frac{c}{h} = 0,77 \text{ m},$$

Kraft auf 1 m Tiefe:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} e_1 f_1 \gamma'_e = 15,88 \text{ t}; & K &= \frac{1}{2} e_2 f_2 \gamma'_e = 21,23 \text{ t}, \\ K' : E_1 &= C_1 L : C_1 D_1; & K' &= 11,72 \text{ t}, \\ E_2 &= K - K' = 9,51 \text{ t}. \end{aligned}$$

Abb. 7.

Die Kraft  $E$  ist die Resultierende einer Flächenkraft  $dE(z)/dz$ , der Zunahme des Erddrucks  $E(z)$  bezogen auf die veränderliche Wandhöhe  $z$ . Bezeichnet  $dE_1$  die Zunahme der zur Wandlinie senkrechten Komponente im Bereich von  $dz$  und  $\int dE_1 = E_1$ , so ergibt sich aus der Äquivalenz der Kraftwirkung für den Endpunkt  $T$  der Wandlinie (Abb. 4 S. 8)

$$E_1(s - z_0) = \int_{z=0}^{z=s} (s - z) dE_1 = \int_{z=0}^{z=s} (s - z) \frac{dE_1}{dz} dz. \quad (18)$$

Die Ordinate  $(s - z_0)$  bestimmt die Lage der resultierenden Flächenkraft  $E_1$ . Der Ansatz bedeutet geometrisch die Umwandlung der von der Funktion  $dE_1/dz$  gebildeten Fläche in ein inhaltgleiches Rechteck.

Der Erddruck  $E$  ist bei gerader Wand- und Erdlinie in  $E_y$  und  $E_q$  zerlegt worden (11). Die Funktion  $E_q$  ist linear in  $h$  ( $\equiv z$ ),  $dE_q/dh$  also konstant, so daß der Angriffspunkt von  $E_q$  die Ordinate  $(s - z_0) = s/2$  erhält. Die Funktion  $E_y$  ist quadratisch in  $h$ ,  $dE_y/dh$  also linear. Der Angriffspunkt der Kraft  $E_y$  an der Wandlinie erhält daher die Ordinate  $2/3 \cdot h$  (Abb. 4). Bei gebrochener Wandlinie wird der Angriffspunkt der zugeordneten Teilkräfte geschätzt. Man wählt in der Regel die Mitte der Abschnitte.

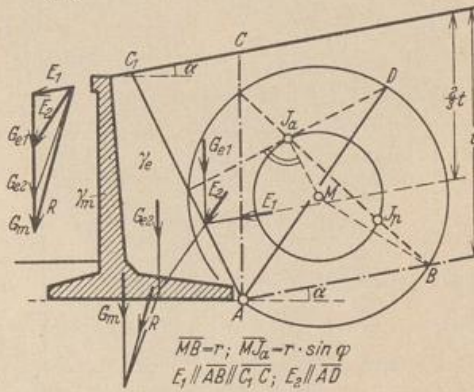


Abb. 8. Untersuchung der Standsicherheit einer Stützmauer.

$$\begin{aligned} \alpha &= 10^\circ; & \gamma_e &= 2,0 \text{ t/m}^3; & r &= 2,5 \text{ m}; \\ \varphi &= \varphi_{\max} = 30^\circ; & \gamma_m &= 2,4 \text{ t/m}^3; & t &= 4,8 \text{ m}; \\ G_{e1} &= 10,15 \text{ t}; & G_{e2} &= 10,07 \text{ t}; & G_m &= 6,74 \text{ t}. \end{aligned}$$

$E_1$  zeichnerisch durch Zerlegen von  $G_{e1}$  nach  $E_1$  und  $E_2$ .  
 $E_1$  rechnerisch aus (14) mit  $\delta' = \alpha$ ,  $k_1 = 0,360$ .  
 $h = t \cdot \cos \alpha = 4,73 \text{ m}$ ;  $E_1 = \frac{1}{2} \gamma_e h^2 k_1 = 8,04 \text{ t}$  auf 1 m Tiefe.  
 Resultierende für die Bodenfuge  $R = 29,5 \text{ t}$  auf 1 m Tiefe.

**Erddruck im unbegrenzten Erd-**

**körper.** In einzelnen Fällen werden die äußeren Kräfte an einem Stützkörper aus der Größe und Richtung des Erddrucks  $E_1$  im unbegrenzten Erdkörper angegeben.



Tabelle 2. Mittelwerte für die Raumgewichte  $\gamma$  und die Schubfestigkeit  $\tau^* = \mu \cdot \sigma$  der wichtigsten Erdarten.

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi; \quad k_1 = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right); \quad k_2 = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

	Bodenart	$\gamma$ [t/m <sup>3</sup> ]	$\mu$	$\varphi^0 = \xi$	$k_1$	$k_2$
1	locker gelagerter Sand:					
	trocken . . . . .	1,4—1,7	0,60	31	0,320	3,124
	natürlich feucht . . . . .	1,6—1,9				
gesättigt naß . . . . .	1,9—2,1					
2	dicht gelagerter Sand:					
	trocken . . . . .	1,8—1,9	0,64	32½	0,307	3,255
	natürlich feucht . . . . .	2,0				
gesättigt naß . . . . .	2,1—2,2					
3	sehr dicht gelagerter Sand:					
	trocken . . . . .	1,9—2,0	0,66	33½	0,283	3,537
	natürlich feucht . . . . .	2,0—2,2				
gesättigt naß . . . . .	2,2—2,3					
4	locker gelagerter Kies:					
	trocken . . . . .	1,8—1,9	0,58	30	0,333	3,000
	natürlich feucht . . . . .	1,9—2,0				
gesättigt naß . . . . .	2,2—2,3					
5	dicht gelagerter Kies:					
	trocken . . . . .	2,2	0,66	33½	0,283	3,537
	natürlich feucht . . . . .	2,3				
gesättigt naß . . . . .	2,4					
6	nasser Steinschotter . . . . .	1,8	0,70	35	0,271	3,690
7	sandiger Lehm, Schlick, Geschiebe, Mergel . . . . .	2,1—2,3	0,45	22—26	0,422	2,371
8	fetter Lehm und sandiger Ton . . . . .	1,8—2,2	0,35	16½—22	0,509	1,965
9	fetter Ton . . . . .	1,5—2,0	0,25	11½—16½	0,610	1,638
10	locker gelagerte Dammerde:					
	trocken . . . . .	1,4	0,77	35—40	0,238	4,204
	natürlich feucht . . . . .	1,6	1,00	45	0,172	5,828
	gesättigt naß . . . . .	1,8	0,53	28	0,361	2,770
11	gestampfte Dammerde:					
	trocken . . . . .	1,7	0,92	40—45	0,198	5,045
	natürlich feucht . . . . .	1,9	0,77	35—40	0,238	4,204



Dieser ist nach der Ableitung von Rankine für einen senkrechten Schnitt  $AC$  von der Länge  $t$  ebenso groß wie nach der Theorie Coulombs mit  $\delta' = \alpha$  (Abb. 8). Er wirkt im Abstand  $2/3 \cdot t$  von der Geländelinie parallel zu dieser. Die Größe und Richtung des Erddrucks auf eine beliebig unter einem Winkel ( $CAC_1$ ) geneigte Ebene  $AC_1$ , welche ein Prisma mit dem Gewicht  $G_{e1}$  bildet, kann durch Addition ( $E_1 \hat{+} G_{e1}$ ) oder auf Grund einer geometrischen Involution zwischen den Richtungen  $E_1, AC$  und  $E_2, AC_1$  angegeben werden. Diese Beziehungen vereinfachen die Ermittlung des Erddrucks auf Winkelstützmauern und Gewölbe.

Müller-Breslau, H.: Erddruck auf Stützmauern. Stuttgart 1906. — Krey, H.: Erddruck. Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes in größerer Tiefe, 3. Aufl. Berlin 1932. — Derselbe: Betrachtungen über die Größe und Richtung des Erddrucks. Bautechn. 1923 Heft 24 u. 27. — Freund, A.: Neue Ergebnisse in der Erddrucktheorie. Zbl. Bauverw. 1920 S. 625. — Derselbe: Neue Untersuchungen zur Erddrucktheorie. Z. Bauw. 1921 S. 48. — Derselbe: Der Spannungszustand in loser Erde. Zbl. Bauverw. 1921 S. 589 u. 601; 1922 S. 599. — Derselbe: Untersuchung der Erddrucktheorie von Coulomb. Bautechn. 1924 Heft 12. — Petersen, R.: Erddruck auf Stützmauern. Berlin 1924. — Terzaghi, K.: Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. Leipzig u. Wien 1925. — Franzius, O.: Versuche mit passivem Erddruck. Bauing. 1924. — Mörsch, E.: Die Berechnung von Winkelstützmauern, Wayss und Freytag-Festschrift Stuttgart 1925 und Beton und Eisen 1925. — Mohr, O.: Abhandlungen. 3. Aufl., 6. Abschn.: Die Lehre vom Erddruck. Berlin 1928. — Nádai, A.: Plastizität und Erddruck, VI. Abschn. im Handbuch der Physik, Band VI: Mechanik der elast. Körper. Berlin 1928. — v. Kármán, Th.: Verhandlung des 2. Intern. Kongr. für technische Mechanik. Zürich 1927. — v. Terzaghi, K.: Festigkeitseigenschaften der Schüttungen, Sedimente und Gele. Leipzig 1931. — Derselbe: Old earth pressure theories and new test results. Engng. News Rec. 1930. — Hülsenkamp, F.: Klassische Theorie des Erddrucks. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik Band IV 2. Hälfte. Leipzig 1931. — Fulton, R.: Earth pressures. Abhandlg. der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau Bd. I (1932) S. 205.

## 6. Boden- und Seitendruck in Silozellen.

Der Seitendruck in Großraumbunkern wird in der Regel nach der Erddrucktheorie Coulombs berechnet. Unter Umständen wird auch das Gleichgewicht der Schüttung bei der Annahme von Gleitflächen untersucht, welche sich durch die Form der Bunkertaschen ausbilden können. Das spezifische Gewicht und die innere Reibung  $\varphi$  sind stets nach Prüfung der ungünstigsten Verhältnisse festzusetzen.

Die Wirkung des Füllguts in Silotaschen und Behältern mit verhältnismäßig kleinem Querschnitt  $F$  wird unter der Annahme eines in jedem waagerechten Schnitt unveränderlichen Boden- und Seitendrucks  $p_b, p_s$  bestimmt. Aus dem Gleichgewicht der senkrechten Kräfte an einer durch zwei benachbarte Querschnitte (Abb. 10) gebildeten Scheibe entsteht folgende Differentialgleichung:

$$F dp_b - \gamma F dz + \mu' p_s U dz = 0. \quad (19)$$

Hierin bedeutet  $dp_b$  die Zunahme des Bodendrucks beim Fortschreiten um  $dz$ ,  $p_s$  den

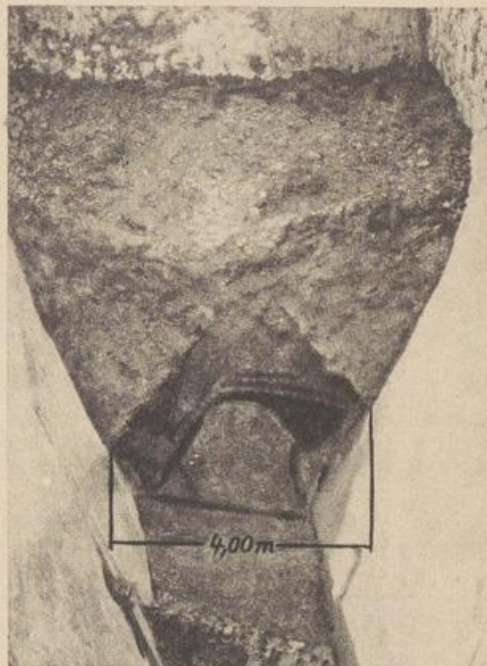


Abb. 9. Brückenbildung in einem Braunkohlenbunker als Beispiel für die Unsicherheit der Kraftwirkung in Silos.



Seitendruck an der Silowand,  $\mu' = \text{tg } \delta'$  den Reibungskoeffizienten zwischen Wand und Füllung.  $F$  und  $U$  bezeichnen Fläche und Umfang der Zelle. Mit  $k_1 = \phi_s/\phi_b$  wird

$$\phi_s = \frac{\gamma}{\mu'} \frac{F}{U} \left(1 - e^{-z \frac{U \mu'}{F} k_1}\right), \quad \phi_b = \frac{1}{k_1} \frac{\gamma}{\mu'} \frac{F}{U} \left(1 - e^{-z \frac{U \mu'}{F} k_1}\right). \quad (20)$$

$\phi_s$  und  $\phi_b$  sind demnach Exponentialfunktionen, deren Grenzwerte für  $z = \infty$

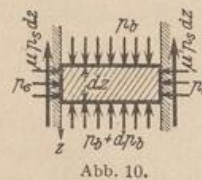


Abb. 10.

$$\phi_{s, \max} = \frac{\gamma}{\mu'} \frac{F}{U}, \quad \phi_{b, \max} = \frac{1}{k_1} \frac{\gamma}{\mu'} \frac{F}{U} \quad (21)$$

Asymptoten bestimmen. Die Tangente an den Kurven in  $z = 0$  schneidet auf der Asymptote die Strecke  $z_0$  ab (Abb. 11):

$$z_0 = \phi_{s, \max} \cdot \frac{dz}{d\phi_s} = \frac{1}{\gamma k_1} \phi_{s, \max} = \frac{1}{\mu' k_1} \frac{F}{U}, \quad (22)$$

$$\phi_s = \phi_{s, \max} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right), \quad \phi_b = \phi_{b, \max} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right). \quad (23)$$

Bei Versuchen ist das Produkt  $k_1 \mu'$  nahezu als konstant mit 0,25 bis 0,30 festgestellt worden. Stützt man sich mangels besserer Erkenntnis auf die elementaren Beziehungen aus der Theorie des Erddrucks, so ist

$$k_1 = \frac{\phi_s}{\phi_b} = \text{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (24)$$

Tabelle 3. Physikalische Konstanten des Füllgutes.

Füllgut	$\gamma$ t/m <sup>3</sup>	$\varphi$	$k_1 = \text{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\mu'$
Gaskohle . . . . .	0,9	45 <sup>0</sup>	0,172	0,30
Rohbraunkohle . . . . .	1,0	35 <sup>0</sup>	0,271	0,30
Koks . . . . .	0,6	45 <sup>0</sup>	0,172	0,30
Minette . . . . .	1,8	45 <sup>0</sup>	0,172	0,30
Zement . . . . .	1,4	40 <sup>0</sup>	0,217	0,30
Kleinschlag . . . . .	1,7	45 <sup>0</sup>	0,172	0,30
Roggen . . . . .	0,7	37 <sup>0</sup>	0,248	0,44
Weizen . . . . .	0,75	25 <sup>0</sup>	0,406	0,30
Gerste . . . . .	0,63	26 <sup>0</sup>	0,390	0,45
Hafer . . . . .	0,45	28 <sup>0</sup>	0,361	0,47
Mais . . . . .	0,72	27 <sup>0</sup> 30'	0,368	0,42
Bohnen . . . . .	0,75	31 <sup>0</sup> 40'	0,312	0,44
Erbsen . . . . .	0,81	25 <sup>0</sup> 20'	0,401	0,30
Leinsamen . . . . .	0,66	24 <sup>0</sup> 30'	0,414	0,41
Malz . . . . .	0,53	22 <sup>0</sup>	0,455	0,30
Salz . . . . .	1,25	40 <sup>0</sup>	0,217	0,30

und  $k_1 \mu'$  nach Tabelle 3 stets kleiner und damit ungünstiger als der für den Ruhezustand gemessene Mittelwert 0,25 bis 0,30.

Bei gegebenem  $F, U, \gamma, \mu'$  wird der Reihe nach der Verhältniswert  $k_1$  und die Strecke  $z_0$  berechnet. Dann kann mit Hilfe der Tabelle 4 der Seitendruck  $\phi_s$  für eine Unterteilung der Strecke  $z$  unmittelbar angegeben werden. Diese Rechenvorschrift ist in dem folgenden Beispiel angewendet worden.

Tabelle 4. Funktionswerte  $1 - e^{-\zeta}$ .

$\zeta$	00	05	10	15	20	25	30	35	40	45
0,	0,000	0,049	0,095	0,139	0,181	0,221	0,259	0,295	0,330	0,362
1,	0,632	0,650	0,667	0,683	0,699	0,713	0,727	0,741	0,753	0,765
2,	0,865	0,871	0,878	0,884	0,889	0,895	0,900	0,905	0,909	0,914
$\zeta$	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
0,	0,393	0,423	0,451	0,478	0,503	0,528	0,551	0,573	0,593	0,613
1,	0,777	0,788	0,798	0,808	0,817	0,826	0,835	0,843	0,850	0,858
2,	0,918	0,922	0,926	0,929	0,933	0,936	0,939	0,942	0,945	0,948



Beispiel zur Siloberechnung (Abb. 11). Querschnitt der Zelle: 3,20 · 3,20 m<sup>2</sup>.

a) Roggen:  $\gamma = 0,7 \text{ t/m}^3$ ;  $\mu' = 0,44$ ;  
 $\varphi = 37^\circ$ ;  $k_1 = 0,248$ ;  
 $p_{s, \max} = \frac{\gamma F}{\mu' U} = 1,27 \text{ t/m}^2$ ;  $z_0 = \frac{F}{U \mu' k_1} = 7,33 \text{ m}$ .

b) Weizen:  $\gamma = 0,75 \text{ t/m}^3$ ;  $\mu' = 0,30$ ;  
 $\varphi = 25^\circ$ ;  $k_1 = 0,406$ ;  
 $p_{s, \max} = \frac{\gamma F}{\mu' U} = 2,00 \text{ t/m}^2$ ;  $z_0 = \frac{F}{U \mu' k_1} = 6,57 \text{ m}$ .

Die Ergebnisse sind in der Abb. 11 graphisch dargestellt. Der lotrecht wirkende Bodendruck ist nach (24)  $p_b = p_s/k_1$ . Der auf die schräge Wand wirkende Druck setzt sich aus Seitendruck und lotrechtem Bodendruck zusammen

$$p' = p_s \sin^2 \alpha + p_b \cos^2 \alpha.$$

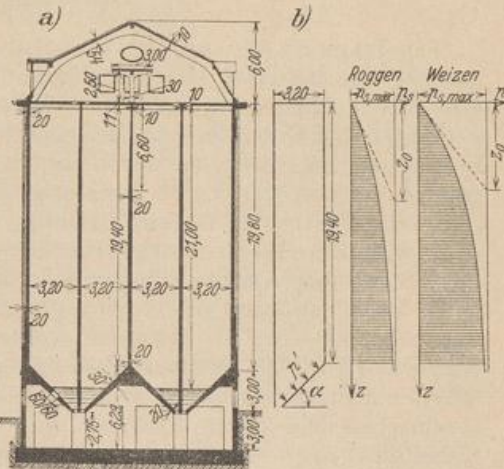


Abb. 11. Querschnitt des Silos.  
(Der Grundriß der Zellen ist quadratisch.)

z [m]	Roggen			Weizen		
	$\zeta = \frac{z}{z_0}$	$1 - e^{-\zeta}$	$p_s$ [t/m <sup>2</sup> ]	$\zeta = \frac{z}{z_0}$	$1 - e^{-\zeta}$	$p_s$ [t/m <sup>2</sup> ]
1,0	0,136	0,127	0,16	0,152	0,141	0,28
2,0	0,273	0,239	0,30	0,304	0,262	0,52
3,0	0,409	0,336	0,42	0,457	0,367	0,73
4,0	0,546	0,421	0,53	0,609	0,456	0,91
5,0	0,682	0,494	0,62	0,761	0,533	1,06
6,0	0,819	0,559	0,71	0,913	0,599	1,19
7,0	0,955	0,615	0,78	1,066	0,656	1,31
8,0	1,091	0,664	0,84	1,218	0,704	1,41
9,0	1,228	0,707	0,90	1,370	0,746	1,49
10,0	1,364	0,744	0,94	1,522	0,782	1,56
11,0	1,501	0,777	0,98	1,675	0,813	1,62
12,0	1,637	0,805	1,02	1,827	0,839	1,68
13,0	1,774	0,830	1,06	1,979	0,862	1,72
14,0	1,910	0,852	1,08	2,132	0,881	1,76
15,0	2,046	0,871	1,11	2,284	0,898	1,80
16,0	2,18	0,887	1,13	2,44	0,913	1,83
17,0	2,32	0,902	1,15	2,59	0,925	1,85
18,0	2,46	0,915	1,16	2,74	0,935	1,87
19,0	2,59	0,925	1,18	2,89	0,944	1,89
20,0	2,73	0,935	1,19	3,04	0,952	1,90
21,0	2,86	0,943	1,20	3,20	0,959	1,91

Im vorliegenden Beispiel ist  $\alpha = 45^\circ$ , daher  $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$  und

$$p' = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{k_1} \right) p_s = 2,52 p_s \text{ (Roggen) oder } 1,73 p_s \text{ (Weizen)}.$$

Versuche über die Druckverhältnisse in Silos: Janssen: Z. VDI 1895. — Prante: Z. VDI. 1896. — Jamieson, J. A.: Engng. News Rec. Bd. 51 (1904). — Pleissner: Z. VDI 1906. — Engesser: Z. Arch. u. Ingenieurw. 1908. — Lufft: Druckverhältnisse in Silozellen. Berlin 1920. — Dörr, H.: Silos. Handb. Eisenbetonbau Bd. 14 3. Aufl.



## 7. Die Stützung des Tragwerks.

Ein Tragwerk wird auf den gewachsenen Erdboden oder vorbereitete Baukörper gestellt. Sie berühren sich dabei unmittelbar oder in besonderen Auflagern, die eine relative Bewegung der beiden Teile zulassen.

**Lager und Gelenke.** Für die Kennzeichnung der Lager und Gelenke sind die geometrischen Eigenschaften der Bewegung bei der Anordnung eines Lagers maßgebend. Es beschränkt den Freiheitsgrad des abzustützens Körpers durch Führung oder Festlegung einzelner Punkte, Linien oder Flächen und durch die starre oder bewegliche Einspannung. Hierbei werden Reibungswiderstände vernachlässigt. Die Bezeichnung *Auflager* bleibt in der Regel denjenigen Stützkörpern vorbehalten, deren Verschiebungen gegen diejenigen des Tragwerks klein sind und vernachlässigt werden. Sonst erhalten die verbindenden Bauteile meist die Bezeichnung *Gelenk* oder *Führung*. Die kinematischen Eigenschaften der Auflager und Gelenke werden durch den Freiheitsgrad der Bewegung oder mit geometrischen Stützenbedingungen beschrieben und durch Stützen- und Verbindungsstäbe (Anzahl  $t$ ,  $v$ ) erläutert. Dabei wird dann oft nicht der allgemeine Fall der räumlichen Bewegung, sondern die ebene Bewegung betrachtet. Hier wird die Stützung mit 2, 1 oder 0 Freiheitsgraden durch 1, 2 oder 3 Stützenstäbe in verschiedener Anordnung beschrieben. Die räumliche Stützung mit 0 bis zu 5 Freiheitsgraden verlangt 6 oder weniger bis zu einem Stützenstab. Zur kinematisch bestimmten Stützung und Verbindung von  $n$  Bauteilen sind  $3n$  oder  $6n$  Stützenbedingungen notwendig, je nachdem die Bewegung auf die Ebene beschränkt bleibt oder räumlich ist.

Jede Stützenbedingung (Stützenstab) kann durch eine kinematisch äquivalente Stützkraft (Kräftepaar) ersetzt werden. Richtung und Lage sind durch die kinematischen Eigenschaften der einzelnen Stützung bestimmt. Das Tragwerk erhält mit Einführung der Stützkraft die kinematischen Eigenschaften des frei beweglichen Körpers. Er bleibt in Ruhe, wenn die Stützkraft mit der Belastung im Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte in der Ebene oder im Raum zur Berechnung ausreichen. Mit  $t + v > 3n$  oder  $t + v > 6n$  ist die Stützung statisch unbestimmt.

Die Bedeutung der Lager und Gelenke beruht in der Klärung der geometrischen Randbedingungen bei der Stützung und Verbindung der Bauteile und damit in der zuverlässigen Beschreibung der inneren Kräfte.

**Flächenstützung.** Der Spannungszustand einer Flächenstützung hängt von den elastischen Eigenschaften des Tragwerks und von den physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels ab. Die Problemstellung ist daher sehr allgemein und zwingt zur Vereinfachung durch Idealisierung der Aufgabe.

Diese besteht in zahlreichen Fällen in der summarischen Beschreibung der Sicherheit der Stützung durch Annahmen über die Normalspannungen. Sie werden als lineare Funktion der Flächenkoordinaten eingeführt und können dann statisch bestimmt aus den äußeren Kräften berechnet werden. Der Ansatz genügt bei geringer Verformung und Ausnutzung der Festigkeit der sich berührenden Mittel.

Die Grenzfläche zahlreicher Baukörper erfährt durch die Belastung nur unwesentliche Formänderungen, die vernachlässigt werden. Der Spannungszustand hängt dann allein von der Größe und Umrißform der Grenzfläche und von den physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels ab. Sind die elastischen Verschiebungen des abgestützten Bauteils von Bedeutung, so besteht außerdem noch eine Beziehung zwischen diesen und den Spannungen an der Grenzschicht.

Das stützende Mittel besitzt bei der einen Gruppe von Bauaufgaben Zug- und Scherfestigkeit und isotrope, elastische Eigenschaften. Der Spannungs- und Formänderungszustand kann dann nach den Ansätzen beschrieben werden, welche in der Elastizitätstheorie für den elastischen Halbraum abgeleitet sind. Die Rand-



spannungen werden dabei unendlich groß (*I*), führen also zu einer plastischen Deformation und damit zu einer Angleichung des Spannungsverlaufes (*II*) an die bekannten linearen Spannungsbilder (Abb. 12).

Sie erfahren bei sandigen und bindigen Bodenarten eine grundsätzliche Änderung, da deren Tragfähigkeit im wesentlichen auf dem Widerstand gegen die senkrechte Verschiebung der einzelnen Bestandteile beruht. Die Schubfestigkeit aus Kohäsion und Strukturwiderstand besitzt nur untergeordnete Bedeutung. Daher ist die plastische Verformung des stützenden Mittels am Rande der belasteten Fläche groß und die Lastaufnahme in diesem Bereiche gering. Hieraus erklären sich die Spannungsbilder Abb. 13, deren Verlauf bei demselben stützenden Mittel von der Form und Größe der Grenzfläche abhängt. Die Versuchsergebnisse berechtigen in diesem Falle zur Annahme einer parabolischen Verteilung der Spannungen. Die Randstörungen vermögen außerdem die von F. Kögler bemerkte Erscheinung zu begründen, daß der Baukörper sich in natürlicher Größe mehr verschiebt als im Modellmaßstab bei äquivalenter Belastung der Grenzfläche. Der Unterschied wächst bei zunehmender Belastungsintensität.

Diese Untersuchungen bilden einen Teil der Bodenmechanik und werden hier nur wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung für die Stützung von Bauwerken erwähnt, da die Spannungsverteilung in der Grenzschicht für die Festigkeit steifer Baukörper, homogene Beschaffenheit des stützenden Mittels vorausgesetzt, in der Regel unwesentlich ist. Sie kann dagegen bei der elastischen Verformung durchgehend gestützter Träger und Platten unter Einzellasten nicht vernachlässigt werden. Die Spannungen  $\sigma$  in der Grenzschicht sind hier eine Funktion der elastischen Verformung des Bauteils und des Verschiebungszustandes, also der physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels. Die Verknüpfung ist unbekannt. Daher wird der Anteil der Funktion aus den Abmessungen der Grenzfläche und aus den physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels durch eine für den Einzelfall charakteristische konstante Größe  $c$  ausgedrückt und die Spannung in erster Annäherung proportional zur Einsenkung  $w$  angenommen ( $\sigma = cw$ ). Dabei ist bekannt, daß diese auch von dem benachbarten Spannungsbereich abhängt. Der Ansatz ist hierfür durch K. Wieghardt erweitert worden, ohne dabei allerdings den Verschiebungszustand der Unterlage zu berücksichtigen.

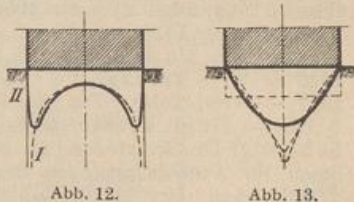
Man begnügt sich daher bei Bauaufgaben ebenso wie in anderen Teilgebieten der Mechanik mit der linearen Abhängigkeit zwischen  $\sigma$  und  $w$ . Der Ansatz kann so lange als brauchbar angesehen werden, als die Ergebnisse der Rechnung, abgesehen von Randstörungen, mit den Beobachtungen nicht im Widerspruch stehen und die Sicherheit des Bauwerks verbürgen.

Der Buchstabe  $c$  bedeutet nach der Erläuterung einen für jede Aufgabe charakteristischen Leitwert, mit welchem der Ansatz  $w = \sigma/c$  qualitativ richtige und quantitativ brauchbare Ergebnisse liefert.  $c$  kann nach der mittleren Senkung  $w_m$  eines Fundaments auf elastisch isotropen Halbraum abgeschätzt werden.

Die Elastizitätstheorie liefert hierfür folgende Zahlen:

$$w_m = \dot{p}_m \frac{\sqrt{F}}{\kappa C}; \quad C = \frac{m^2}{m^2 - 1} E; \quad \dot{p}_m = \frac{P}{F}; \quad \text{also } c = \frac{\kappa C}{\sqrt{F}}. \quad (25)$$

$C$  ist eine Materialkonstante,  $\kappa$  eine von der Form der Fläche abhängige Konstante, die für steife Fundamente in Kreis- und Quadratform mit  $\kappa = 1,06$  bis  $1,13$ , für Rechtecke mit dem Seitenverhältnis  $a : b = \nu$  und  $\nu = 2$  mit  $\kappa = 1,09$ ;  $\nu = 5$ ,  $\kappa = 1,22$ ;  $\nu = 10$ ,  $\kappa = 1,41$ ;  $\nu = 100$ ,  $\kappa = 2,70$  anzusetzen ist. Für  $C$  hat F. Schleicher die folgenden Zahlen aus der Literatur zusammengestellt (s. Tabelle 5 S. 18).





Die Verwendung dieser Zahlen in Gl. (25) bedeutet zwar nur eine Abschätzung der Größenordnung des Leitwertes  $c$ , sie wird aber in vielen Fällen genügen, wenn die wahrscheinliche Lösung durch Annahme eines oberen und unteren Betrages in Grenzen eingeschlossen wird. In anderen Fällen wird man die voraussichtlich zu erwartende Druckverteilung durch Bodenuntersuchungen aufzuklären versuchen und hierbei vor allem die Gleichartigkeit der Dichte, Preßbarkeit und Was-

Tabelle 5.

Bodenart	C kg/cm <sup>2</sup>
Gewachsener Sandboden . . . . .	55
Feiner, im Wasser abgelagerter Sand. . . . .	60
Heidesand . . . . .	100
Eingeschlammter und gestampfter Sand . . . . .	120
Gewachsener Kiesboden . . . . .	180
Sandschüttung nach langjähriger Lagerung . . . . .	220
Gewachsener Lehmboden . . . . .	380

serdurchlässigkeit des stützenden Mittels auch außerhalb der Grenzfläche feststellen. Die Unterschiede sind für die bauliche Gestaltung und die Sicherheit der Anlage oft von ungleich größerer Bedeutung als das Einzelergebnis.

Zimmermann, H.: Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888. — Engesser: Zur Theorie des Baugrundes. Zbl. Bauverw. 1893. — Bastian: Das elastische Verhalten der Gleisbettung. Diss. München 1906. — Stötzner: Erzielung gleicher Fundamentsenkung. Diss. Braunschweig 1919. — Wieghardt, K.: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 165. — Schultze, J.: Bodentragfähigkeit. Z. angew. Math. Mech. 1923 S. 19. — Terzaghi: Erdbaumechanik. Leipzig 1925; Die Wissenschaft der Gründungen, 1927. — Schleicher: Zur Theorie des Baugrundes. Bauing. 1926 S. 934; Beton u. Eisen 1927 S. 183. — Hugi: Druckverteilung im örtlich belasteten Sand. Diss. Zürich 1927. — Kögler-Scheidig: Druckverteilung im Baugrunde. Bautechn. 1927 Heft 31. — Vorschläge und Richtlinien für Probelastungen des Deutschen Baugrundausschusses. Unterausschuß f. Tragfähigkeit (Merkblatt). Bauing. 1929 S. 821; Bautechn. 1929 S. 870. — Gerber: Druckverteilung im örtlich belasteten Sand. Diss. Zürich 1929. — Hertwig, A.: Die dynamische Bodenuntersuchung. Bauing. 1931 S. 457. — Scheidig, A.: Die Berechnungsgrundlagen durchgehender Fundamente und die neuere Baugrundforschung. Bautechn. 1931 S. 275. — Derselbe: Baugrundforschung und Fundierungswesen. Bauing. 1932 S. 316.

### 8. Verformung und innere Kräfte.

Die unmittelbare, der Beobachtung zugängliche Folge der Belastung ist der Verschiebungszustand des Bauteils. Er wird durch die absoluten Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  aller Punkte des Körpers beschrieben. Die Untersuchung setzt gleichartigen Werkstoff und den allmählichen, stetigen Verlauf der Bewegung ohne Störung des Zusammenhanges voraus. Die Verschiebungskomponenten sind in diesem Falle stetige und differentiierbare Funktionen der Koordinaten ( $u = u(x, y, z)$ ). Sie können daher auf die Verzerrung eines infinitesimalen Parallelepipeds  $dV = dx dy dz$  bezogen werden. Diese besteht in der Änderung der Länge der drei Kanten und der drei rechten Winkel zwischen je zwei Kanten. Die sechs Verzerrungskomponenten gelten als verschwindend klein, so daß alle von zweiter Ordnung kleinen Anteile vernachlässigt werden.

$$dx \rightarrow dx + \epsilon_x dx \text{ usw.}, \quad \sphericalangle(dx, dy) \rightarrow \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \text{ usw.}$$

Die bezogenen Längenänderungen  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  werden als Dehnungen, die Winkeländerungen  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  als Gleitungen bezeichnet.

Aus  $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

folgt für  $dy = 0,$   
 $dz = 0$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{(u + du) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ usw.}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



Die Verformung ruft die inneren Kräfte  $\sigma dF$ ,  $\tau dF$  hervor, die ebenfalls als stetige Funktionen der Koordinaten angenommen werden. Sie erzeugen in Verbindung mit dem Bewegungsvorgang einen Arbeitsvorrat, also Formänderungsenergie, die bei der Entlastung innerhalb eines ausgezeichneten Spannungsbereichs infolge der besonderen physikalischen Eigenschaften des Werkstoffs wiedergewonnen werden kann. Der Werkstoff heißt dann elastisch, die obere Begrenzung jenes Bereichs Elastizitätsgrenze. Die Verformung wird als plastisch bezeichnet, wenn sie ohne Belastungsänderung fortschreitet und bleibende Formänderungen entstehen. Werkstoffe, deren Elastizitätsgrenze gleichzeitig Bruchgrenze ist, heißen spröde. Die an dem infinitesimalen Parallelepiped angreifenden Spannungen werden in drei Normalspannungen  $\sigma$  und in sechs Schubspannungen  $\tau$  zerlegt. Sie stehen mit den am Prisma angreifenden Massenkräften im Gleichgewicht. Hieraus ergeben sich nur sechs Bedingungsgleichungen. Der Spannungszustand ist daher statisch unbestimmt.

Erfahrungsgemäß sind die Spannungen mit den Verzerrungskomponenten durch ein Elastizitätsgesetz verknüpft, dessen Form von der physikalischen und chemischen Konstitution des Werkstoffs bestimmt wird. Sind die elastischen Eigenschaften isotrop und homogen, so wird nach R. Hooke der folgende lineare Zusammenhang angenommen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \text{usw.}, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{usw.}; \\ \sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} e \right) \quad \text{usw.}, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \quad \text{usw.}; \\ e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, & G &= \frac{E}{2(1+\mu)}, & \mu &= \frac{1}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$E$  und die reziproke Poissonsche Zahl  $1/m = \mu$  sind die für einen isotropen, homogenen Werkstoff charakteristischen elastischen Konstanten. Der Ansatz gilt mit großer Annäherung für jeden Werkstoff innerhalb eines mehr oder weniger begrenzten Spannungsbereichs. Er kann als das lineare Glied einer allgemeinen Funktion angesehen werden, das zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Formänderung und Spannung innerhalb der Proportionalitätsgrenze des Werkstoffs genügt.

Der Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungszustand eines Körpers wird in jedem Punkte durch neun Spannungskomponenten  $\sigma$ ,  $\tau$ , sechs Verzerrungskomponenten  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  des differentialen Prismas und durch die drei zugeordneten Verschiebungskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  beschrieben. Die Spannungs- und Verzerrungskomponenten werden mit dem sechsgliedrigen Ansatz des Elastizitätsgesetzes (27), den sechs Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Verschiebungskomponenten (26) und mit den drei Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehung des Prismas eliminiert. Daher bleiben die drei Projektionsgleichungen des Gleichgewichts der an einem infinitesimalen Parallelepiped angreifenden inneren Kräfte und Massenkräfte als Funktionen der drei unbekanntten Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  übrig. Die Lösung ist also eindeutig. Einer gegebenen Gruppe eingepprägter äußerer Kräfte ist nur ein Spannungs- und Verschiebungszustand zugeordnet. Der Ansatz ist linear, das Ergebnis daher von der Aufteilung der eingepprägten Lasten und von der Superposition der Teilwirkungen unabhängig.

**Energiebetrachtungen.** Spannungs- und Formänderungszustand werden durch den Begriff der Formänderungsarbeit verknüpft, die gegen die entstehenden inneren Kräfte geleistet wird. Dabei wird allmähliche Steigerung der Belastung angenommen, so daß die erregten inneren Kräfte mit den eingepprägten äußeren Kräften im Gleich-

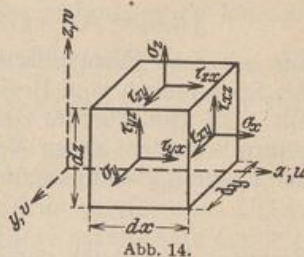


Abb. 14.



gewicht sind. Die aufgewendete Arbeit wird in diesem Falle vollständig als Formänderungsenergie aufgespeichert. Betragen die Spannungen in einem Zwischenzustand  $\sigma', \tau'$ , so ist die Zunahme der auf die Volumeneinheit bezogenen Formänderungsenergie  $A_i$

$$dA_i = \sigma'_x d\varepsilon_x + \sigma'_y d\varepsilon_y + \sigma'_z d\varepsilon_z + \tau'_{xy} d\gamma_{xy} + \tau'_{yz} d\gamma_{yz} + \tau'_{zx} d\gamma_{zx}.$$

In Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz ergibt sich nach Abschluß des Bewegungsvorganges  $\varepsilon, \gamma$  mit  $\sigma$  und  $\tau$  als den Endwerten der Spannungen

$$\int dA_i = A_i = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (28)$$

Die bezogene Formänderungsenergie ist also halb so groß, als wenn die Endwerte der Spannungen vom Beginn der Belastung an vorhanden gewesen wären. Sie kann mit dem Hookeschen Gesetz zu einer homogenen quadratischen Funktion umgeformt werden, deren Veränderliche entweder die Verzerrungskomponenten oder die Spannungskomponenten sind.

$$A_i = A_i(\varepsilon, \gamma); \quad A_i = A_i(\sigma, \tau).$$

Demnach lassen sich partielle Ableitungen der Formänderungsenergie  $A_i$  nach den Formänderungskomponenten und nach den Spannungskomponenten bilden. Mit (27) ist

$$\frac{\partial A_i(\varepsilon, \gamma)}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x \quad \text{usw.}, \quad \frac{\partial A_i(\sigma, \tau)}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x \quad \text{usw.} \quad (29)$$

Das vollständige Differential der bezogenen Formänderungsarbeit ist dann

$$\begin{aligned} dA_i &= \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_x} d\varepsilon_x + \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_y} d\varepsilon_y + \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_z} d\varepsilon_z + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{zx}} d\gamma_{zx} \\ &= \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Formänderungsenergie kann daher als Potentialfunktion der inneren Kräfte angesehen werden. Sie ist in Übereinstimmung mit den gleichgearteten Beziehungen der rationalen Mechanik des Massenpunktsystems unabhängig von dem geometrischen Ablauf der Bewegung und wird nur von den Anfangs- und Endwerten bestimmt.

Die Verzerrungskomponenten  $\varepsilon, \gamma$  sind nach (26) Funktionen der Verschiebungskomponenten und können in (28) eingesetzt werden. Die gesamte Formänderungsenergie  $A_i$  wird durch Integration über den ganzen elastischen Bereich erhalten und durch partielle Integration umgeformt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} A_i &= \int A_i dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int (p_x u + p_y v + p_z w) dO + \frac{1}{2} \int (Xu + Yv + Zw) dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Hierbei bedeuten  $p_x, p_y, p_z$  die Komponenten der an dem infinitesimalen Oberflächenteil „1“ des Körpers angreifenden Flächenkräfte und  $X, Y, Z$  die Komponenten der an dem infinitesimalen Volumenteil „1“ angreifenden Massenkkräfte. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist also halb so groß, als wenn die Endwerte während der Dauer des ganzen Vorgangs wirken würden (Clapeyronsches Gesetz).

Um die Beziehungen der Formänderungsarbeit zum Formänderungs- und Spannungszustand zu untersuchen, wird das Ergebnis (31) mit demjenigen verglichen, die sich entweder bei einem benachbarten Formänderungszustand  $(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma)$  oder bei einem benachbarten Spannungszustand  $(\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau)$  ergeben. Die Formänderungsarbeit  $A'_i = A_i(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma)$  oder  $A'_i = A_i(\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau)$  wird hierzu nach Taylor in eine Reihe entwickelt, deren erste Variation nach den Verzerrungskomponenten folgendermaßen lautet:

$$\delta A_i = \int (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}) dV. \quad (32)$$



Die Einführung der Verschiebungskomponenten und die partielle Integration des Ausdrucks liefert im Falle des Gleichgewichts der inneren und äußeren Kräfte

$$\delta A_i = \int (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dO + \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV. \quad (33)$$

Durch die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke  $\delta A_i$  werden die Spannungen  $\sigma, \tau$ , die mit der Belastung  $p, \mathfrak{K}$  im Gleichgewicht stehen, mit einem virtuellen Verschiebungszustand  $\delta u, \delta v, \delta w$  verknüpft, der mit dem Verzerrungszustand  $\delta \varepsilon, \delta \gamma$  verträglich ist. Die Strecken  $\delta u, \delta v, \delta w$  sind verschwindend klein, um die Taylorentwicklung für  $A'_i - A_i$  bereits mit der ersten Variation abbrechen zu können.

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \int (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dO + \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV \\ &= \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (34)$$

Das Ergebnis wird als Prinzip der virtuellen Verrückungen bezeichnet. Die Arbeit der eingepprägten äußeren Kräfte ist bei einer virtuellen Verrückung des elastischen Systems gleich der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte, welche mit ihnen im Gleichgewicht stehen. Der virtuelle Verschiebungszustand unterliegt naturgemäß den vorgeschriebenen Randbedingungen. Die Änderungen  $\delta u, \delta v, \delta w$  sind daher überall an der Oberfläche Null, wo die Verschiebungen vorgeschrieben werden. Die Verschiebungen werden also nur dort variiert, wo die Oberflächenkräfte bekannt sind. In dem Ansatz (33) ist daher  $\int p_x \delta u dO = \delta \left( \int p_x u dO \right)$ . Er kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\delta [A_i - \int (p_x u + p_y v + p_z w) dO - \int (X u + Y v + Z w) dV] = 0. \quad (35)$$

Der Inhalt der Klammer ist ein Ausdruck für die gesamte potentielle Energie des elastischen Systems. Sie ist ein Minimum, wenn die äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht sind.

Bei dem Vergleich der Formänderungsenergie  $A_i(\sigma, \tau)$  mit derjenigen eines benachbarten Spannungszustandes  $A_i(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  stehen die inneren Kräfte  $(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  mit einer benachbarten Gruppe der eingepprägten Kräfte  $(p + \delta p, \mathfrak{K} + \delta \mathfrak{K})$  im Gleichgewicht. Dasselbe gilt daher auch von der Änderung der Spannungen  $(\delta \sigma, \delta \tau)$  und der virtuellen Belastung  $(\delta p, \delta \mathfrak{K})$ . Die Reihenentwicklung von  $A'_i = A_i(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  liefert nach Taylor

$$A'_i = A_i(\sigma, \tau) + \int (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV + \delta^2 A(\sigma, \tau).$$

Durch Einführung der Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  für die Verzerrungskomponenten und partielle Integration wird die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \int (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV \\ &= \int (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dO + \int (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) dV. \end{aligned} \quad (36)$$

Die virtuelle Formänderungsenergie der inneren Kräfte ist also auch für einen virtuellen Spannungszustand gleich derjenigen der äußeren Kräfte. Die Ausdrücke beider Seiten verknüpfen den wirklichen Verschiebungs- und Verzerrungszustand mit einem von diesen unabhängigen Spannungs- und Kräftebild.

Wird über die frei wählbare Änderung des Kräftebildes  $(\delta p, \delta \mathfrak{K})$  derart verfügt, daß  $\delta \mathfrak{K} = 0$  und die Oberflächenkräfte nur dort abgeändert werden, wo die Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  vorgeschrieben sind (Anschluß oder Stützung), so ist  $\int u \delta p_x dO = \delta \left( \int u p_x dO \right)$ . Der Ansatz (36) kann daher folgendermaßen angegeben werden:

$$\delta \{A_i - \int (u p_x + v p_y + w p_z) dO\} = \delta A_i^* = 0. \quad (37)$$

Die Funktion  $A_i^*$  wird als Ergänzungsarbeit bezeichnet. Sie wird zum Minimum,



wenn das Feld der inneren Kräfte mit der gegebenen Belastung des Körpers im Gleichgewicht ist.

**Satz von Betti.** Der Begriff der virtuellen Arbeit einer Gruppe von äußeren Kräften  $\mathfrak{P}$  bei einer virtuellen Verrückung ihrer Angriffspunkte  $\delta u, \delta v, \delta w$  kann noch ergänzt werden, wenn diese als Folge einer anderen Belastung  $\mathfrak{Q}$  angesehen und daher als  $u_Q, v_Q, w_Q$  bezeichnet wird. Da die Belastung  $\mathfrak{P}$  ebenfalls einen Verschiebungszustand hervorruft, der für die Belastung  $\mathfrak{Q}$  virtuell ist, entstehen zwei virtuelle Arbeiten.

$$\int (\dot{p}_x u_Q + \dot{p}_y v_Q + \dot{p}_z w_Q) dO \quad \text{und} \quad \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P) dO.$$

Sie können beide als Funktion der Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes des elastischen Körpers angegeben werden. Da nun  $A_i$  eine homogene quadratische Funktion dieser Komponenten ist, läßt sich leicht einsehen, daß für jeden elastischen Körper

$$\left. \begin{aligned} \delta A_i \{(\sigma_P, \tau_P)(\epsilon_Q, \gamma_Q)\} &= \delta A_i \{(\sigma_Q, \tau_Q)(\epsilon_P, \gamma_P)\} \\ \int (\dot{p}_x u_Q + \dot{p}_y v_Q + \dot{p}_z w_Q) dO &= \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P) dO. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Damit ist der Satz von der Gegenseitigkeit der Wirkung allgemein bewiesen.

**Anwendung bei technischen Aufgaben.** Die Voraussetzungen zur Elastizitätstheorie bedeuten eine weitgehende Idealisierung der physikalischen Eigenschaften der Werkstoffe. Die Ergebnisse sind daher auch nur unter dieser Voraussetzung im Vergleich mit dem wirklich vorliegenden Verschiebungs- und Spannungszustand streng. Das Bild bedarf in Wirklichkeit der Ergänzung durch diejenigen Anteile, welche sich aus der inhomogenen und anisotropen Beschaffenheit der Werkstoffe und durch die Annahmen im Elastizitätsgesetz ergeben. Aus diesem Grunde besitzen auch angenäherte Lösungen technischer Festigkeitsaufgaben Bedeutung, welche die durch Messung oder Beobachtung festgestellten kinematischen Eigenschaften am verzerrten Bauteil verwerten. Sie werden in der Regel aus Symmetriebetrachtungen und aus Annahmen über Randwerte des Spannungs- und Verschiebungszustandes abgeleitet. Hierzu tritt die Beachtung der geometrischen Eigenschaften des Bauteils, da sehr oft einzelne Abmessungen gegenüber anderen als klein zurücktreten. Man unterscheidet hiernach die Schalen, die Platten, die Scheiben, die Stäbe und entwickelt aus besonderen Annahmen über den Spannungs- oder Verschiebungszustand vereinfachte Lösungen. Auf diese Weise entsteht neben der strengen Elastizitätstheorie eine Theorie über die Festigkeit der Schalen, Platten, Scheiben und Stäbe, so daß der Festigkeitsnachweis irgendeines Bauteils oder Tragwerks stets dessen Idealisierung nach einer dieser Bauformen voraussetzt.

Auch diese Ansätze rechnen mit einem gleichartigen Baustoff und homogenen und isotropen Eigenschaften. Diese Voraussetzungen sind für Bauteile aus Eisenbeton nicht erfüllt, so daß die Ergebnisse der Festigkeitslehre um so weniger befriedigen, je größer die Formänderungen sind. Diese ändern sich hier nicht allein mit den Abmessungen und der Form des Querschnitts, sondern auch mit der Größe und Art der Bewehrung, mit der Herstellung und dem Alter des Betons. Sie werden außerdem durch Haarrisse beeinflusst, welche unter Umständen während der Betriebsbelastung entstehen. Hieraus ergibt sich eine gewisse Unsicherheit in der Beurteilung der elastischen Eigenschaften der Bauteile aus Eisenbeton. Daher sind die Ansätze für homogenen und isotropen Baustoff auf Veranlassung des Deutschen Ausschusses nachgeprüft worden. Die Hefte 18 und 28 der Forschungsarbeiten enthalten einen Vergleich zwischen den gemessenen und gerechneten Formänderungen. Hiernach stimmen die nach § 17 der Bestimmungen für homogenen und isotropen Baustoff ermittelten Formänderungen bei sachgemäßer Bewehrung inner-



halb der Betriebsbelastung in hinreichendem Maße mit den Versuchsergebnissen überein. Die einwandfreie konstruktive Gestaltung eines Bauteils sichert demnach im Rahmen der Gebrauchsbelastung die Eigenschaften, welche zur summarischen Beurteilung der Formänderung von Bauteilen aus Eisenbeton nach der Elastizitätstheorie nötig sind.

Lorenz, H.: Technische Elastizitätslehre. München-Berlin 1907. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie. Handb. der Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang 2. Aufl. 1928.

## 9. Der Spannungszustand der Scheiben und Träger.

Die Scheibe ist ein durch zwei parallele Ebenen begrenzter Baukörper, dessen Stärke  $d$  gegen die Abmessungen  $a, b$  in der  $x, y$ -Richtung klein ist. Bei Belastung der Scheibe in der Symmetrieebene sind an den Flächen  $z = \pm d/2$  die Spannungen  $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ , so daß auch in der Symmetrieebene ( $z = 0$ ) mit einem ebenen Spannungszustand gerechnet werden kann. Die Bedingung  $d \ll a, b$  ist bei zahlreichen Bauformen erfüllt.

Die Untersuchung eines homogenen Baukörpers, dessen Querschnitt konstant und dessen Länge in der  $z$ -Achse gemessen unendlich groß ist, läßt sich bei gleichförmiger Belastung auf eine zur  $z$ -Achse winkelrechte Scheibe von der Tiefe  $d = 1$  beschränken. Die Komponente  $w$  der Verzerrung ist in diesem Falle Null. Dasselbe gilt von der Schubspannung  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Ohne Rücksicht auf die Längsspannung  $\sigma_z$ , die in der Regel klein gegen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  ist, kann die Sicherheit des Tragwerks nach einem ebenen Spannungszustand  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  beurteilt werden.

Das ebene Spannungsproblem ist für einige Aufgaben analytisch mit der Airy'schen Spannungsfunktion, für andere, vor allem technisch wichtige Fälle, versuchs-technisch durch Aufmessung des Verschiebungszustandes und optische Methoden untersucht worden. Die Rechnung führt nur bei einzelnen idealisierten Problemen des elastischen Halbraums und der Balkenbiegung zur Lösung. Aus diesem Grunde hat man sich bei der Beschreibung des Spannungszustandes besonders auch im Bereich von Ecken und an der Verzweigung von Scheiben mit Näherungen, oft sogar nur mit einer qualitativ befriedigenden Lösung begnügt, um hiernach bautechnisch einwandfrei gestalten zu können.

In Verbindung mit der hieraus gewonnenen Erkenntnis werden im Bauwesen einfache Ansätze für die Spannungsverteilung verwendet, welche bei dem Vergleiche mit der strengen Rechnung oder versuchstechnischen Beobachtung befriedigen. Aus diesem Grunde wird die Verteilung der inneren Kräfte an Querschnitten winkelrecht zur Mittellinie der Scheiben betrachtet. Sie bleiben während einer Gebrauchsbelastung erfahrungsgemäß eben und winkelrecht zur Mittellinie, zumal wenn die Höhe gegen die Länge der Scheiben zurücktritt. Diese durch Beobachtung gewonnene Erkenntnis wird im Gegensatz zu den geometrischen Beziehungen (26) der Elastizitätstheorie als Grundlage einer technischen Theorie gewählt. Das Ergebnis ist um so brauchbarer, je besser die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen durch die Annahmen der technischen Theorie erfüllt werden. Sie ist mit gutem Erfolg durch Messungen nachgeprüft worden und besitzt als quantitativ ausreichende Annäherung für die Beschreibung der Festigkeit von Bauteilen grundlegende Bedeutung.

Die Annahme einer ebenen Verschiebung der Querschnitte führt mit dem Hooke'schen Gesetz zum Geradliniengesetz für die Spannung  $\sigma$  und damit zur angenäherten Beschreibung des Spannungszustandes von hohen Trägern und Scheiben. Der lineare Ansatz wird insbesondere bei der Untersuchung von Schwergewichtsstaumauern verwendet.

Der Spannungszustand einer Scheibe wird in jedem Punkte, gleichviel welcher Ansatz als Grundlage gewählt worden ist, durch die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  für



Schnitte in Richtung eines ausgezeichneten Achsensystems beschrieben (Abb. 15). Sie bilden einen Tensor, der durch die Gleichungen

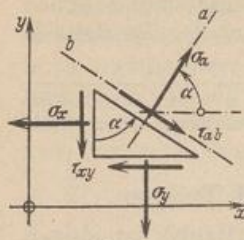


Abb. 15.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha, \\ \sigma_b &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha, \\ \tau_{ab} &= (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (39)$$

auf ein beliebiges um den Winkel  $\alpha$  gedrehtes Koordinatensystem  $a, b$  transformiert werden kann. Dies geschieht geometrisch durch den Mohrschen Kreis. Hierbei ergeben sich für  $\alpha = \alpha_0$  die Grenzwerte der Normalspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  mit  $\tau_{ab} = 0$ , für  $\alpha = \bar{\alpha}_0$  die Grenzwerte der Hauptschubspannungen  $\tau_{1,2}$  mit  $\sigma_a = 0, \sigma_b = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}; & \text{tg } 2 \alpha_0 &= \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \\ \tau_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}; & \text{tg } 2 \bar{\alpha}_0 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau_{xy}}; & \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 &= 45^\circ. \end{aligned} \right\} (40)$$

Größe und Richtung der Hauptspannungen werden am einfachsten geometrisch durch den Mohrschen Kreis bestimmt.

Die Ergebnisse dienen zu einer graphischen Beschreibung des Spannungsfeldes (Abb. 16). Die Richtungen der  $\sigma_{1,2}, \tau_{1,2}$  aller Punkte bilden die Trajektorien. Sie werden am besten aus Spannungsisoklinen abgeleitet, welche die Punkte gleichgerichteter  $\sigma_{1,2}$  und  $\tau_{1,2}$  verbinden. Die Trajektorien zweier gleichartiger Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\pm \tau_{1,2}$  kreuzen sich rechtwinklig, während die Büschel der  $\sigma_{1,2}$  und  $\tau_{1,2}$  in jedem Punkte den Winkel  $45^\circ$  einschließen. Das Bild kann durch die Kurven gleich großer Hauptspannungen und gleich großer Hauptschubspannungen ergänzt werden.

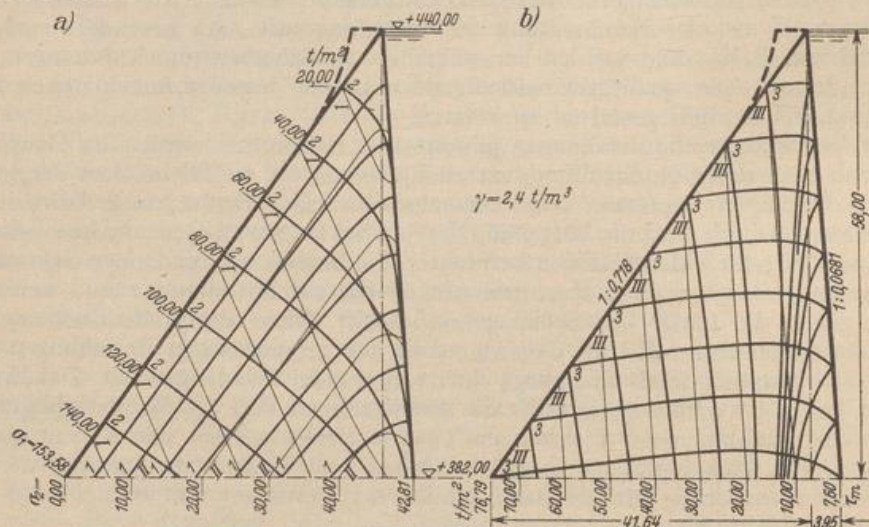


Abb. 16. Beschreibung des Spannungszustandes eines Talsperrenquerschnittes (Saidenbachtalsperre, Chemnitz).

- Kurvenscharen I und II: Trajektorien der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .
- Kurvenscharen I und II: Linien gleicher Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .
- Kurvenschar III: Trajektorien der Hauptschubspannungen  $\tau_m$ .
- Kurvenschar III: Linien gleicher Hauptschubspannungen  $\tau_m$ .

Bei der Anwendung im Bauwesen werden die Normalspannungen besser durch die auf die Längeneinheit bezogenen Längskräfte  $N_a, N_b$  und  $N_1, N_2$  in kg/m, die Schubspannungen durch die auf die Längeneinheit bezogenen Schubkräfte  $N_{ab}$



und  $N_{1,2}$  ersetzt. Die Beziehungen (39) und (40) werden hierdurch nicht geändert. Sie sind für Scheiben aus Eisenbeton durch W. Flügge erweitert worden und bilden in dieser Form ein wertvolles Hilfsmittel für die einwandfreie Stahlbewehrung.

Jackson, A.: Spannungslinien. Diss. Stuttgart 1916. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. 1, 2. Aufl. München 1928. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, Akira: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Mohr, O.: Technische Mechanik, Abhandlung VIII. Der Spannungszustand einer Stauwand. 3. Aufl. Berlin 1928. — Föppl, L.: Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium d. Techn. Hochschule München, 3. Folge. München 1930. — Flügge, W.: Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. Ing. Arch. 1930 S. 481. — Coker u. Filon: Photo-Elasticity. Cambridge 1931.

### 10. Der Spannungszustand des Stabes.

Scheiben, deren Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Länge klein sind, werden als Stäbe bezeichnet. Die Schwerpunkte der Querschnitte bilden die Stabachse. Sie ist gerade, gekrümmt oder zu einem Stabzug gebrochen. Die Stäbe werden, einzeln oder zu Gruppen vereinigt, je nach der Verbindung als ebene und räumliche Stab- oder Fachwerke verwendet. Der Querschnitt ist nicht wie bei der Scheibe immer ein Rechteck, sondern erhält zahlreiche für das Bauwesen charakteristische Formen. Man unterscheidet ein- und mehrfache Querschnitte und trennt Querschnitte mit ein- und mehrfacher Symmetrie von denjenigen ohne Symmetrie.

Jeder Querschnitt wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Schwerpunkt  $S$  liegt und dessen Achsen  $y, z$  Hauptträgheitsachsen sind, so daß

$$\int_F y dF = 0, \quad \int_F z dF = 0, \quad \int_F yz dF = 0. \quad (41)$$

Die geometrischen Eigenschaften werden durch die Fläche  $F$ , die Hauptträgheitsmomente  $J_y, J_z$  und den Kern beschrieben.

Mit der Definition des Stabes ist im Gegensatz zur Scheibe die Möglichkeit einer räumlichen Belastung verbunden. Sie führt im allgemeinen neben der relativen Verschiebung benachbarter Querschnitte in Richtung der  $x$ -Achse  $du_0 = \epsilon_0 dx$  und der relativen Neigung  $d\psi_y \mp d\psi_z$  um eine zur Stabachse senkrechte Drehachse auch zu einer Verschiebung  $dv_0 \mp dw_0$  und zur Verdrillung  $d\vartheta$  der Stabachse (Abb. 17). Die letzten beiden Komponenten sollen jedoch so klein sein, daß die Verzerrung des Querschnitts als eben angesehen und durch

$$\epsilon_x dx = \epsilon_0 dx + z d\psi_y - y d\psi_z \quad (42)$$

beschrieben werden kann. Die Spur der Belastungsebene (Kraftlinie) verläuft dann bei Querschnitten mit zwei- und mehrfacher Symmetrie durch den Schwerpunkt. Bei allen übrigen Querschnitten ist ein ausgezeichnete Punkt  $T$  vorhanden, der die Kraftlinie enthalten muß, damit die Verzerrung nach (42) beschrieben werden kann. Er heißt nach C. Weber Querpunkt. Jede Symmetrieachse des Querschnitts ist ein geometrischer Ort für  $T$ . Der Ansatz kann demnach verwendet werden, wenn die Kraftlinie bei einfacher Symmetrie des Querschnitts mit der Symmetrieachse zusammenfällt und bei doppelter Symmetrie durch den Schwerpunkt verläuft. Die Teile des Querschnitts müssen außerdem in jedem Falle stark genug sein, um die Verzerrung des Querschnitts in seiner Ebene auszuschließen. Dies gilt insbesondere für aufgelöste Querschnitte, für Ring- und Kastenquerschnitte.

Die Normalspannung  $\sigma_x$  ist mit der für die technische Theorie grundlegenden

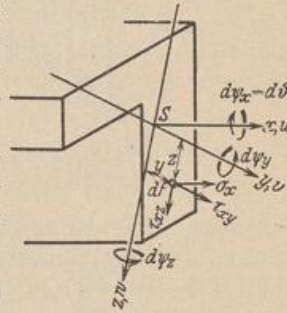


Abb. 17.



Annahme einer ebenen Verschiebung des Querschnitts bei einer linearen Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung nach R. Hooke bestimmt. Die übrigen Spannungen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Prisma. Die Normalspannungen  $\sigma_y, \sigma_z$  sind jedoch bei geraden und wenig gekrümmten Stäben, abgesehen von dem Bereich um Einzellasten, klein gegen  $\sigma_x$  und werden daher in der Regel vernachlässigt.

**Definition und Gleichgewicht der Schnittkräfte.** Die Gleichgewichtsbedingungen gelten für die Kräfte an jedem frei beweglichen, endlichen Stabteil. Neben den äußeren Kräften, also den Lasten und Stützwiderständen, wirken an allen Anschlußstellen des Bauteils innere Kräfte, die als bekannt angenommen werden sollen. Wird dann der Stab an einem ausgezeichneten Querschnitt durchgeschnitten, so treten hierzu an jedem Abschnitt die unbekannt inneren Kräfte  $\sigma dF, \tau dF$ , deren positiver Sinn nach der positiven Richtung der Bezugsachsen  $x, y, z$  festgesetzt wird. Sie können zu einer resultierenden Kraft  $R^{(i)}$  und zu einem resultierenden Moment  $M_R^{(i)}$  zusammengefaßt werden. Als Bezugspunkt dienen in der Regel der

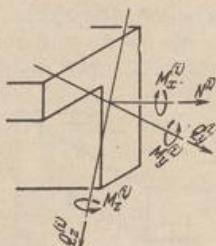


Abb. 18.

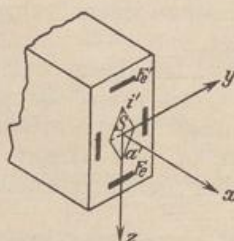


Abb. 19.

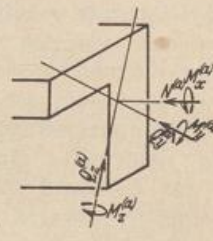


Abb. 20.

Schwerpunkt  $S$  oder ausgezeichnete Kernpunkte des Querschnitts. Unter Umständen werden auch die Schwerpunkte der Stahlbewehrung  $F_s, F_s'$  des Betonquerschnitts (Abb. 19) oder der Querschnitt  $T$  gewählt. Die Vektoren  $R^{(i)}$  und  $M_R^{(i)}$  werden für die Gleichgewichtsbedingungen nach drei ausgezeichneten Achsen zerlegt. Hierfür eignen sich am besten die Tangente an die Stabachse ( $x$ ) und die Hauptträgheitsachsen ( $y, z$ ) des Querschnitts. Die sechs Komponenten werden als die Schnittkräfte des Querschnitts bezeichnet (Abb. 18).

$$\left. \begin{aligned} R^{(i)} &= N^{(i)} \hat{+} Q_y^{(i)} \hat{+} Q_z^{(i)}, & M_R^{(i)} &= M_x^{(i)} \hat{+} M_y^{(i)} \hat{+} M_z^{(i)}; \\ \text{Längskraft: } N^{(i)} &= \int \sigma_x dF; \\ \text{Querkräfte: } Q_y^{(i)} &= \int \tau_{xy} dF, & Q_z^{(i)} &= \int \tau_{xz} dF; \\ \text{Biegemomente: } M_y^{(i)} &= \int \sigma_x z dF, & M_z^{(i)} &= - \int \sigma_x y dF; \\ \text{Drillungsmoment: } M_x^{(i)} &= \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dF. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die positive Richtung der Schnittkräfte ist mit der Definition der positiven Spannungen  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  im positiven Quadranten und mit dem positiven Richtungs- und Umlaufsinn des Bezugssystems bestimmt.

Die äußeren Kräfte des abgetrennten Stabteils werden in derselben Weise und mit demselben Bezugspunkt wie die inneren Kräfte zu einer resultierenden Kraft  $R^{(a)}$  und einem resultierenden Moment  $M_R^{(a)}$  zusammengefaßt. Ihr Richtungssinn wird positiv derart definiert, daß das Gleichgewicht aller Kräfte  $\mathfrak{P}, \mathfrak{C}, \sigma dF, \tau dF$  an dem abgetrennten Stabteil durch die folgenden Gleichungen ausgesprochen wird:

$$R^{(i)} \hat{+} R^{(a)} = 0, \quad M_R^{(i)} \hat{+} M_R^{(a)} = 0. \quad (44)$$

Nach dieser Definition sind die positiven Schnittkräfte des Querschnitts gleich den positiven Komponenten der zugeordneten äußeren Kräfte  $R^{(a)}, M_R^{(a)}$ , ihre Rich-



tungen sind entgegengesetzt (Abb. 20).  $R^{(a)}$  und  $M_R^{(a)}$  können für jeden Abschnitt angegeben werden, wenn die Stützenwiderstände oder die an den Anschlußstellen wirkenden Schnittkräfte bekannt sind.

Im allgemeinen besitzen nur drei Sonderfälle Bedeutung. Der erste behandelt den Stab mit ebener Krümmung und beliebiger Belastung, die nach Komponenten in seiner Ebene und senkrecht dazu zerlegt wird.  $R^{(a)}$  und  $M_R^{(a)}$  werden dann mit sechs Komponenten angegeben. Im zweiten Falle sind die Kräfte senkrecht zur Stabebene Null.  $R^{(a)}$  und  $M_R^{(a)}$  werden durch die drei Komponenten  $N$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$  bestimmt. Der dritte Sonderfall betrifft den geraden Stab, dessen äußere Kräfte mit seiner Achse in einer Ebene liegen. Ist deren Spur gegen die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts geneigt, so werden die der Geraden  $s$  zugeordneten Kernmomente angegeben oder die Vektoren der resultierenden Kraft und des resultierenden Moments auf die Hauptträgheitsachsen projiziert, so daß die Spannungen aus

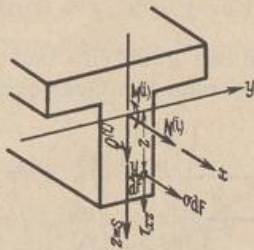


Abb. 21.

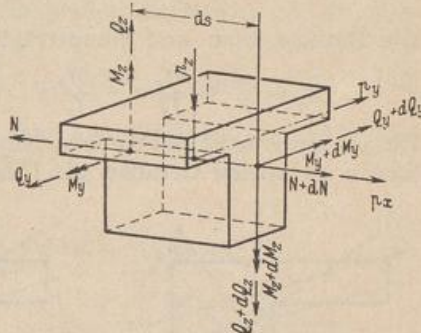


Abb. 22.

abgeleitet werden. Der Belastungsfall wird als schiefe Biegung bezeichnet. Bei zahlreichen Berechnungen fällt die Kraftlinie  $s$  in die Richtung der Hauptträgheitsachse  $z$  des Querschnitts. In diesem Falle sind  $M_x$ ,  $Q_y$  Null und  $\sigma_x = \sigma_x(z)$ . Die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  können mit drei Schnittkräften angegeben werden (Abb. 21).

$$N = \int \sigma_x dF, \quad M_y = \int \sigma_x z dF, \quad M_x = -\int \sigma_x y dF, \quad Q_y = \int \tau_{zy} dF, \quad Q_z = \int \tau_{xz} dF \quad (45)$$

Aus dem Gleichgewicht der Schnittkräfte an einem differentiellen Stabteil  $ds = dx$  werden bei beliebiger Belastung  $p = p_x \hat{+} p_y \hat{+} p_z$  in t/m (Abb. 22) die folgenden Beziehungen abgeleitet:

$$N = \int \sigma_x dF, \quad M_y = \int \sigma_x z dF, \quad Q_z = \int \tau_{xz} dF. \quad (46)$$

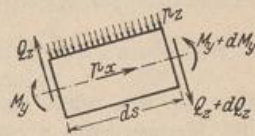


Abb. 23.

Schneidet die Ebene der äußeren Kräfte den Querschnitt in einer Hauptachse (Abb. 23), so ist einfacher

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, & \frac{dM_x}{dx} &= -Q_y, & \frac{dN}{dx} &= -p_x, \\ \frac{d^2M_y}{dx^2} &= \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, & \frac{d^2M_x}{dx^2} &= -\frac{dQ_y}{dx} = p_y. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Schneidet die Ebene der äußeren Kräfte den Querschnitt in einer Hauptachse (Abb. 23), so ist einfacher

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad \frac{dQ_z}{dx} = \frac{d^2M_y}{dx^2} = -p_z, \quad \frac{dN}{dx} = -p_x. \quad (48)$$

**Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des geraden Stabes.**

Die relative Verschiebung  $du = \Delta ds = \epsilon_x(y, z) ds$  einander zugeordneter Punkte benachbarter Querschnitte ist bei ebener Verschiebung des Querschnitts linear. Dasselbe gilt bei gerader Stabachse, also unveränderlichem  $ds(y, z)$  auch für die Dehnung  $\Delta ds/ds = \epsilon_x$ . Die lineare Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung führt daher beim geraden Stabe zum Geradliniengesetz der Normalspannung  $\sigma_x$ , das auch bei wenig gekrümmten Stäben als Näherung verwendet werden kann.



Die gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Querschnitte wird durch den Weg der Schwerpunkte  $du_0 = \Delta ds_0 = \varepsilon_0 ds$  und durch die gegenseitige Neigung  $d\psi = d\psi_y + d\psi_z$  beschrieben. Die relativen Verschiebungen und daher auch die Spannungen  $\sigma_x$  sind in der Drehachse Null. Sie heißt aus diesem Grunde Nulllinie. Im übrigen ist

$$du = \Delta ds = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds - y d\psi_z + z d\psi_y = \left( \varepsilon_0 + \frac{y}{\rho_z} - \frac{z}{\rho_y} \right) ds = \frac{\sigma_x}{E} ds.$$

Die Bezugsachsen sind Hauptträgheitsachsen, so daß mit (45)

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad \text{Für } y=0, z=0 \text{ ist } \sigma_x = \sigma_0 = \frac{N}{F}. \quad (49)$$

Die Grenzwerte  $\sigma_i$  und  $\sigma_a$  entstehen in den Punkten  $i$  und  $a$ , in denen die zur Nulllinie  $n$  parallelen Geraden die Umgrenzung des Querschnitts berühren (Abb. 24).

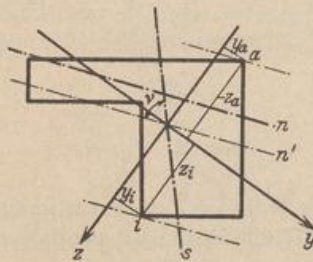


Abb. 24.

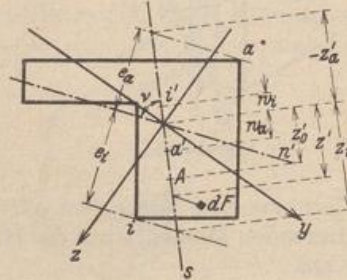


Abb. 25.

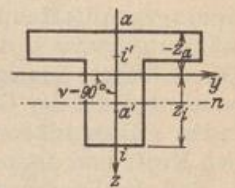


Abb. 26.

Die Richtung von  $n$  ist der zur Kraftlinie  $s$  konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse des Querschnitts ( $\sphericalangle(n, s) = \nu$ )

$$\sigma_{i,a} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a} - \frac{M_z}{J_z} y_{i,a}.$$

Der Ansatz wird einfacher, wenn die Momente der inneren Kräfte ( $\sigma_x dF$ ) auf die Kernpunkte  $i'$  und  $a'$  der Kraftlinie  $s$  bezogen werden (Kernmomente). Ist  $A$  der Spurpunkt der Resultierenden der äußeren Kräfte im Querschnitt, so gilt mit  $R_z^{(a)} = N^{(a)}$  (Abb. 25):

$$M_{i'} = N^{(a)} (z'_0 + |w_i|) = \int \sigma_x (z' + |w_i|) dF,$$

$$M_{a'} = N^{(a)} (z'_0 - |w_a|) = \int \sigma_x (z' - |w_a|) dF.$$

Die Strecken  $w_i, w_a$  werden von der Kernfigur des Querschnitts auf der Kraftlinie  $s$  abgeschnitten und als Kernweiten bezeichnet. Die Abstände der Punkte  $i$  und  $a$  von der zur Nulllinie  $n$  parallelen Schwerachse  $n'$  sind  $e_i = |z'_i| \sin \nu, e_a = |z'_a| \sin \nu$ . Das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse ist  $J'_n$ . Mit

$$\frac{J'_n}{|z'_i| \sin \nu} = F |w_i| = W_i, \quad \frac{J'_n}{|z'_a| \sin \nu} = F |w_a| = W_a$$

ist

$$\sigma_i = \frac{M_{i'}}{F |w_i|} = \frac{M_{i'}}{W_i}, \quad \sigma_a = - \frac{M_{a'}}{F |w_a|} = - \frac{M_{a'}}{W_a}. \quad (50)$$

Fällt die Spur  $s$  der Kraftebene mit der Hauptträgheitsachse  $z$  zusammen (Abb. 26), so ist  $M_x = 0, d\psi_z = 0, du = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds + z d\psi_y$ . Die Nulllinie  $n$  ist winkelnrecht zur Kraftlinie  $s$  ( $\sphericalangle(n, s) = \nu = 90^\circ$ ).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \left( \varepsilon_0 + \frac{d\psi_y}{ds} z \right) = \frac{\sigma}{E}, & \sigma &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z, & \sigma_{i,a} &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a}, \\ W_i &= \frac{J_y}{|z_i|}, & W_a &= \frac{J_y}{|z_a|}, & \sigma_i &= \frac{M_{i'}}{W_i}, & \sigma_a &= - \frac{M_{a'}}{W_a}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$



Die Beziehungen zwischen der Längskraft  $N$  (+ als Zugkraft), den Momenten der inneren Kräfte ( $\sigma_x dF$ ) in bezug auf den Schwerpunkt  $S$  und den Kernmomenten  $M_v, M_a$  sind

$$N = \frac{M_v' - M_a'}{|w_t| + |w_a|}; \quad M = \frac{M_v' |w_a| + M_a' |w_t|}{|w_a| + |w_t|}. \quad (52)$$

Das Spannungsbild des Stabes zeigt außerdem auch Schubspannungen  $\tau_{xz}, \tau_{xy}$ . Sie ergeben sich aus der Betrachtung des Gleichgewichts der Kräfte am differentialen Prisma:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Für den allgemeinen Fall der schiefen Biegung ohne Längskraft ist nach (47), (49)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{Q_z}{J_v} z + \frac{Q_v}{J_z} y, \\ \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dy dz + \int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dz &= -\frac{Q_z}{J_v} \int z dF - \frac{Q_v}{J_z} \int y dF. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

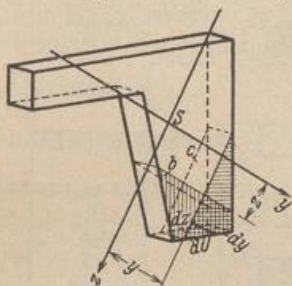


Abb. 27.

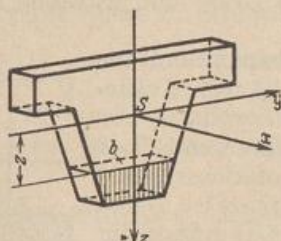


Abb. 28.

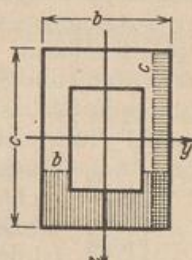


Abb. 29.

Für eine Fläche  $F_b$  oder eine Fläche  $F_c$ , die nach Abb. 27 durch die Parallele  $b, c$  zu der Hauptachse  $y, z$  begrenzt ist, gilt unter der Voraussetzung

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0$$

mit  $dy = dU \sin(dU, z)$ ,  $dz = dU \sin(dU, y)$ ,

$$\int_{U_b} [\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y)] dU = -\frac{Q_z}{J_v} S_{bv} - \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}. \quad (55)$$

Die Belastung des Stabes ist senkrecht zur Oberfläche gerichtet, so daß am Rande des Querschnitts

$$\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y) = 0. \quad (56)$$

Die Integration erstreckt sich also allein auf die Strecke  $b$  mit  $\sin(dU, z) = -1$ ,  $\sin(dU, y) = 0$  oder  $c$  mit  $\sin(dU, z) = 0$ ,  $\sin(dU, y) = -1$ . Daher ist

$$\int_b \tau_{zx} dy = \frac{Q_z}{J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}, \quad \int_c \tau_{yx} dz = \frac{Q_z}{J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{cz}. \quad (57)$$

Die mittleren Schubspannungen  $\tau_0$  im Schnitt  $b$  oder  $c$  lassen sich also folgendermaßen angeben:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx,0} &= \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{b J_z} S_{bz}, \\ \tau_{yx,0} &= \frac{Q_z}{c J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Sind die Hauptträgheitsachsen gleichzeitig Symmetrieachsen (Abb. 28 u. 29), so sind

$$S_{bz} = 0 \quad \text{und} \quad S_{cv} = 0. \quad \text{Daher} \quad \tau_{zx,0} = \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv}; \quad \tau_{yx,0} = \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \quad (59)$$



Im Regelfall ist  $Q_y = 0$ , also  $\tau_{yx} = 0$ ; für den Rechteckquerschnitt ist außerdem  $S_{by} = \frac{1}{2} ( \frac{h^2}{4} - z^2 ) b$ ;  $\tau_{zx} = \frac{3Q}{2F} [ 1 - ( \frac{2z}{h} )^2 ]$ ;  $\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$ , Abb. 30. (60)

Für Querschnitte, die sich nach Abb. 31 aus Rechtecken zusammensetzen, ist

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z}{a J_y} \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \left( \frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right]. \quad (61)$$

In diesen einfachen Fällen kann auch die Normalspannung  $\sigma_z$  nach Abb. 32 aus dem Gleichgewicht der senkrechten Kräfte angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} p dx + \frac{\partial T}{\partial x} dx + b \sigma_z dx = 0, \quad T = \int_{-h/2}^z b \tau_{zx} dz, \\ \text{Rechteckquerschnitt: } \sigma_z = -\frac{p}{2J_y} \left( \frac{h^3}{12} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Die Schubspannungen und Normalspannungen  $\tau, \sigma_x, \sigma_z$  werden zu Hauptspannungen zusammengesetzt. Größe und Richtung werden analytisch oder graphisch nach (40) bestimmt.

**Verdrillung und Schubspannung.** Die Verdrillung des Stabes durch äußere Kräftepaare  $M_x^{(a)}$  führt zur Verwölbung des Querschnitts, wenn dieser nicht rotationssymmetrisch begrenzt ist. Daher ist der lineare Ansatz für die Normalspannungen  $\sigma_x$  auch bei gleichzeitiger Biegung nicht mehr gültig

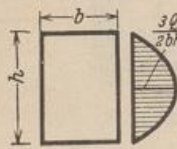


Abb. 30.

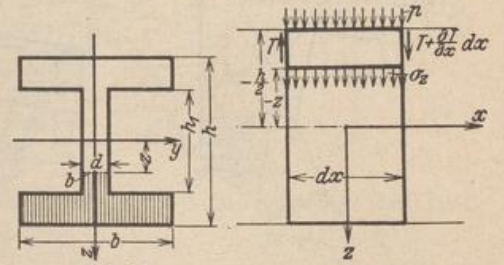


Abb. 31.

Abb. 32.

und als Näherung nur brauchbar, wenn die Verdrillung im Verhältnis zur Biegung klein ist.

Um Formänderung und Festigkeit abzuschätzen, wird der bezogene Verdrehungswinkel  $d\theta/ds$  dem Drehmoment  $M_x$  des Querschnitts proportional gesetzt. Als Faktor dient das Produkt aus Gleitmodul  $G$  und einer dem Trägheitsmoment ähnlichen Querschnittskonstanten  $T$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{G T}. \quad (63)$$

O. Bach setzt in Anlehnung an einen Ansatz von St. Venant bei Rechteckquerschnitten von Stäben aus homogenem Werkstoff auf Grund von Versuchen mit  $b/h = \lambda < 1$

$$T = \frac{\lambda^3}{(3,645 - 0,061 \lambda)(1 + \lambda^2)} h^4. \quad (64)$$

Die Zahlen stimmen mit den theoretischen Ergebnissen überein, die A. Föppl und C. Weber durch Integration der Differentialgleichung erhalten haben. C. Weber setzt für den Rechteckquerschnitt und homogenen Werkstoff mit  $h/b = n > 1$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{n \psi_3 b^4 G}; \quad \tau_{\max} = \psi_1 G \cdot b \frac{d\theta}{ds}; \quad T = n \psi_3 b^4. \quad (65)$$

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
$\psi_1$	0,6753	0,8476	0,9300	0,9854	0,9970	0,9990	~ 1	~ 1	1
$\psi_3$	0,1404	0,1957	0,2286	0,2633	0,2808	0,2982	0,3070	0,3123	0,3333



Diese Zahlen können mit großer Genauigkeit aus den folgenden Funktionen entwickelt werden:

$$\psi_1 \approx 1 - \frac{0,65}{1+n^3}, \quad \psi_3 = \frac{1}{3n} \left( n - 0,630 + \frac{0,052}{n^4} \right). \quad (66)$$

Nach den Versuchen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton über den Widerstand von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehen bestehen bei geringen Schubspannungen und sorgfältiger Bewehrung keine Bedenken, die Ansätze für homogenen Baustoff auch für Bauteile aus Eisenbeton anzuwenden. Indessen soll die Verdrillung stets nur untergeordnete Bedeutung und die damit verbundene Schubspannung nur die Eigenschaft von Nebenspannungen besitzen.

Werden nach (43) die Normal- und Schubspannungen eines infinitesimalen Stabteils  $ds$  mit großer Krümmung der Achse zu Schnittkräften zusammengefaßt, so können mit

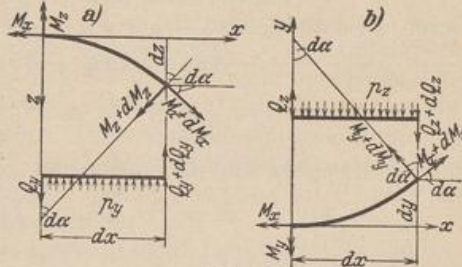


Abb. 33.

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad \sin(d\alpha) = d\alpha, \quad dy = dz = \frac{dx^2}{2r} \approx 0, \quad ds \approx r d\alpha \approx dx$$

bei Belastung senkrecht zur Stabebene die folgenden Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden (Abb. 33):

a) Krümmung des Stabes im Aufriß ( $N_x = Q_z = M_y = 0$ ):

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} = -p_y, \quad \frac{dM_x}{dx} + \frac{M_x}{r} + Q_y = 0, \quad \frac{dM_z}{dx} = \frac{M_z}{r} \\ \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{M_x}{r^2} = -p_y. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

b) Krümmung des Stabes im Grundriß ( $N_x = Q_y = M_z = 0$ ):

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} + \frac{M_y}{r} - Q_z = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_x}{r} \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{M_y}{r^2} = -p_z. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Hierbei sind alle kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt.

**Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des gekrümmten Stabes.** Die Krümmung derjenigen gebogenen, ebenen Stäbe, welche im Bauwesen verwendet werden, ist in der Regel so klein, daß die Spannungen nach den Ansätzen (49), (51) für den geraden Stab berechnet werden. Ausnahmen ergeben sich an den Winkelpunkten eines Stabzuges. Die Ausrundung kann hier unter Umständen die Anwendung der Ergebnisse rechtfertigen, welche für die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau$  eines gebogenen Stabes aufgestellt worden sind, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt. Als Grundlage dient auch hier die Annahme einer ebenen Verschiebung des Querschnitts, obwohl diese nicht allein durch die Schubspannungen  $\tau_{xz}$ , sondern auch durch die Normalspannungen  $\sigma_z$  gestört wird.

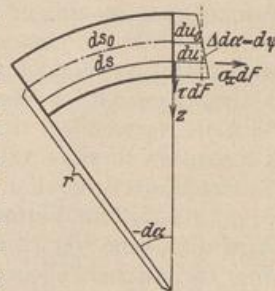


Abb. 34.



Aus Symmetriegründen ist  $du = du(z) = du_0 + z d\psi$  nur von  $z$  abhängig. Dagegen sind nunmehr  $\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + \frac{d\psi}{ds} z$  und ebenso  $\sigma_x$  quadratische Funktionen von  $z$ , da sich  $ds$  mit  $z$  ändert. Zunächst gelten die folgenden Beziehungen (Abb. 34):

$$ds_0 = -r d\alpha, \quad ds = ds_0 + z d\alpha, \quad \varepsilon_{0z} = \frac{\Delta ds_0}{ds}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\Delta ds_0}{ds_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{ds} = \frac{\Delta ds}{ds}.$$

Durch Belastung wird  $ds_0 \rightarrow ds_0 + \Delta ds_0$ ,  $d\alpha \rightarrow d\alpha + \Delta d\alpha$ ,  $ds \rightarrow ds + \Delta ds$ ,

$$\Delta ds = \Delta ds_0 + \Delta z d\alpha + z \Delta d\alpha; \quad \Delta z \approx 0.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta ds_0 + z \Delta d\alpha}{ds_0 + z d\alpha} = \varepsilon_0 + \left( \varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{z}{r-z}. \quad (69)$$

Elastizitätsgesetz und Definition der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E; \quad N = \int \sigma_x dF = E \int \varepsilon_x dF; \quad M = \int \sigma_x z dF = E \int \varepsilon_x z dF,$$

$$\int \frac{z^2}{r^2} \frac{r}{r-z} dF = \int \frac{z^2}{r^2} \left( 1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \dots \right) dF = \frac{\Theta}{r^2}; \quad \Theta \approx J.$$

$$\frac{N}{E} = F \varepsilon_0 + \left( \varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{\Theta}{r^2}; \quad \frac{M}{E} = \left( \varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{\Theta}{r}.$$

$$E \varepsilon_0 = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF}; \quad E \Delta d\alpha = E d\psi = \left( \frac{M}{\Theta} - \frac{N}{rF} + \frac{M}{r^2 F} \right) ds_0. \quad (70)$$

Normalspannung als Funktion der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF} + \frac{Mz}{\Theta} \frac{r}{r-z}. \quad (71)$$

Für  $r \gg h$  ist:  $\frac{r}{r-z} \approx 1$ ,  $\Theta \approx J_v$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{N}{EF}$ ,  $\Delta d\alpha = d\psi \approx \frac{M}{EJ_v} ds_0$ ,

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{J_v}. \quad (72)$$

Die Schubspannungen  $\tau_{xz}$  erfahren ebenfalls geringe Änderungen gegenüber den Angaben (58), (59) für den geraden Stab. Sie sind jedoch hier bereits als Näherung anzusehen, so daß sie auch zur Abschätzung der Schubspannungen des gekrümmten Stabes genügen.

**Anwendungsbereich der technischen Biegelehre.** Die Spannungsberechnung nach der technischen Biegelehre ist dort unbrauchbar, wo die Voraussetzungen der ebenen Verzerrung des Querschnitts nicht erfüllt sind. Dies ist der Fall an Knickpunkten und Unstetigkeitsstellen von Stabzügen und unter Einzellasten. Die Spannungsergebnisse des Geradliniengesetzes sind daher nach dem St. Venantschen Prinzip erst in einiger Entfernung von diesen ausgezeichneten Querschnitten zutreffend. Für die genauere Untersuchung des singulären Bereichs müssen andere Hilfsmittel verwendet werden.

Im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen werden auch in zahlreichen Fällen Bauteile verwendet, deren Werkstoff für Zug und Druck verschiedene elastische Konstanten besitzt oder zur Übertragung von Zugspannungen ungeeignet ist. Andere Bauteile werden aus mehreren Werkstoffen zusammengesetzt, welche je nach ihrem elastischen Vermögen an der Übertragung der inneren Kräfte beteiligt sind. Wird die ebene Verschiebung des Querschnitts in diesen Fällen auch als Grundlage einer technischen Theorie beibehalten, so erfahren die Ansätze zur Spannungsberechnung keine Änderung. Sie werden nach wie vor allein aus dem Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte abgeleitet. Sie bilden daher auch die Grundlage für den Festigkeitsnachweis und die Bemessung von Eisenbetonquerschnitten.

Weber, C.: Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Mitt. üb. Forschungsarbeiten d. VDI 1922 S. 249. — Derselbe: Biegung und Schub in geraden Balken. Z. angew. Math. Mech. 1924



S. 334. — Föppl, A.: Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. 3: Festigkeitslehre 10. Aufl. Leipzig 1927. — Timoshenko, S., u. J. M. Lessells: Festigkeitslehre. Berlin 1928. — Timoshenko, S.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Handb. physik. u. techn. Mechan. Bd. 4. Leipzig 1929. — Girtler, R.: Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen. Wien 1931.

## 11. Die Eigenspannungen des Baustoffs.

Bei jedem Festigkeitsnachweis wird mit der spannungsfreien Herstellung des Baustoffs gerechnet. Dies gilt von Gußeisen und Stahl ebenso wie von Beton und Eisenbeton. Wissenschaft, Technik und Handwerkskunst sind gemeinsam bemüht, dieses Ziel der Baustoffherzeugung zu erreichen. Die allgemeine physikalische Erkenntnis und die technischen Erfahrungen aus diesen Bestrebungen bilden die Grundlage der zahlreichen behördlichen Bestimmungen, welche das jederzeit Erreichbare im Interesse der öffentlichen Sicherheit vorschreiben.

Leider können die Baustoffe nur in beschränktem Maße in homogener Beschaffenheit, frei von Vorspannungen geliefert werden. Diese sind durch die physikalischen und chemischen Vorgänge bei der Herstellung und Verarbeitung unvermeidlich. Sie entstehen aus Temperatur- und Schwindwirkungen und aus den Unterschieden in den physikalischen Konstanten der Bestandteile. Ihre Ursache kann mittelbar durch die Kerbwirkung von Hohlräumen und Fremdeinschlüssen erklärt werden. Dasselbe gilt von den zahlreichen mikroskopisch feinen Rissen, der mikroskopisch mangelhaften Raumauffüllung und der wechselnden Dichte des Mittels. Diese bestimmen die allgemeinen Festigkeitseigenschaften, insbesondere das Verhältnis von Zug- und Schubfestigkeit zur Druckfestigkeit eines Baustoffes.

Die Bedeutung der Eigenspannungen wächst mit dem räumlichen Zusammenhang der Tragwerke. Sie ist also bei Flächentragwerken größer als bei Stabwerken und nimmt mit den Schwind- und Temperaturwirkungen zu. Die Erstarrungskontraktion des Baustoffs ist neben der gleichmäßigen Raumverkürzung stets noch von Einzelercheinungen begleitet, welche von der Ungleichartigkeit des Vorganges herrühren. Diese sind die Ursache von großen Eigenspannungen und müssen daher vermieden werden, um nicht die Brauchbarkeit, vielleicht sogar den Bestand eines Bauteils zu gefährden.

Bauteile aus Eisenbeton unterliegen außerdem stets Eigenspannungen durch die Raumveränderung des Betons relativ zur Stahlbewehrung. Daher werden sich unsymmetrisch bewehrte Bauteile beim Abbinden des Betons ebenso krümmen wie bei ungleichförmiger Temperaturänderung. Diese Erscheinungen sind von L. Herzka in mehreren Arbeiten behandelt worden. Er vergleicht nach den Ergebnissen von österreichischen Versuchen die Schwindwirkung nach vier Wochen und zwölf Monaten mit einer ungleichförmigen Erwärmung der oberen und unteren Fläche im Betrage von  $14^{\circ}\text{C}$  bis  $64^{\circ}\text{C}$ .

Die lineare Verkürzung der Bauteile durch Schwinden wird in den Bestimmungen einem Temperaturrückgang von  $t_0^0$  gleichgesetzt, besser jedoch auf ein Schwindmaß bezogen, welches von dem Grad der Bewehrung abhängt:

$$n = E_e/E_b; \quad \psi = F_e/F_b;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Schwindmaß des unbewehrten Betons: } \varepsilon_{0s} = \Delta l/l = 0,00036, \approx 0,36^{\circ}/100 \\ \text{Schwindmaß des Eisenbetons: } \varepsilon_s = \Delta l/l = \varepsilon_{0s}/(1 + n\psi), \\ \text{Verbundschwindspannungen: im Eisen } \sigma_{e,d} = \varepsilon_s E_e, \text{ im Beton } \sigma_{b,z} = \psi \varepsilon_s E_e. \end{array} \right\} (73)$$

Eine gleichmäßige Temperaturänderung des Tragwerks erzeugt eine zur ursprünglichen ähnliche Form. Daher werden in diesem Falle Eigenspannungen nur bei geometrischer Überbestimmtheit der Stützung hervorgerufen. Ihre Größe ist, abgesehen von der Wärmeausdehnungszahl  $\alpha_t$ , bestimmt durch die Querschnittsab-



messungen, den Wärmeschutz und die physikalischen Konstanten des Wärmedurchgangs. Sie sind zum Teil behördlich festgesetzt und in § 16 der Bestimmungen enthalten. Hierbei werden die gleichförmige Temperaturänderung  $t^0$  und der Temperaturunterschied  $t_w^0 - t_o^0 = \Delta t^0$  zwischen den seitlichen Begrenzungen des Bauteils unterschieden. Die Angabe von  $t^0$  hängt von den Grenzwerten der Jahrestemperatur und der Lage des Bauteils ab. Daher werden Brückenträger anders behandelt als die Konstruktionen innerhalb von Bauwerken. Die ungleichförmige Erwärmung ist bei Brückenträgern, vor allem jedoch bei Industriebauten mit Ofenanlagen, Schornsteinen und Behältern für heiße Füllungen von Bedeutung. Bei derartigen Aufgaben empfiehlt sich stets eine eingehende Berechnung des Wärmeabfalls, welcher im Bauteil verarbeitet werden muß. Jedenfalls verdienen die Eigenspannungen aus der Temperaturwirkung in allen Fällen eingehende Beachtung, weil sie unter Umständen allein über die Brauchbarkeit und den Bestand eines Tragwerks entscheiden.

Das Temperaturgefälle in planparallelen, aus Schichten zusammengesetzten Wänden wird aus dem Wärmedurchgang bestimmt. Die stündlich durch  $1 \text{ m}^2$  Wandfläche wandernde Energie ist bei einem Wärmeleitwiderstand  $r_L$  und den Wärmeübergangszahlen  $\alpha_1$  (innen) und  $\alpha_2$  (außen)

$$q = k(t_1 - t_2) = \frac{t_1 - t_2}{r_{a1} + r_L + r_{a2}}. \quad (74)$$

Hierbei ist bei  $n$  Schichten der Wand mit den Dicken  $\delta$  und den Wärmeleitzahlen  $\lambda$

$$r_L = \sum_1^n \frac{\delta}{\lambda}; \quad r_{a1} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad r_{a2} = \frac{1}{\alpha_2}. \quad (75)$$

Der Temperaturdurchgang in der Schicht  $h$  und die Temperaturübergänge innen und außen berechnen sich zu

$$\Delta t_h = q \delta_h / \lambda_h; \quad \Delta t_1 = q r_{a1}; \quad \Delta t_2 = q r_{a2}. \quad (76)$$

Der Ansatz gilt auch für zylindrische Wände, wenn  $\delta/\lambda$  durch  $\delta/(\lambda \cdot \varphi)$  ersetzt wird.  $\varphi$  ist ein Formfaktor<sup>1</sup>.

Temperaturverlauf in einem gemauerten Schornstein mit Luftspalt und durchgehendem Futter: Temperatur der Heizgase  $t_1 = 250^\circ$ . Lufttemperatur  $t_2 = 0^\circ$ . Futter  $\delta_1 = 0,31 \text{ m}$ . Luftspalt  $\delta_2 = 0,03 \text{ m}$ , Mantel  $\delta_3 = 1,04 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/r_{a1} = 40 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0, & \alpha_2 &= 1/r_{a2} = 23 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0. \\ \lambda_1 &= 0,51 \text{ kcal/m h}^0; & \lambda_2 &= 0,50 \text{ kcal/m h}^0; & \lambda_3 &= 0,47 \text{ kcal/m h}^0; \\ k &= 0,339, & q &= 84,7 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}. \end{aligned}$$

Hieraus werden rückwärts die folgenden Temperaturunterschiede berechnet. Übergang innen:  $2,1^\circ$ ; Durchgang im Futter:  $51,7^\circ$ ; Durchgang in der Luftschicht:  $5,1^\circ$ ; Durchgang im Mantel:  $187,4^\circ$ ; Übergang nach außen  $3,7^\circ$ . Würde man den Luftspalt durch eine ca.  $10 \text{ cm}$  starke Isolation mit einer Wärmeleitzahl  $\lambda_2 = 0,04$  ersetzen, so würde sich die folgende Zahlenreihe ergeben:

$$q = 46,4 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}; \quad 250^\circ = 1,2^\circ + 28,3^\circ + 115,9^\circ + 102,6^\circ + 2,0^\circ.$$

Temperaturverlauf in einem Eisenbetonbehälter mit Isolierung aus Hohlziegelmauerwerk und Innenschale aus Magerbeton: Temperatur der Flüssigkeit:  $t_1 = 90^\circ$ , Lufttemperatur  $t_2 = 10^\circ$ , Innenschale  $\delta_1 = 0,08 \text{ m}$ , Isolierung  $\delta_2 = 0,12 \text{ m}$ , Außenschale  $\delta_3 = 0,20 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/r_{a1} = 500 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0, & \alpha_2 &= 1/r_{a2} = 10,2 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0, \\ \lambda_1 &\approx 1,2 \text{ kcal/m h}^0, & \lambda_2 &= 0,30 \text{ kcal/m h}^0, & \lambda_3 &= 1,5 \text{ kcal/m h}^0, \\ k &= 1,429, & q &= 114,32 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Temperaturunterschiede: Übergang innen:  $0,2^\circ$ ; Durchgang Innenschale:  $7,6^\circ$ ; Durchgang Isolierung:  $45,8^\circ$ ; Durchgang Außenschale:  $15,2^\circ$ ; Übergang nach außen:  $11,2^\circ$ .

<sup>1</sup> Vgl. Hütte 26. Aufl. I, S. 494.



**Angaben zur Ermittlung von Schwind- und Temperaturspannungen.**

Bestimmungen des Deutschen Ausschusses (1932):

Nach den klimatischen Verhältnissen ist:

$$t_{\min} = -5^{\circ} \text{ bis } -10^{\circ}, \quad t_{\max} = +25^{\circ} \text{ bis } +30^{\circ}.$$

Festigkeitsnachweis in der Regel für:  $t = \pm 15^{\circ}$  bis  $\pm 20^{\circ}$ .

Ausgangstemperatur:  $+10^{\circ}$ . Sind Bauteile gegen Wärmewirkungen geschützt oder beträgt ihre geringste Höhe  $\geq 0,7$  m, so ist  $t = \pm 10^{\circ}$  bis  $\pm 15^{\circ}$ . Ungleichmäßige Erwärmung kommt nur für besondere Fälle in Betracht.

Schwinden des Eisenbetons: Temperaturänderung  $t_s = -15^{\circ}$ , Betonbogen und Gewölbe mit einer Längsbewehrung von  $\varphi\%$ :

$\varphi < 0,1^*$	$0,1^* \leq \varphi < 0,5$	$0,5 \leq \varphi \%$
$t_s = -25^{\circ}$	$-20^{\circ}$	$-15^{\circ}$

\*  $F_s$  oben und unten mindestens je  $4 \text{ cm}^2$  auf 1 m Gewölbbeite.

**Ausländische Betonbestimmungen:**

	Österreich	Schweiz	Tschechoslowakei	Dänemark	Rußland
$t$	$\pm 15^{\circ}$	$\pm 15^{\circ}$	$\pm 12^{\circ}$	$\pm 10^{\circ}$ bis $\pm 20^{\circ}$	$\pm 30^{\circ}$
$t_s$	$-15^{\circ}$	$-20^{\circ}$	$-10^{\circ}$	$-15^{\circ}$	$-10^{\circ}$

**Linearer Ausdehnungskoeffizient  $\alpha_t$ :**

Beton und Eisenbeton	Quader- und Bruchsteinmauerwerk	Ziegelmauerwerk	Stahl
0,000010	0,000008	0,000005	0,000012

**Wärmeübergangszahlen  $\alpha = 1/r_a \text{ kcal/m}^2\text{h}^{\circ}$**

an der Oberfläche eines festen Körpers bei einem Temperaturabfall  $\Delta t^{\circ}$ .

a) Ruhende Luft:

$\Delta t =$	0	10	25	50	90
$\alpha \approx$	3,0	3,8	4,9	5,9	10,2

b) Bewegte Luft: Die Werte  $\alpha$  aus a) sind um 25÷50% zu erhöhen; für Schornsteine ist nach Deiningner in der Regel  $\alpha_1 = 30,3$ ,  $\alpha_2 = 10,0$ , sehr hohe freistehende Schornsteine

innen, bei 10 m/sek Gasgeschwindigkeit . . .  $\alpha_1$  bis 40,  
außen, bei 5 m/sek Windgeschwindigkeit . . .  $\alpha_2$  bis 23.

c) Ruhende, heiße, nicht siedende Flüssigkeit:  $\alpha$  rund 500.

d) Kondensierender Wasserdampf:  $\alpha$  bis 10000.

**Wärmeleit Zahlen  $\lambda$  in  $\text{kcal/m h}^{\circ}$ :**

Bruchsteinmauerwerk . . . . .	1,3 ÷ 2,1	Ziegelmauerwerk . . . . .	0,60
Eisenbeton . . . . .	1,5 ÷ 1,75	Hohlziegelmauerwerk . . . . .	0,30
Klinkerverkleidung . . . . .	0,80	Hochofenschlacke, Dia-Material . . . . .	0,09
Zementmörtelputz . . . . .	0,78	Glaswolle, Gichtasche, Korkplatte . . . . .	0,06

Luftschicht:	$t_m \approx$	0	100°	200°	400°	600°
Durchgangstemp. $t_m$ ,	$(\lambda/\delta) \approx$	5	10	20	55	115
Dicke $\delta$ in m.						

Versuche des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton. Heft 23: Untersuchungen über die Längenänderungen von Betonprismen beim Erhärten und infolge von Temperaturwechsel. Ausgeführt von M. Rudeloff unter Mitwirkung von H. Sieglerschmidt. — Heft 34: Erfahrungen bei der Herstellung von Eisenbetonsäulen. Längenveränderungen der Eiseneinlagen im erhärtenden Beton. Bericht von M. Rudeloff. — Heft 35: Schwellung und Schwindung von Zement und Zementmörteln in Wasser und Luft. Bericht von M. Gary. — Heft 42: Schwindung von Zementmörteln an der Luft. Bericht von M. Gary. — Perkuhn: Riß- und Rostbildung bei



ausgeführten Eisenbetonbrücken im Eisenbahndirektionsbezirke Kattowitz und Breslau. Z. Bauw. 1916 S. 99. — Haberkalt: Das Schwinden des Betons und sein Einfluß auf Rißbildung und Tragfähigkeit von Bauwerken aus Beton und Eisenbeton. Öst. Wochenschr. öffentl. Baudienst 1916 Heft 4, 5, 6. — Schürch, H.: Versuche beim Bau des Langwieser Talüberganges. Berlin 1916. — Hencky, K.: Wärmeverluste durch ebene Wände. München 1921. — Schüle, F.: Der Einfluß des Schwindens auf einseitig bewehrte Eisenbetonbalken. Beton u. Eisen 1922 Heft 1. — Derselbe: Versuche über das Schwinden von Beton. Mitteilungen über Versuche, ausgeführt vom Eisenbetonausschuß des Österr. Ing. und Arch.-Vereins Heft 9. — Lewe, V.: Die statische Wirkung heißer Füllungen von Flüssigkeitsbehältern. Bauing. 1922 S. 516. Handb. Eisenbeton 5. Bd. 3. Aufl. S. 174. Flüssigkeitsbehälter. — Döring, K.: Wind und Wärme bei der Berechnung hoher Schornsteine. Berlin 1925. — Herzka, L.: Schwindspannungen in Trägern aus Eisenbeton. Leipzig 1925. — Derselbe: Grundlagen für die Berechnung von Rahmen bei ungleichmäßiger Durchwärmung. Bauing. 1926 Heft 24/25. — Stadelmann, E.: Temperaturbeobachtungen an ausgeführten Betonbauwerken der Schweiz. Schweiz. Ing.-Bauten in Theorie und Praxis. Zürich 1926. — Knoblauch, O.: Über den Temperaturverlauf im Schornsteinschacht. Bauing. 1927 Heft 23. — Busemann, A., u. O. Föppl: Physikalische Grundlagen der Elastomechanik, Handb. Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Herzka, L.: Das statische Verhalten der unter Schwindeinfluß stehenden Rahmentragwerke aus Eisenbeton. Beton u. Eisen 1929 S. 220. — Derselbe: Über Riß-, insbesondere Schwindrisserscheinungen an Bauwerken aus Beton und Eisenbeton. Bericht über die zweite Internat. Tagung für Brückenbau und Hochbau 1928 S. 702. Wien 1929. — Graf, O.: Die wichtigsten Ergebnisse der Versuche mit Eisenbeton. Handb. Eisenbetonbau Bd. 1. Berlin 1930. — Dumas, F.: Le béton armé et ses hypothèses. Génie civ. Bd. 47 (1930) Nr. 23 u. 24. — Deininger, K.: Die Entwicklung des Eisenbetonschornsteins in Theorie und Praxis. Stuttgart 1932. — Faber, O.: Elasticity, plasticity and shrinkage Abschn. VI 2 des Vorberichts zum ersten Kongreß der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Paris 1932. — Campus, F.: Ausbau der Statik des Eisenbetons mit Rücksicht auf die Baustoffeigenschaften. Bericht des 1. Internat. Kongr. für Brücken- und Hochbau. Zürich 1932. — Luftschitz, H.: Die Raumänderungen der Baustoffe. Berlin 1932.

## 12. Die Sicherheit des Tragwerks.

Die erfolgreiche Lösung einer Bauaufgabe erfüllt neben den allgemeinen Bedingungen für die Brauchbarkeit der Anlage die Forderung nach deren Sicherheit. Sie wird auf die Gebrauchsbelastung und auf die Festigkeitseigenschaften der Baustoffe bezogen und in der Regel getrennt für die Bauteile, ihre Verbindungen und für die Grenzschicht des Baugrundes nachgewiesen. Die äußeren Kräfte sind entweder ruhende Lasten und bewegliche Lasten, die als ruhend angesehen werden, oder Energien, die von bewegten Lasten herrühren und unter Umständen periodisch auftreten. Im ersten Falle wird die Sicherheit allein durch die Größe, Richtung und Eintragung der Lasten bestimmt. Im zweiten Falle hängt die Sicherheit außerdem von der Amplitude und der Frequenz der Energieübertragung ab. Die Sicherheit des Tragwerks kann daher bei ruhenden Lasten als Verhältnis  $\nu_p$  von Bruchbelastung und Gebrauchsbelastung angegeben werden. Sie bedarf aber bei der Eintragung von Energie der Ergänzung durch das Verhältnis  $\nu_E$  der Betriebsfrequenz zu den Eigenfrequenzen der belasteten Bauteile. Unter Umständen sind dabei auch die Eigenfrequenzen des ganzen Bauwerks einschließlich Gründung maßgebend.

Die Festigkeit eines Bauteils, eines mehrteiligen Tragwerks und seiner Verbindungen wird durch den Spannungs- und Verschiebungszustand der ungünstigsten Gebrauchsbelastung nachgewiesen. Dazu gehört unter Umständen auch die Nachprüfung der Stabilität des Gleichgewichts zwischen den äußeren und inneren Kräften. Für den Nachweis der dynamischen Stabilität werden die Eigenfrequenzen des Tragwerks aus dessen elastischen Eigenschaften abgeleitet.

Die Beziehung zwischen der Festigkeit des Tragwerks und dem Spannungs- oder Verzerrungstensor wird durch Hypothesen hergestellt, die sich bei der versuchstechnischen Nachprüfung bewährt haben. Hieraus sind dann allgemein anerkannte zulässige Spannungsgrenzen entwickelt und behördlich bestätigt worden, deren Einhaltung die Festigkeit und damit auch die Sicherheit der Bauteile verbürgt. Da jedoch die Versuche in der Regel nur einen einachsigen Spannungszustand



hervorrufen, bedeutet die Überschreitung der Grenzwerte in einzelnen Punkten um so weniger die allgemeine Minderung der Sicherheit eines Tragwerks, je höher der Grad der statischen Unbestimmtheit des Spannungszustandes ist und je weniger die physikalischen Eigenschaften des Baustoffs dabei Risse, also die Verwandlung von elastischer Energie in Oberflächenenergie im Sinne von A. A. Griffith, erwarten lassen. Diese Erkenntnis kommt daher am meisten den Baustoffen mit großem Arbeitsvermögen zugute. Sie ist aber auch bereits früher zur Beurteilung der Risse in Gewölben aus Beton und Mauerwerk herangezogen worden, die durch Eigenspannungen des Baustoffs entstanden sind. Sie gewinnt vor allem für räumlich zusammenhängende Konstruktionen Bedeutung, da Platten und Schalen, in schmale Streifen aufgelöst gedacht, als hochgradig statisch unbestimmte Verflechtung linearer Bauteile angesehen werden können, für welche die Überschreitung der Spannungsgrenze und die Zerstörung des Baustoffs an einzelnen Punkten nicht gleichzeitig den Zusammenbruch des Bauteils bedeuten. Der Versuch hat die größere Festigkeit kreuzweise bewehrter Platten gegenüber einseitig bewehrten Plattenstreifen eindeutig bestätigt. Das rührt zum Teil von der Mitwirkung zweier Hauptspannungen her, kann aber sonst nur durch den zweidimensionalen Charakter des Bauteils begründet werden. Dasselbe gilt auch bei Schalen, obwohl hier oft die Stabilität des Spannungszustandes für die Festigkeit ausschlaggebend sein wird.

Der Bruchvorgang ist auf die größte Hauptspannung, auf die größte Dehnung und die ihr zugeordneten Ersatzspannungen bei einachsiger Beanspruchung oder auf die größte Schubspannung zurückgeführt worden. Jede dieser Theorien steht mit anerkannten Regeln und mit der Beobachtung oder Versuchsergebnissen im Widerspruch. Dagegen kann die erweiterte Bruchtheorie von O. Mohr den Versuchsergebnissen und damit den physikalischen Eigenschaften der einzelnen Werkstoffe gut angepaßt werden. Sie gilt für Verschiebungsbrüche und beschreibt die Festigkeit eines Werkstoffs durch eine experimentell festzustellende Grenzkurve ( $g$ ), welche die für die Grenzstände  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  aufgezeichneten Mohrschen Kreise umhüllt (Abb. 35). Die mittlere Hauptspannung scheidet daher bei dieser Beurteilung des Bruchvorganges aus. Hierin liegt ein Widerspruch zu den Versuchsergebnissen.

Der Einfluß von dynamischen Wirkungen und von Ermüdungserscheinungen auf die Festigkeit eines Werkstoffs eröffnet den energetischen Betrachtungen auch auf diesem Gebiete der Mechanik ein aussichtsvolles Feld. Die Festigkeit wird darnach als Grenzwert der auf die Volumeneinheit bezogenen Gestaltänderungsenergie beschrieben. Die Definition versagt aber ebenso wie die Mohrsche Bruchhypothese bei spröden Stoffen. Sie stützt sich in diesem Fall nach der jüngsten Erkenntnis besser auf den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit als auf die Festigkeit des Stoffes. Der Bruchvorgang spröder Stoffe ist von A. A. Griffith hiernach als Erweiterung vorhandener Lockerstellen und inhomogener Einschlüsse zu Rissen entwickelt und als Umwandlung der aufgespeicherten elastischen Energie in Oberflächenenergie berechnet und durch Versuche geprüft worden. Mit dieser Theorie werden die Beziehungen zwischen der Festigkeit eines Werkstoffes und seinen physikalischen Eigenschaften geknüpft, also zwischen statischen, energetischen und thermischen Einflüssen auf der einen Seite und Dichte und molekularem Aufbau auf der anderen Seite. Die ausführliche Diskussion des Festigkeitsbegriffes ist nicht Gegenstand dieses Werkes. Sie kann an Hand der Literatur nachgelesen werden. Die kurzen Bemerkungen sind jedoch als Einführung in die Baustatik wichtig.

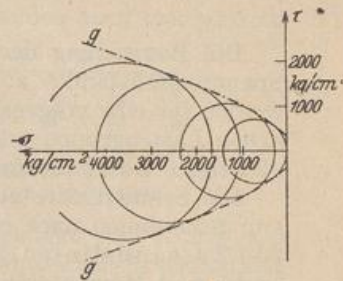


Abb. 35.

Duguet, Ch.: Limite d'élasticité et résistance à la rupture. II<sup>me</sup> partie, Statique générale 1885. — Mohr: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?



Z. VDI 1900 S. 1524. — Derselbe: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik S. 187. Berlin 1906. — Kármán, Th. v.: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Mitt. über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 118 und Z. VDI 1911 S. 1751. — Honegger, E., Zürich: Das Verhalten mechanisch beanspruchter Metalle. Eisenbau 1921 S. 47. — Sandel, G. D.: Über die Festigkeitsbedingungen. Leipzig 1925. — Schleicher: Der Spannungszustand an der Fließgrenze. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 199. — Derselbe: Über die Sicherheit gegen Überschreiten der Fließgrenze. Bauing. 1928 S. 253. — Náđai, A.: Plastizität und Erddruck. Handb. Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Gehler, W.: Sicherheitsgrad und Beanspruchung. Bericht über die 2. Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau S. 176. Wien 1929. — Griffith, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philos. Trans. Roy. Soc. A. vol. 221 (1921) S. 163; Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924 S. 55. — Smekal, A.: Naturwiss. Bd. 10 (1922) S. 799; Handb. der Physikalischen und Technischen Mechanik Bd. 4. 2. Hälfte. Leipzig 1931. Abschn. Kohäsion der Festkörper.

## II. Das statisch bestimmte Stabwerk.

### 13. Allgemeine Bemerkungen über Schnittkräfte, Zustands- und Einflußlinien.

Die Beurteilung der Sicherheit eines Stabwerks ist mit der Feststellung des Spannungszustandes auf die Berechnung der Schnittkräfte zurückgeführt. Diese werden für eine vorgegebene Belastung, für die ungünstigste Stellung einer beweglichen Lastengruppe oder auch für die einem jeden Querschnitt zugeordnete ungünstigste Zusammenfassung aller möglichen Belastungen angegeben.

Die Schnittkräfte aus einer vorgegebenen Belastung bilden, als die Ordinaten von Schaulinien nach einer ausgezeichneten Richtung zur Stabachse aufgetragen, drei Zustandslinien, die je nach der Art der Schnittkraft als Längskraft-, Querkraft- und Momentenlinie bezeichnet werden.

Die anderen beiden Aufgaben setzen die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes voraus, nach dem eine beliebige Kraftwirkung  $W_h$ , also Stützenwiderstand, Schnittkraft oder Formänderung, als lineare Funktion der einzelnen Lasten oder Lastengruppen

$$W_h = \sum_{m=1}^{m=n} W_{hm} P_m \quad (77)$$

angegeben werden kann. Diese Voraussetzung ist nach S. 19 für alle kinematisch starren Tragwerke erfüllt, deren elastische Eigenschaften im Belastungsbereich durch das Hookesche Gesetz beschrieben werden. Das Superpositionsgesetz gilt daher nicht für Stabwerke mit veränderlicher Gliederung.

Die Grenzwerte einer Schnittkraft aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter, gebundener Einzellasten  $P_m$  oder einer stetigen, gleichgerichteten Streckenbelastung  $p(x)$  werden mit der Einflußlinie der Schnittkraft bestimmt. Ihre Ordinaten sind die graphische Darstellung der Schnittkraft  $W_{hm}$ , welche durch die verschiebbliche, jedoch in ihrer Richtung unveränderliche Last  $P_m = 1 \text{ t}$  in allen möglichen Stellungen hervorgerufen wird. Die Ordinate  $W_{hm} = \eta_m$  wird von einer Bezugsgeraden im Schnittpunkt  $m'$  der Wirkungslinie von  $P_m$  in deren Richtung aufgetragen. Man unterscheidet daher Einflußlinien für senkrechte, waagerechte oder schräge Belastung des Stabzugs. Ihre Ordinaten sind im allgemeinen positiv oder negativ.

Die Einflußlinie dient zur Ermittlung der beiden ungünstigsten Stellungen der beweglichen Belastung mit

$$W_h = \sum W_{hm} P_m + \int p(x) W_{hm} dx = \max_{\min} W_{hp} \quad (78)$$

als positivem oder negativem Grenzwert. Diese können darnach auch selbst bestimmt