



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Energiebetrachtungen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Verformung ruft die inneren Kräfte  $\sigma dF$ ,  $\tau dF$  hervor, die ebenfalls als stetige Funktionen der Koordinaten angenommen werden. Sie erzeugen in Verbindung mit dem Bewegungsvorgang einen Arbeitsvorrat, also Formänderungsenergie, die bei der Entlastung innerhalb eines ausgezeichneten Spannungsbereichs infolge der besonderen physikalischen Eigenschaften des Werkstoffs wiedergewonnen werden kann. Der Werkstoff heißt dann elastisch, die obere Begrenzung jenes Bereichs Elastizitätsgrenze. Die Verformung wird als plastisch bezeichnet, wenn sie ohne Belastungsänderung fortschreitet und bleibende Formänderungen entstehen. Werkstoffe, deren Elastizitätsgrenze gleichzeitig Bruchgrenze ist, heißen spröde. Die an dem infinitesimalen Parallelepiped angreifenden Spannungen werden in drei Normalspannungen  $\sigma$  und in sechs Schubspannungen  $\tau$  zerlegt. Sie stehen mit den am Prisma angreifenden Massenkräften im Gleichgewicht. Hieraus ergeben sich nur sechs Bedingungsgleichungen. Der Spannungszustand ist daher statisch unbestimmt.

Erfahrungsgemäß sind die Spannungen mit den Verzerrungskomponenten durch ein Elastizitätsgesetz verknüpft, dessen Form von der physikalischen und chemischen Konstitution des Werkstoffs bestimmt wird. Sind die elastischen Eigenschaften isotrop und homogen, so wird nach R. Hooke der folgende lineare Zusammenhang angenommen:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \text{usw.}, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{usw.}; \\ \sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} e \right) \quad \text{usw.}, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \quad \text{usw.}; \\ e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, & G &= \frac{E}{2(1+\mu)}, & \mu &= \frac{1}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$E$  und die reziproke Poissonsche Zahl  $1/m = \mu$  sind die für einen isotropen, homogenen Werkstoff charakteristischen elastischen Konstanten. Der Ansatz gilt mit großer Annäherung für jeden Werkstoff innerhalb eines mehr oder weniger begrenzten Spannungsbereichs. Er kann als das lineare Glied einer allgemeinen Funktion angesehen werden, das zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Formänderung und Spannung innerhalb der Proportionalitätsgrenze des Werkstoffs genügt.

Der Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungszustand eines Körpers wird in jedem Punkte durch neun Spannungskomponenten  $\sigma$ ,  $\tau$ , sechs Verzerrungskomponenten  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  des differentialen Prismas und durch die drei zugeordneten Verschiebungskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  beschrieben. Die Spannungs- und Verzerrungskomponenten werden mit dem sechsgliedrigen Ansatz des Elastizitätsgesetzes (27), den sechs Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Verschiebungskomponenten (26) und mit den drei Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehung des Prismas eliminiert. Daher bleiben die drei Projektionsgleichungen des Gleichgewichts der an einem infinitesimalen Parallelepiped angreifenden inneren Kräfte und Massenkräfte als Funktionen der drei unbekanntenen Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  übrig. Die Lösung ist also eindeutig. Einer gegebenen Gruppe eingepprägter äußerer Kräfte ist nur ein Spannungs- und Verschiebungszustand zugeordnet. Der Ansatz ist linear, das Ergebnis daher von der Aufteilung der eingepprägten Lasten und von der Superposition der Teilwirkungen unabhängig.

**Energiebetrachtungen.** Spannungs- und Formänderungszustand werden durch den Begriff der Formänderungsarbeit verknüpft, die gegen die entstehenden inneren Kräfte geleistet wird. Dabei wird allmähliche Steigerung der Belastung angenommen, so daß die erregten inneren Kräfte mit den eingepprägten äußeren Kräften im Gleich-

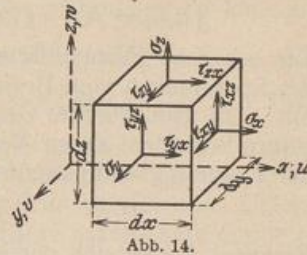


Abb. 14.

gewicht sind. Die aufgewendete Arbeit wird in diesem Falle vollständig als Formänderungsenergie aufgespeichert. Betragen die Spannungen in einem Zwischenzustand  $\sigma', \tau'$ , so ist die Zunahme der auf die Volumeneinheit bezogenen Formänderungsenergie  $A_i$

$$dA_i = \sigma'_x d\varepsilon_x + \sigma'_y d\varepsilon_y + \sigma'_z d\varepsilon_z + \tau'_{xy} d\gamma_{xy} + \tau'_{yz} d\gamma_{yz} + \tau'_{zx} d\gamma_{zx}.$$

In Verbindung mit dem Hookeschen Gesetz ergibt sich nach Abschluß des Bewegungsvorganges  $\varepsilon, \gamma$  mit  $\sigma$  und  $\tau$  als den Endwerten der Spannungen

$$\int dA_i = A_i = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (28)$$

Die bezogene Formänderungsenergie ist also halb so groß, als wenn die Endwerte der Spannungen vom Beginn der Belastung an vorhanden gewesen wären. Sie kann mit dem Hookeschen Gesetz zu einer homogenen quadratischen Funktion umgeformt werden, deren Veränderliche entweder die Verzerrungskomponenten oder die Spannungskomponenten sind.

$$A_i = A_i(\varepsilon, \gamma); \quad A_i = A_i(\sigma, \tau).$$

Demnach lassen sich partielle Ableitungen der Formänderungsenergie  $A_i$  nach den Formänderungskomponenten und nach den Spannungskomponenten bilden. Mit (27) ist

$$\frac{\partial A_i(\varepsilon, \gamma)}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x \quad \text{usw.}, \quad \frac{\partial A_i(\sigma, \tau)}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x \quad \text{usw.} \quad (29)$$

Das vollständige Differential der bezogenen Formänderungsarbeit ist dann

$$\begin{aligned} dA_i &= \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_x} d\varepsilon_x + \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_y} d\varepsilon_y + \frac{\partial A_i}{\partial \varepsilon_z} d\varepsilon_z + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz} + \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_{zx}} d\gamma_{zx} \\ &= \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Formänderungsenergie kann daher als Potentialfunktion der inneren Kräfte angesehen werden. Sie ist in Übereinstimmung mit den gleichgearteten Beziehungen der rationalen Mechanik des Massenpunktsystems unabhängig von dem geometrischen Ablauf der Bewegung und wird nur von den Anfangs- und Endwerten bestimmt.

Die Verzerrungskomponenten  $\varepsilon, \gamma$  sind nach (26) Funktionen der Verschiebungskomponenten und können in (28) eingesetzt werden. Die gesamte Formänderungsenergie  $A_i$  wird durch Integration über den ganzen elastischen Bereich erhalten und durch partielle Integration umgeformt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} A_i &= \int A_i dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int (p_x u + p_y v + p_z w) dO + \frac{1}{2} \int (Xu + Yv + Zw) dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Hierbei bedeuten  $p_x, p_y, p_z$  die Komponenten der an dem infinitesimalen Oberflächenteil „1“ des Körpers angreifenden Flächenkräfte und  $X, Y, Z$  die Komponenten der an dem infinitesimalen Volumenteil „1“ angreifenden Massenkkräfte. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist also halb so groß, als wenn die Endwerte während der Dauer des ganzen Vorgangs wirken würden (Clapeyronsches Gesetz).

Um die Beziehungen der Formänderungsarbeit zum Formänderungs- und Spannungszustand zu untersuchen, wird das Ergebnis (31) mit demjenigen verglichen, die sich entweder bei einem benachbarten Formänderungszustand  $(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma)$  oder bei einem benachbarten Spannungszustand  $(\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau)$  ergeben. Die Formänderungsarbeit  $A'_i = A_i(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma)$  oder  $A'_i = A_i(\sigma + \delta\sigma, \tau + \delta\tau)$  wird hierzu nach Taylor in eine Reihe entwickelt, deren erste Variation nach den Verzerrungskomponenten folgendermaßen lautet:

$$\delta A_i = \int (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}) dV. \quad (32)$$

Die Einführung der Verschiebungskomponenten und die partielle Integration des Ausdrucks liefert im Falle des Gleichgewichts der inneren und äußeren Kräfte

$$\delta A_i = \int (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dO + \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV. \quad (33)$$

Durch die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke  $\delta A_i$  werden die Spannungen  $\sigma, \tau$ , die mit der Belastung  $p, \mathfrak{K}$  im Gleichgewicht stehen, mit einem virtuellen Verschiebungszustand  $\delta u, \delta v, \delta w$  verknüpft, der mit dem Verzerrungszustand  $\delta \varepsilon, \delta \gamma$  verträglich ist. Die Strecken  $\delta u, \delta v, \delta w$  sind verschwindend klein, um die Taylorentwicklung für  $A'_i - A_i$  bereits mit der ersten Variation abbrechen zu können.

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \int (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dO + \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV \\ &= \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (34)$$

Das Ergebnis wird als Prinzip der virtuellen Verrückungen bezeichnet. Die Arbeit der eingepprägten äußeren Kräfte ist bei einer virtuellen Verrückung des elastischen Systems gleich der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte, welche mit ihnen im Gleichgewicht stehen. Der virtuelle Verschiebungszustand unterliegt naturgemäß den vorgeschriebenen Randbedingungen. Die Änderungen  $\delta u, \delta v, \delta w$  sind daher überall an der Oberfläche Null, wo die Verschiebungen vorgeschrieben werden. Die Verschiebungen werden also nur dort variiert, wo die Oberflächenkräfte bekannt sind. In dem Ansatz (33) ist daher  $\int p_x \delta u dO = \delta \left( \int p_x u dO \right)$ . Er kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\delta [A_i - \int (p_x u + p_y v + p_z w) dO - \int (X u + Y v + Z w) dV] = 0. \quad (35)$$

Der Inhalt der Klammer ist ein Ausdruck für die gesamte potentielle Energie des elastischen Systems. Sie ist ein Minimum, wenn die äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewicht sind.

Bei dem Vergleich der Formänderungsenergie  $A_i(\sigma, \tau)$  mit derjenigen eines benachbarten Spannungszustandes  $A_i(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  stehen die inneren Kräfte  $(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  mit einer benachbarten Gruppe der eingepprägten Kräfte  $(p + \delta p, \mathfrak{K} + \delta \mathfrak{K})$  im Gleichgewicht. Dasselbe gilt daher auch von der Änderung der Spannungen  $(\delta \sigma, \delta \tau)$  und der virtuellen Belastung  $(\delta p, \delta \mathfrak{K})$ . Die Reihenentwicklung von  $A'_i = A_i(\sigma + \delta \sigma, \tau + \delta \tau)$  liefert nach Taylor

$$A'_i = A_i(\sigma, \tau) + \int (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV + \delta^2 A(\sigma, \tau).$$

Durch Einführung der Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  für die Verzerrungskomponenten und partielle Integration wird die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta A_i &= \int (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV \\ &= \int (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dO + \int (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) dV. \end{aligned} \quad (36)$$

Die virtuelle Formänderungsenergie der inneren Kräfte ist also auch für einen virtuellen Spannungszustand gleich derjenigen der äußeren Kräfte. Die Ausdrücke beider Seiten verknüpfen den wirklichen Verschiebungs- und Verzerrungszustand mit einem von diesen unabhängigen Spannungs- und Kräftebild.

Wird über die frei wählbare Änderung des Kräftebildes  $(\delta p, \delta \mathfrak{K})$  derart verfügt, daß  $\delta \mathfrak{K} = 0$  und die Oberflächenkräfte nur dort abgeändert werden, wo die Verschiebungskomponenten  $u, v, w$  vorgeschrieben sind (Anschluß oder Stützung), so ist  $\int u \delta p_x dO = \delta \left( \int u p_x dO \right)$ . Der Ansatz (36) kann daher folgendermaßen angegeben werden:

$$\delta \{A_i - \int (u p_x + v p_y + w p_z) dO\} = \delta A_i^* = 0. \quad (37)$$

Die Funktion  $A_i^*$  wird als Ergänzungsarbeit bezeichnet. Sie wird zum Minimum,

wenn das Feld der inneren Kräfte mit der gegebenen Belastung des Körpers im Gleichgewicht ist.

**Satz von Betti.** Der Begriff der virtuellen Arbeit einer Gruppe von äußeren Kräften  $\mathfrak{P}$  bei einer virtuellen Verrückung ihrer Angriffspunkte  $\delta u, \delta v, \delta w$  kann noch ergänzt werden, wenn diese als Folge einer anderen Belastung  $\mathfrak{Q}$  angesehen und daher als  $u_Q, v_Q, w_Q$  bezeichnet wird. Da die Belastung  $\mathfrak{P}$  ebenfalls einen Verschiebungszustand hervorruft, der für die Belastung  $\mathfrak{Q}$  virtuell ist, entstehen zwei virtuelle Arbeiten.

$$\int (\dot{p}_x u_Q + \dot{p}_y v_Q + \dot{p}_z w_Q) dO \quad \text{und} \quad \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P) dO.$$

Sie können beide als Funktion der Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes des elastischen Körpers angegeben werden. Da nun  $A_i$  eine homogene quadratische Funktion dieser Komponenten ist, läßt sich leicht einsehen, daß für jeden elastischen Körper

$$\left. \begin{aligned} \delta A_i \{(\sigma_P, \tau_P)(\epsilon_Q, \gamma_Q)\} &= \delta A_i \{(\sigma_Q, \tau_Q)(\epsilon_P, \gamma_P)\} \\ \int (\dot{p}_x u_Q + \dot{p}_y v_Q + \dot{p}_z w_Q) dO &= \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P) dO. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Damit ist der Satz von der Gegenseitigkeit der Wirkung allgemein bewiesen.

**Anwendung bei technischen Aufgaben.** Die Voraussetzungen zur Elastizitätstheorie bedeuten eine weitgehende Idealisierung der physikalischen Eigenschaften der Werkstoffe. Die Ergebnisse sind daher auch nur unter dieser Voraussetzung im Vergleich mit dem wirklich vorliegenden Verschiebungs- und Spannungszustand streng. Das Bild bedarf in Wirklichkeit der Ergänzung durch diejenigen Anteile, welche sich aus der inhomogenen und anisotropen Beschaffenheit der Werkstoffe und durch die Annahmen im Elastizitätsgesetz ergeben. Aus diesem Grunde besitzen auch angenäherte Lösungen technischer Festigkeitsaufgaben Bedeutung, welche die durch Messung oder Beobachtung festgestellten kinematischen Eigenschaften am verzerrten Bauteil verwerten. Sie werden in der Regel aus Symmetriebetrachtungen und aus Annahmen über Randwerte des Spannungs- und Verschiebungszustandes abgeleitet. Hierzu tritt die Beachtung der geometrischen Eigenschaften des Bauteils, da sehr oft einzelne Abmessungen gegenüber anderen als klein zurücktreten. Man unterscheidet hiernach die Schalen, die Platten, die Scheiben, die Stäbe und entwickelt aus besonderen Annahmen über den Spannungs- oder Verschiebungszustand vereinfachte Lösungen. Auf diese Weise entsteht neben der strengen Elastizitätstheorie eine Theorie über die Festigkeit der Schalen, Platten, Scheiben und Stäbe, so daß der Festigkeitsnachweis irgendeines Bauteils oder Tragwerks stets dessen Idealisierung nach einer dieser Bauformen voraussetzt.

Auch diese Ansätze rechnen mit einem gleichartigen Baustoff und homogenen und isotropen Eigenschaften. Diese Voraussetzungen sind für Bauteile aus Eisenbeton nicht erfüllt, so daß die Ergebnisse der Festigkeitslehre um so weniger befriedigen, je größer die Formänderungen sind. Diese ändern sich hier nicht allein mit den Abmessungen und der Form des Querschnitts, sondern auch mit der Größe und Art der Bewehrung, mit der Herstellung und dem Alter des Betons. Sie werden außerdem durch Haarrisse beeinflusst, welche unter Umständen während der Betriebsbelastung entstehen. Hieraus ergibt sich eine gewisse Unsicherheit in der Beurteilung der elastischen Eigenschaften der Bauteile aus Eisenbeton. Daher sind die Ansätze für homogenen und isotropen Baustoff auf Veranlassung des Deutschen Ausschusses nachgeprüft worden. Die Hefte 18 und 28 der Forschungsarbeiten enthalten einen Vergleich zwischen den gemessenen und gerechneten Formänderungen. Hiernach stimmen die nach § 17 der Bestimmungen für homogenen und isotropen Baustoff ermittelten Formänderungen bei sachgemäßer Bewehrung inner-