



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

9. Der Spannungszustand der Scheiben und Träger

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

halb der Betriebsbelastung in hinreichendem Maße mit den Versuchsergebnissen überein. Die einwandfreie konstruktive Gestaltung eines Bauteils sichert demnach im Rahmen der Gebrauchsbelastung die Eigenschaften, welche zur summarischen Beurteilung der Formänderung von Bauteilen aus Eisenbeton nach der Elastizitätstheorie nötig sind.

Lorenz, H.: Technische Elastizitätslehre. München-Berlin 1907. — Trefftz, E.: Mathematische Elastizitätstheorie. Handb. der Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang 2. Aufl. 1928.

## 9. Der Spannungszustand der Scheiben und Träger.

Die Scheibe ist ein durch zwei parallele Ebenen begrenzter Baukörper, dessen Stärke  $d$  gegen die Abmessungen  $a, b$  in der  $x, y$ -Richtung klein ist. Bei Belastung der Scheibe in der Symmetrieebene sind an den Flächen  $z = \pm d/2$  die Spannungen  $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ , so daß auch in der Symmetrieebene ( $z = 0$ ) mit einem ebenen Spannungszustand gerechnet werden kann. Die Bedingung  $d \ll a, b$  ist bei zahlreichen Bauformen erfüllt.

Die Untersuchung eines homogenen Baukörpers, dessen Querschnitt konstant und dessen Länge in der  $z$ -Achse gemessen unendlich groß ist, läßt sich bei gleichförmiger Belastung auf eine zur  $z$ -Achse winkelrechte Scheibe von der Tiefe  $d = 1$  beschränken. Die Komponente  $w$  der Verzerrung ist in diesem Falle Null. Dasselbe gilt von der Schubspannung  $\tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Ohne Rücksicht auf die Längsspannung  $\sigma_z$ , die in der Regel klein gegen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  ist, kann die Sicherheit des Tragwerks nach einem ebenen Spannungszustand  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  beurteilt werden.

Das ebene Spannungsproblem ist für einige Aufgaben analytisch mit der Airy'schen Spannungsfunktion, für andere, vor allem technisch wichtige Fälle, versuchs-technisch durch Aufmessung des Verschiebungszustandes und optische Methoden untersucht worden. Die Rechnung führt nur bei einzelnen idealisierten Problemen des elastischen Halbraums und der Balkenbiegung zur Lösung. Aus diesem Grunde hat man sich bei der Beschreibung des Spannungszustandes besonders auch im Bereich von Ecken und an der Verzweigung von Scheiben mit Näherungen, oft sogar nur mit einer qualitativ befriedigenden Lösung begnügt, um hiernach bautechnisch einwandfrei gestalten zu können.

In Verbindung mit der hieraus gewonnenen Erkenntnis werden im Bauwesen einfache Ansätze für die Spannungsverteilung verwendet, welche bei dem Vergleiche mit der strengen Rechnung oder versuchstechnischen Beobachtung befriedigen. Aus diesem Grunde wird die Verteilung der inneren Kräfte an Querschnitten winkelrecht zur Mittellinie der Scheiben betrachtet. Sie bleiben während einer Gebrauchsbelastung erfahrungsgemäß eben und winkelrecht zur Mittellinie, zumal wenn die Höhe gegen die Länge der Scheiben zurücktritt. Diese durch Beobachtung gewonnene Erkenntnis wird im Gegensatz zu den geometrischen Beziehungen (26) der Elastizitätstheorie als Grundlage einer technischen Theorie gewählt. Das Ergebnis ist um so brauchbarer, je besser die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen durch die Annahmen der technischen Theorie erfüllt werden. Sie ist mit gutem Erfolg durch Messungen nachgeprüft worden und besitzt als quantitativ ausreichende Annäherung für die Beschreibung der Festigkeit von Bauteilen grundlegende Bedeutung.

Die Annahme einer ebenen Verschiebung der Querschnitte führt mit dem Hooke'schen Gesetz zum Geradliniengesetz für die Spannung  $\sigma$  und damit zur angenäherten Beschreibung des Spannungszustandes von hohen Trägern und Scheiben. Der lineare Ansatz wird insbesondere bei der Untersuchung von Schwergewichtsstaumauern verwendet.

Der Spannungszustand einer Scheibe wird in jedem Punkte, gleichviel welcher Ansatz als Grundlage gewählt worden ist, durch die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  für

Schnitte in Richtung eines ausgezeichneten Achsensystems beschrieben (Abb. 15). Sie bilden einen Tensor, der durch die Gleichungen

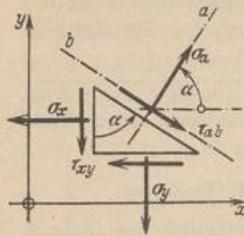


Abb. 15.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha, \\ \sigma_b &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha, \\ \tau_{ab} &= (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (39)$$

auf ein beliebiges um den Winkel  $\alpha$  gedrehtes Koordinatensystem  $a, b$  transformiert werden kann. Dies geschieht geometrisch durch den Mohrschen Kreis. Hierbei ergeben sich für  $\alpha = \alpha_0$  die Grenzwerte der Normalspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  mit  $\tau_{ab} = 0$ , für  $\alpha = \bar{\alpha}_0$  die Grenzwerte der Hauptschubspannungen  $\tau_{1,2}$  mit  $\sigma_a = 0, \sigma_b = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}; & \text{tg } 2 \alpha_0 &= \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \\ \tau_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}; & \text{tg } 2 \bar{\alpha}_0 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau_{xy}}; & \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 &= 45^\circ. \end{aligned} \right\} (40)$$

Größe und Richtung der Hauptspannungen werden am einfachsten geometrisch durch den Mohrschen Kreis bestimmt.

Die Ergebnisse dienen zu einer graphischen Beschreibung des Spannungsfeldes (Abb. 16). Die Richtungen der  $\sigma_{1,2}, \tau_{1,2}$  aller Punkte bilden die Trajektorien. Sie werden am besten aus Spannungsisoklinen abgeleitet, welche die Punkte gleichgerichteter  $\sigma_{1,2}$  und  $\tau_{1,2}$  verbinden. Die Trajektorien zweier gleichartiger Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  und  $\pm \tau_{1,2}$  kreuzen sich rechtwinklig, während die Büschel der  $\sigma_{1,2}$  und  $\tau_{1,2}$  in jedem Punkte den Winkel  $45^\circ$  einschließen. Das Bild kann durch die Kurven gleich großer Hauptspannungen und gleich großer Hauptschubspannungen ergänzt werden.

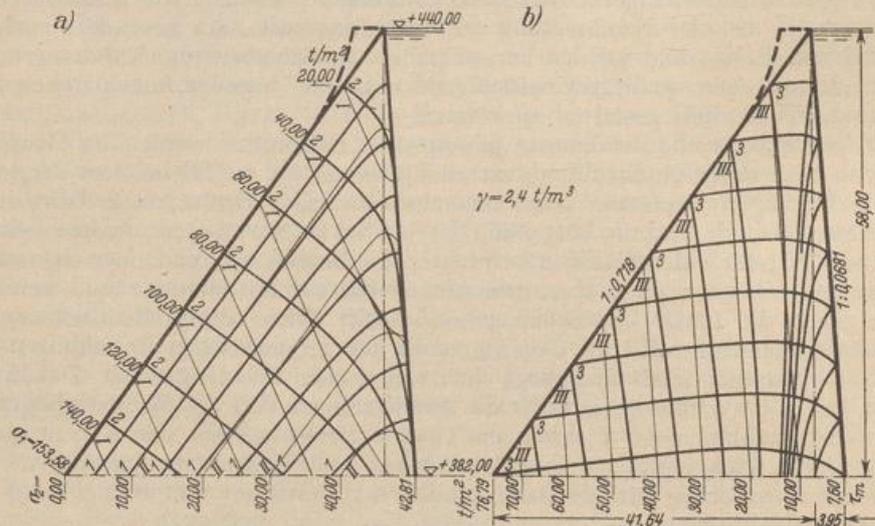


Abb. 16. Beschreibung des Spannungszustandes eines Talsperrenquerschnittes (Saidenbachtalsperre, Chemnitz).

- Kurvenscharen I und II: Trajektorien der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .
- Kurvenscharen I und II: Linien gleicher Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .
- Kurvenschar III: Trajektorien der Hauptschubspannungen  $\tau_m$ .
- Kurvenschar III: Linien gleicher Hauptschubspannungen  $\tau_m$ .

Bei der Anwendung im Bauwesen werden die Normalspannungen besser durch die auf die Längeneinheit bezogenen Längskräfte  $N_a, N_b$  und  $N_1, N_2$  in kg/m, die Schubspannungen durch die auf die Längeneinheit bezogenen Schubkräfte  $N_{ab}$

und  $N_{1,2}$  ersetzt. Die Beziehungen (39) und (40) werden hierdurch nicht geändert. Sie sind für Scheiben aus Eisenbeton durch W. Flügge erweitert worden und bilden in dieser Form ein wertvolles Hilfsmittel für die einwandfreie Stahlbewehrung.

Jackson, A.: Spannungslinien. Diss. Stuttgart 1916. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. 1, 2. Aufl. München 1928. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, Akira: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Mohr, O.: Technische Mechanik, Abhandlung VIII. Der Spannungszustand einer Stauwand. 3. Aufl. Berlin 1928. — Föppl, L.: Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium d. Techn. Hochschule München, 3. Folge. München 1930. — Flügge, W.: Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. Ing. Arch. 1930 S. 481. — Coker u. Filon: Photo-Elasticity. Cambridge 1931.

### 10. Der Spannungszustand des Stabes.

Scheiben, deren Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Länge klein sind, werden als Stäbe bezeichnet. Die Schwerpunkte der Querschnitte bilden die Stabachse. Sie ist gerade, gekrümmt oder zu einem Stabzug gebrochen. Die Stäbe werden, einzeln oder zu Gruppen vereinigt, je nach der Verbindung als ebene und räumliche Stab- oder Fachwerke verwendet. Der Querschnitt ist nicht wie bei der Scheibe immer ein Rechteck, sondern erhält zahlreiche für das Bauwesen charakteristische Formen. Man unterscheidet ein- und mehrfache Querschnitte und trennt Querschnitte mit ein- und mehrfacher Symmetrie von denjenigen ohne Symmetrie.

Jeder Querschnitt wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Schwerpunkt  $S$  liegt und dessen Achsen  $y, z$  Hauptträgheitsachsen sind, so daß

$$\int_F y dF = 0, \quad \int_F z dF = 0, \quad \int_F yz dF = 0. \quad (41)$$

Die geometrischen Eigenschaften werden durch die Fläche  $F$ , die Hauptträgheitsmomente  $J_y, J_z$  und den Kern beschrieben.

Mit der Definition des Stabes ist im Gegensatz zur Scheibe die Möglichkeit einer räumlichen Belastung verbunden. Sie führt im allgemeinen neben der relativen Verschiebung benachbarter Querschnitte in Richtung der  $x$ -Achse  $du_0 = \epsilon_0 dx$  und der relativen Neigung  $d\psi_y \mp d\psi_z$  um eine zur Stabachse senkrechte Drehachse auch zu einer Verschiebung  $dv_0 \mp dw_0$  und zur Verdrillung  $d\vartheta$  der Stabachse (Abb. 17). Die letzten beiden Komponenten sollen jedoch so klein sein, daß die Verzerrung des Querschnitts als eben angesehen und durch

$$\epsilon_x dx = \epsilon_0 dx + z d\psi_y - y d\psi_z \quad (42)$$

beschrieben werden kann. Die Spur der Belastungsebene (Kraftlinie) verläuft dann bei Querschnitten mit zwei- und mehrfacher Symmetrie durch den Schwerpunkt. Bei allen übrigen Querschnitten ist ein ausgezeichnete Punkt  $T$  vorhanden, der die Kraftlinie enthalten muß, damit die Verzerrung nach (42) beschrieben werden kann. Er heißt nach C. Weber Querpunkt. Jede Symmetrieachse des Querschnitts ist ein geometrischer Ort für  $T$ . Der Ansatz kann demnach verwendet werden, wenn die Kraftlinie bei einfacher Symmetrie des Querschnitts mit der Symmetrieachse zusammenfällt und bei doppelter Symmetrie durch den Schwerpunkt verläuft. Die Teile des Querschnitts müssen außerdem in jedem Falle stark genug sein, um die Verzerrung des Querschnitts in seiner Ebene auszuschließen. Dies gilt insbesondere für aufgelöste Querschnitte, für Ring- und Kastenquerschnitte.

Die Normalspannung  $\sigma_x$  ist mit der für die technische Theorie grundlegenden

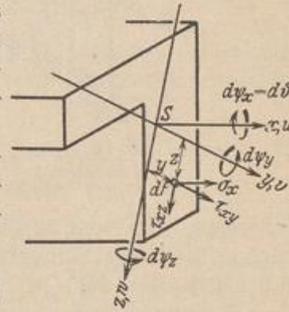


Abb. 17.