Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Anwendung bei technischen Aufgaben

wenn das Feld der inneren Kräfte mit der gegebenen Belastung des Körpers im Gleichgewicht ist.

Satz von Betti. Der Begriff der virtuellen Arbeit einer Gruppe von äußeren Kräften $\mathfrak{P}$ bei einer virtuellen Verrückung ihrer Angriffspunkte $\delta u, \delta v, \delta w$ kann noch ergänzt werden, wenn diese als Folge einer anderen Belastung $\mathfrak{Q}$ angesehen und daher als u_Q, v_Q, w_Q bezeichnet wird. Da die Belastung $\mathfrak{P}$ ebenfalls einen Verschiebungszustand hervorruft, der für die Belastung $\mathfrak{Q}$ virtuell ist, entstehen zwei virtuelle Arbeiten.

$$\int (p_x u_Q + p_y v_Q + p_z w_Q)\, dO \quad \text{und} \quad \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P)\, dO\,.$$

Sie können beide als Funktion der Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes des elastischen Körpers angegeben werden. Da nun A_i eine homogene quadratische Funktion dieser Komponenten ist, läßt sich leicht einsehen, daß für jeden elastischen Körper

$$\left.\begin{aligned} &\delta A_i\{(\sigma_P, \tau_P)(\varepsilon_Q, \gamma_Q)\} = \delta A_i\{(\sigma_Q, \tau_Q)(\varepsilon_P, \gamma_P)\} \\ &\text{und hiermit} \\ &\int (p_x u_Q + p_y v_Q + p_z w_Q)\, dO = \int (q_x u_P + q_y v_P + q_z w_P)\, dO\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Damit ist der Satz von der Gegenseitigkeit der Wirkung allgemein bewiesen.

Anwendung bei technischen Aufgaben. Die Voraussetzungen zur Elastizitätstheorie bedeuten eine weitgehende Idealisierung der physikalischen Eigenschaften der Werkstoffe. Die Ergebnisse sind daher auch nur unter dieser Voraussetzung im Vergleich mit dem wirklich vorliegenden Verschiebungs- und Spannungszustand streng. Das Bild bedarf in Wirklichkeit der Ergänzung durch diejenigen Anteile, welche sich aus der inhomogenen und anisotropen Beschaffenheit der Werkstoffe und durch die Annahmen im Elastizitätsgesetz ergeben. Aus diesem Grunde besitzen auch angenäherte Lösungen technischer Festigkeitsaufgaben Bedeutung, welche die durch Messung oder Beobachtung festgestellten kinematischen Eigenschaften am verzerrten Bauteil verwerten. Sie werden in der Regel aus Symmetriebetrachtungen und aus Annahmen über Randwerte des Spannungs- und Verschiebungszustandes abgeleitet. Hierzu tritt die Beachtung der geometrischen Eigenschaften des Bauteils, da sehr oft einzelne Abmessungen gegenüber anderen als klein zurücktreten. Man unterscheidet hiernach die Schalen, die Platten, die Scheiben, die Stäbe und entwickelt aus besonderen Annahmen über den Spannungs- oder Verschiebungszustand vereinfachte Lösungen. Auf diese Weise entsteht neben der strengen Elastizitätstheorie eine Theorie über die Festigkeit der Schalen, Platten, Scheiben und Stäbe, so daß der Festigkeitsnachweis irgendeines Bauteils oder Tragwerks stets dessen Idealisierung nach einer dieser Bauformen voraussetzt.

Auch diese Ansätze rechnen mit einem gleichartigen Baustoff und homogenen und isotropen Eigenschaften. Diese Voraussetzungen sind für Bauteile aus Eisenbeton nicht erfüllt, so daß die Ergebnisse der Festigkeitslehre um so weniger befriedigen, je größer die Formänderungen sind. Diese ändern sich hier nicht allein mit den Abmessungen und der Form des Querschnitts, sondern auch mit der Größe und Art der Bewehrung, mit der Herstellung und dem Alter des Betons. Sie werden außerdem durch Haarrisse beeinflußt, welche unter Umständen während der Betriebsbelastung entstehen. Hieraus ergibt sich eine gewisse Unsicherheit in der Beurteilung der elastischen Eigenschaften der Bauteile aus Eisenbeton. Daher sind die Ansätze für homogenen und isotropen Baustoff auf Veranlassung des Deutschen Ausschusses nachgeprüft worden. Die Hefte 18 und 28 der Forschungsarbeiten enthalten einen Vergleich zwischen den gemessenen und gerechneten Formänderungen. Hiernach stimmen die nach § 17 der Bestimmungen für homogenen und isotropen Baustoff ermittelten Formänderungen bei sachgemäßer Bewehrung innerhalb der Betriebsbelastung in hinreichendem Maße mit den Versuchsergebnissen überein. Die einwandfreie konstruktive Gestaltung eines Bauteils sichert demnach im Rahmen der Gebrauchsbelastung die Eigenschaften, welche zur summarischen Beurteilung der Formänderung von Bauteilen aus Eisenbeton nach der Elastizitätstheorie nötig sind.

Lorenz, H.: Technische Elastizitätslehre. München-Berlin 1907. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie. Handb. der Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang 2. Aufl. 1928.

9. Der Spannungszustand der Scheiben und Träger.

Die Scheibe ist ein durch zwei parallele Ebenen begrenzter Baukörper, dessen Stärke d gegen die Abmessungen a, b in der x, y-Richtung klein ist. Bei Belastung der Scheibe in der Symmetrieebene sind an den Flächen $z = \pm d/2$ die Spannungen $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$, so daß auch in der Symmetrieebene ($z = 0$) mit einem ebenen Spannungszustand gerechnet werden kann. Die Bedingung $d \ll a, b$ ist bei zahlreichen Bauformen erfüllt.

Die Untersuchung eines homogenen Baukörpers, dessen Querschnitt konstant und dessen Länge in der z-Achse gemessen unendlich groß ist, läßt sich bei gleichförmiger Belastung auf eine zur z-Achse winkelrechte Scheibe von der Tiefe $d = 1$ beschränken. Die Komponente w der Verzerrung ist in diesem Falle Null. Dasselbe gilt von der Schubspannung τ_{zx}, τ_{zy}. Ohne Rücksicht auf die Längsspannung σ_z, die in der Regel klein gegen σ_x und σ_y ist, kann die Sicherheit des Tragwerks nach einem ebenen Spannungszustande $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ beurteilt werden.

Das ebene Spannungsproblem ist für einige Aufgaben analytisch mit der Airyschen Spannungsfunktion, für andere, vor allem technisch wichtige Fälle, versuchstechnisch durch Aufmessung des Verschiebungszustandes und optische Methoden untersucht worden. Die Rechnung führt nur bei einzelnen idealisierten Problemen des elastischen Halbraums und der Balkenbiegung zur Lösung. Aus diesem Grunde hat man sich bei der Beschreibung des Spannungszustandes besonders auch im Bereich von Ecken und an der Verzweigung von Scheiben mit Näherungen, oft sogar nur mit einer qualitativ befriedigenden Lösung begnügt, um hiernach bautechnisch einwandfrei gestalten zu können.

In Verbindung mit der hieraus gewonnenen Erkenntnis werden im Bauwesen einfache Ansätze für die Spannungsverteilung verwendet, welche bei dem Vergleiche mit der strengen Rechnung oder versuchstechnischen Beobachtung befriedigen. Aus diesem Grunde wird die Verteilung der inneren Kräfte an Querschnitten winkelrecht zur Mittellinie der Scheiben betrachtet. Sie bleiben während einer Gebrauchsbelastung erfahrungsgemäß eben und winkelrecht zur Mittellinie, zumal wenn die Höhe gegen die Länge der Scheiben zurücktritt. Diese durch Beobachtung gewonnene Erkenntnis wird im Gegensatze zu den geometrischen Beziehungen (26) der Elastizitätstheorie als Grundlage einer technischen Theorie gewählt. Das Ergebnis ist um so brauchbarer, je besser die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen durch die Annahmen der technischen Theorie erfüllt werden. Sie ist mit gutem Erfolg durch Messungen nachgeprüft worden und besitzt als quantitativ ausreichende Annäherung für die Beschreibung der Festigkeit von Bauteilen grundlegende Bedeutung.

Die Annahme einer ebenen Verschiebung der Querschnitte führt mit dem Hookeschen Gesetz zum Geradliniengesetz für die Spannung σ und damit zur angenäherten Beschreibung des Spannungszustandes von hohen Trägern und Scheiben. Der lineare Ansatz wird insbesondere bei der Untersuchung von Schwergewichtsstaumauern verwendet.

Der Spannungszustand einer Scheibe wird in jedem Punkte, gleichviel welcher Ansatz als Grundlage gewählt worden ist, durch die Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ für