



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

10. Der Spannungszustand des Stabes

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

und $N_{1,2}$ ersetzt. Die Beziehungen (39) und (40) werden hierdurch nicht geändert. Sie sind für Scheiben aus Eisenbeton durch W. Flügge erweitert worden und bilden in dieser Form ein wertvolles Hilfsmittel für die einwandfreie Stahlbewehrung.

Jackson, A.: Spannungslinien. Diss. Stuttgart 1916. — Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang. Bd. 1, 2. Aufl. München 1928. — Wyß, Th.: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern. Berlin 1926. — Miura, Akira: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928. — Mohr, O.: Technische Mechanik, Abhandlung VIII. Der Spannungszustand einer Stauwand. 3. Aufl. Berlin 1928. — Föppl, L.: Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium d. Techn. Hochschule München, 3. Folge. München 1930. — Flügge, W.: Die Spannungsermittlung in Scheiben und Schalen aus Eisenbeton. Ing. Arch. 1930 S. 481. — Coker u. Filon: Photo-Elasticity. Cambridge 1931.

10. Der Spannungszustand des Stabes.

Scheiben, deren Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Länge klein sind, werden als Stäbe bezeichnet. Die Schwerpunkte der Querschnitte bilden die Stabachse. Sie ist gerade, gekrümmt oder zu einem Stabzug gebrochen. Die Stäbe werden, einzeln oder zu Gruppen vereinigt, je nach der Verbindung als ebene und räumliche Stab- oder Fachwerke verwendet. Der Querschnitt ist nicht wie bei der Scheibe immer ein Rechteck, sondern erhält zahlreiche für das Bauwesen charakteristische Formen. Man unterscheidet ein- und mehrfache Querschnitte und trennt Querschnitte mit ein- und mehrfacher Symmetrie von denjenigen ohne Symmetrie.

Jeder Querschnitt wird auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Schwerpunkt S liegt und dessen Achsen y, z Hauptträgheitsachsen sind, so daß

$$\int_F y dF = 0, \quad \int_F z dF = 0, \quad \int_F yz dF = 0. \quad (41)$$

Die geometrischen Eigenschaften werden durch die Fläche F , die Hauptträgheitsmomente J_y, J_z und den Kern beschrieben.

Mit der Definition des Stabes ist im Gegensatz zur Scheibe die Möglichkeit einer räumlichen Belastung verbunden. Sie führt im allgemeinen neben der relativen Verschiebung benachbarter Querschnitte in Richtung der x -Achse $du_0 = \epsilon_0 dx$ und der relativen Neigung $d\psi_y \mp d\psi_z$ um eine zur Stabachse senkrechte Drehachse auch zu einer Verschiebung $dv_0 \mp dw_0$ und zur Verdrillung $d\vartheta$ der Stabachse (Abb. 17). Die letzten beiden Komponenten sollen jedoch so klein sein, daß die Verzerrung des Querschnitts als eben angesehen und durch

$$\epsilon_x dx = \epsilon_0 dx + z d\psi_y - y d\psi_z \quad (42)$$

beschrieben werden kann. Die Spur der Belastungsebene (Kraftlinie) verläuft dann bei Querschnitten mit zwei- und mehrfacher Symmetrie durch den Schwerpunkt. Bei allen übrigen Querschnitten ist ein ausgezeichnete Punkt T vorhanden, der die Kraftlinie enthalten muß, damit die Verzerrung nach (42) beschrieben werden kann. Er heißt nach C. Weber Querpunkt. Jede Symmetrieachse des Querschnitts ist ein geometrischer Ort für T . Der Ansatz kann demnach verwendet werden, wenn die Kraftlinie bei einfacher Symmetrie des Querschnitts mit der Symmetrieachse zusammenfällt und bei doppelter Symmetrie durch den Schwerpunkt verläuft. Die Teile des Querschnitts müssen außerdem in jedem Falle stark genug sein, um die Verzerrung des Querschnitts in seiner Ebene auszuschließen. Dies gilt insbesondere für aufgelöste Querschnitte, für Ring- und Kastenquerschnitte.

Die Normalspannung σ_x ist mit der für die technische Theorie grundlegenden

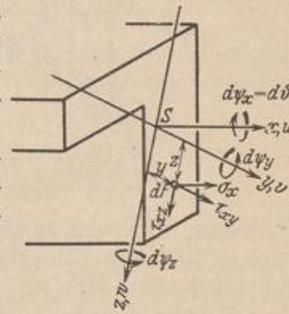


Abb. 17.

Annahme einer ebenen Verschiebung des Querschnitts bei einer linearen Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung nach R. Hooke bestimmt. Die übrigen Spannungen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Prisma. Die Normalspannungen σ_y, σ_z sind jedoch bei geraden und wenig gekrümmten Stäben, abgesehen von dem Bereich um Einzellasten, klein gegen σ_x und werden daher in der Regel vernachlässigt.

Definition und Gleichgewicht der Schnittkräfte. Die Gleichgewichtsbedingungen gelten für die Kräfte an jedem frei beweglichen, endlichen Stabteil. Neben den äußeren Kräften, also den Lasten und Stützenwiderständen, wirken an allen Anschlußstellen des Bauteils innere Kräfte, die als bekannt angenommen werden sollen. Wird dann der Stab an einem ausgezeichneten Querschnitt durchgeschnitten, so treten hierzu an jedem Abschnitt die unbekannt inneren Kräfte $\sigma dF, \tau dF$, deren positiver Sinn nach der positiven Richtung der Bezugsachsen x, y, z festgesetzt wird. Sie können zu einer resultierenden Kraft $R^{(i)}$ und zu einem resultierenden Moment $M_R^{(i)}$ zusammengefaßt werden. Als Bezugspunkt dienen in der Regel der

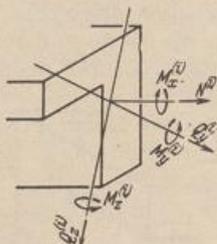


Abb. 18.

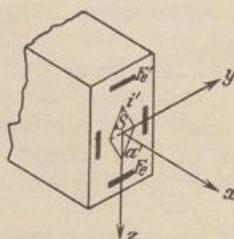


Abb. 19.

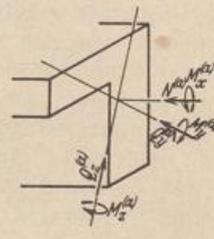


Abb. 20.

Schwerpunkt S oder ausgezeichnete Kernpunkte des Querschnitts. Unter Umständen werden auch die Schwerpunkte der Stahlbewehrung F_e, F_s des Betonquerschnitts (Abb. 19) oder der Querschnitt T gewählt. Die Vektoren $R^{(i)}$ und $M_R^{(i)}$ werden für die Gleichgewichtsbedingungen nach drei ausgezeichneten Achsen zerlegt. Hierfür eignen sich am besten die Tangente an die Stabachse (x) und die Hauptträgheitsachsen (y, z) des Querschnitts. Die sechs Komponenten werden als die Schnittkräfte des Querschnitts bezeichnet (Abb. 18).

$$\left. \begin{aligned} R^{(i)} &= N^{(i)} \hat{+} Q_y^{(i)} \hat{+} Q_z^{(i)}, & M_R^{(i)} &= M_x^{(i)} \hat{+} M_y^{(i)} \hat{+} M_z^{(i)}; \\ \text{Längskraft: } N^{(i)} &= \int \sigma_x dF; \\ \text{Querkraft: } Q_y^{(i)} &= \int \tau_{xy} dF, & Q_z^{(i)} &= \int \tau_{xz} dF; \\ \text{Biegemomente: } M_y^{(i)} &= \int \sigma_x z dF, & M_z^{(i)} &= - \int \sigma_x y dF; \\ \text{Drillmoment: } M_x^{(i)} &= \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dF. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die positive Richtung der Schnittkräfte ist mit der Definition der positiven Spannungen $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ im positiven Quadranten und mit dem positiven Richtungs- und Umlaufsinn des Bezugssystems bestimmt.

Die äußeren Kräfte des abgetrennten Stabteils werden in derselben Weise und mit demselben Bezugspunkt wie die inneren Kräfte zu einer resultierenden Kraft $R^{(a)}$ und einem resultierenden Moment $M_R^{(a)}$ zusammengefaßt. Ihr Richtungssinn wird positiv derart definiert, daß das Gleichgewicht aller Kräfte $\mathfrak{P}, \mathfrak{C}, \sigma dF, \tau dF$ an dem abgetrennten Stabteil durch die folgenden Gleichungen ausgesprochen wird:

$$R^{(i)} \hat{+} R^{(a)} = 0, \quad M_R^{(i)} \hat{+} M_R^{(a)} = 0. \quad (44)$$

Nach dieser Definition sind die positiven Schnittkräfte des Querschnitts gleich den positiven Komponenten der zugeordneten äußeren Kräfte $R^{(a)}, M_R^{(a)}$, ihre Rich-

tungen sind entgegengesetzt (Abb. 20). $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ können für jeden Abschnitt angegeben werden, wenn die Stützenwiderstände oder die an den Anschlußstellen wirkenden Schnittkräfte bekannt sind.

Im allgemeinen besitzen nur drei Sonderfälle Bedeutung. Der erste behandelt den Stab mit ebener Krümmung und beliebiger Belastung, die nach Komponenten in seiner Ebene und senkrecht dazu zerlegt wird. $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ werden dann mit sechs Komponenten angegeben. Im zweiten Falle sind die Kräfte senkrecht zur Stabebene Null. $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ werden durch die drei Komponenten N , Q_z , M_y bestimmt. Der dritte Sonderfall betrifft den geraden Stab, dessen äußere Kräfte mit seiner Achse in einer Ebene liegen. Ist deren Spur gegen die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts geneigt, so werden die der Geraden s zugeordneten Kernmomente angegeben oder die Vektoren der resultierenden Kraft und des resultierenden Moments auf die Hauptträgheitsachsen projiziert, so daß die Spannungen aus

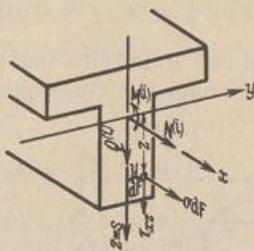


Abb. 21.

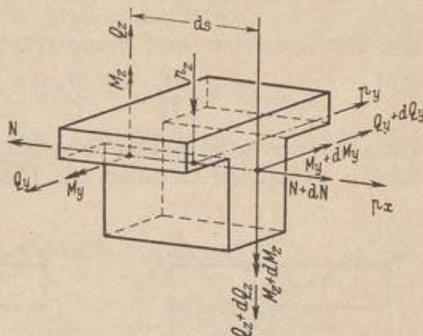


Abb. 22.

$N = \int \sigma_x dF$, $M_y = \int \sigma_x z dF$, $M_z = -\int \sigma_x y dF$, $Q_y = \int \tau_{zy} dF$, $Q_z = \int \tau_{xz} dF$ (45) abgeleitet werden. Der Belastungsfall wird als schiefe Biegung bezeichnet. Bei zahlreichen Berechnungen fällt die Kraftlinie s in die Richtung der Hauptträgheitsachse z des Querschnitts. In diesem Falle sind M_z , Q_y Null und $\sigma_x = \sigma_x(z)$. Die Spannungen σ_x , τ_{xz} können mit drei Schnittkräften angegeben werden (Abb. 21).

$N = \int \sigma_x dF$, $M_y = \int \sigma_x z dF$, $Q_z = \int \tau_{xz} dF$. (46)

Aus dem Gleichgewicht der Schnittkräfte an einem differentiellen Stabteil $ds = dx$ werden bei beliebiger Belastung $p = p_x \hat{+} p_y \hat{+} p_z$ in t/m (Abb. 22) die folgenden Beziehungen abgeleitet:

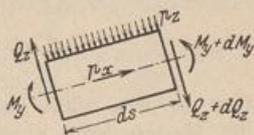


Abb. 23.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, & \frac{dM_z}{dx} &= -Q_y, & \frac{dN}{dx} &= -p_x, \\ \frac{d^2M_y}{dx^2} &= \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, & \frac{d^2M_z}{dx^2} &= -\frac{dQ_y}{dx} = p_y. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Schneidet die Ebene der äußeren Kräfte den Querschnitt in einer Hauptachse (Abb. 23), so ist einfacher

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad \frac{dQ_z}{dx} = \frac{d^2M_y}{dx^2} = -p_z, \quad \frac{dN}{dx} = -p_x. \quad (48)$$

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des geraden Stabes.

Die relative Verschiebung $du = \Delta ds = \epsilon_x(y, z) ds$ einander zugeordneter Punkte benachbarter Querschnitte ist bei ebener Verschiebung des Querschnitts linear. Dasselbe gilt bei gerader Stabachse, also unveränderlichem $ds(y, z)$ auch für die Dehnung $\Delta ds/ds = \epsilon_x$. Die lineare Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung führt daher beim geraden Stabe zum Geradliniengesetz der Normalspannung σ_x , das auch bei wenig gekrümmten Stäben als Näherung verwendet werden kann.

Die gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Querschnitte wird durch den Weg der Schwerpunkte $du_0 = \Delta ds_0 = \varepsilon_0 ds$ und durch die gegenseitige Neigung $d\psi = d\psi_y + d\psi_z$ beschrieben. Die relativen Verschiebungen und daher auch die Spannungen σ_x sind in der Drehachse Null. Sie heißt aus diesem Grunde Nulllinie. Im übrigen ist

$$du = \Delta ds = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds - y d\psi_z + z d\psi_y = \left(\varepsilon_0 + \frac{y}{\rho_z} - \frac{z}{\rho_y} \right) ds = \frac{\sigma_x}{E} ds.$$

Die Bezugsachsen sind Hauptträgheitsachsen, so daß mit (45)

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad \text{Für } y=0, z=0 \text{ ist } \sigma_x = \sigma_0 = \frac{N}{F}. \quad (49)$$

Die Grenzwerte σ_i und σ_a entstehen in den Punkten i und a , in denen die zur Nulllinie n parallelen Geraden die Umgrenzung des Querschnitts berühren (Abb. 24).

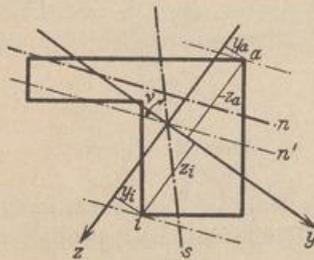


Abb. 24.

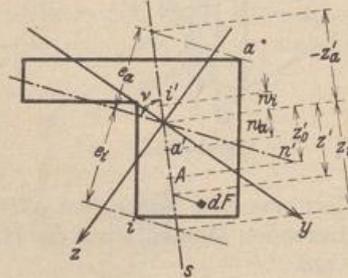


Abb. 25.

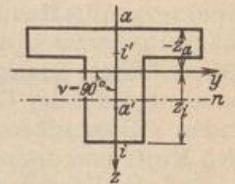


Abb. 26.

Die Richtung von n ist der zur Kraftlinie s konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse des Querschnitts ($\sphericalangle(n, s) = \nu$)

$$\sigma_{i,a} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a} - \frac{M_z}{J_z} y_{i,a}.$$

Der Ansatz wird einfacher, wenn die Momente der inneren Kräfte ($\sigma_x dF$) auf die Kernpunkte i' und a' der Kraftlinie s bezogen werden (Kernmomente). Ist A der Spurpunkt der Resultierenden der äußeren Kräfte im Querschnitt, so gilt mit $R_z^{(a)} = N^{(a)}$ (Abb. 25):

$$M_{i'} = N^{(a)} (z'_0 + |w_i|) = \int \sigma_x (z' + |w_i|) dF,$$

$$M_{a'} = N^{(a)} (z'_0 - |w_a|) = \int \sigma_x (z' - |w_a|) dF.$$

Die Strecken w_i, w_a werden von der Kernfigur des Querschnitts auf der Kraftlinie s abgeschnitten und als Kernweiten bezeichnet. Die Abstände der Punkte i und a von der zur Nulllinie n parallelen Schwerachse n' sind $e_i = |z'_i| \sin \nu, e_a = |z'_a| \sin \nu$. Das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse ist J'_n . Mit

$$\frac{J'_n}{|z'_i| \sin \nu} = F |w_i| = W_i, \quad \frac{J'_n}{|z'_a| \sin \nu} = F |w_a| = W_a$$

ist

$$\sigma_i = \frac{M_{i'}}{F |w_i|} = \frac{M_{i'}}{W_i}, \quad \sigma_a = - \frac{M_{a'}}{F |w_a|} = - \frac{M_{a'}}{W_a}. \quad (50)$$

Fällt die Spur s der Kraftebene mit der Hauptträgheitsachse z zusammen (Abb. 26), so ist $M_x = 0, d\psi_z = 0, du = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds + z d\psi_y$. Die Nulllinie n ist winkelnrecht zur Kraftlinie s ($\sphericalangle(n, s) = \nu = 90^\circ$).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\varepsilon_0 + \frac{d\psi_y}{ds} z \right) = \frac{\sigma}{E}, & \sigma &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z, & \sigma_{i,a} &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a}, \\ W_i &= \frac{J_y}{|z_i|}, & W_a &= \frac{J_y}{|z_a|}, & \sigma_i &= \frac{M_{i'}}{W_i}, & \sigma_a &= - \frac{M_{a'}}{W_a}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Die Beziehungen zwischen der Längskraft N (+ als Zugkraft), den Momenten der inneren Kräfte ($\sigma_x dF$) in bezug auf den Schwerpunkt S und den Kernmomenten M_v, M_a sind

$$N = \frac{M_v' - M_a'}{|w_t| + |w_a|}; \quad M = \frac{M_v' |w_a| + M_a' |w_t|}{|w_a| + |w_t|}. \quad (52)$$

Das Spannungsbild des Stabes zeigt außerdem auch Schubspannungen τ_{xz}, τ_{xy} . Sie ergeben sich aus der Betrachtung des Gleichgewichts der Kräfte am differentialen Prisma:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Für den allgemeinen Fall der schiefen Biegung ohne Längskraft ist nach (47), (49)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{Q_z}{J_v} z + \frac{Q_v}{J_z} y, \\ \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dy dz + \int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dz &= -\frac{Q_z}{J_v} \int z dF - \frac{Q_v}{J_z} \int y dF. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

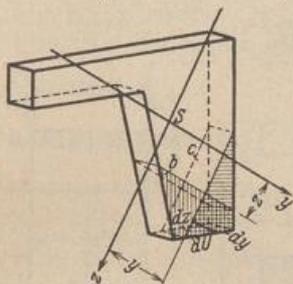


Abb. 27.

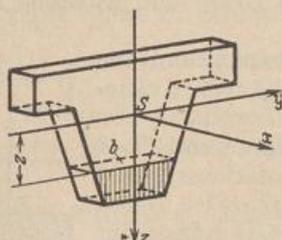


Abb. 28.

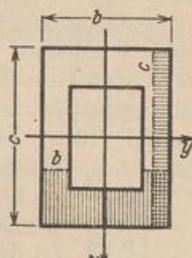


Abb. 29.

Für eine Fläche F_b oder eine Fläche F_c , die nach Abb. 27 durch die Parallele b, c zu der Hauptachse y, z begrenzt ist, gilt unter der Voraussetzung

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0$$

mit $dy = dU \sin(dU, z)$, $dz = dU \sin(dU, y)$,

$$\int_{U_b} [\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y)] dU = -\frac{Q_z}{J_v} S_{bv} - \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}. \quad (55)$$

Die Belastung des Stabes ist senkrecht zur Oberfläche gerichtet, so daß am Rande des Querschnitts

$$\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y) = 0. \quad (56)$$

Die Integration erstreckt sich also allein auf die Strecke b mit $\sin(dU, z) = -1$, $\sin(dU, y) = 0$ oder c mit $\sin(dU, z) = 0$, $\sin(dU, y) = -1$. Daher ist

$$\int_b \tau_{zx} dy = \frac{Q_z}{J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}, \quad \int_c \tau_{yx} dz = \frac{Q_z}{J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{cz}. \quad (57)$$

Die mittleren Schubspannungen τ_0 im Schnitt b oder c lassen sich also folgendermaßen angeben:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx,0} &= \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{b J_z} S_{bz}, \\ \tau_{yx,0} &= \frac{Q_z}{c J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Sind die Hauptträgheitsachsen gleichzeitig Symmetrieachsen (Abb. 28 u. 29), so sind

$$S_{bz} = 0 \quad \text{und} \quad S_{cv} = 0. \quad \text{Daher} \quad \tau_{zx,0} = \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv}; \quad \tau_{yx,0} = \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \quad (59)$$

Im Regelfall ist $Q_y = 0$, also $\tau_{yx} = 0$; für den Rechteckquerschnitt ist außerdem $S_{by} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) b$; $\tau_{zx} = \frac{3Q}{2F} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$; $\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$, Abb. 30. (60)

Für Querschnitte, die sich nach Abb. 31 aus Rechtecken zusammensetzen, ist

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z}{a J_y} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right]. \quad (61)$$

In diesen einfachen Fällen kann auch die Normalspannung σ_z nach Abb. 32 aus dem Gleichgewicht der senkrechten Kräfte angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} p dx + \frac{\partial T}{\partial x} dx + b \sigma_z dx = 0, \quad T = \int_{-h/2}^z b \tau_{zx} dz, \\ \text{Rechteckquerschnitt: } \sigma_z = -\frac{p}{2J_y} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Die Schubspannungen und Normalspannungen τ, σ_x, σ_z werden zu Hauptspannungen zusammengesetzt. Größe und Richtung werden analytisch oder graphisch nach (40) bestimmt.

Verdrillung und Schubspannung. Die Verdrillung des Stabes durch äußere Kräftepaare $M_x^{(a)}$ führt zur Verwölbung des Querschnitts, wenn dieser nicht rotationssymmetrisch begrenzt ist. Daher ist der lineare Ansatz für die Normalspannungen σ_x auch bei gleichzeitiger Biegung nicht mehr gültig

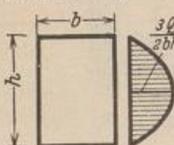


Abb. 30.

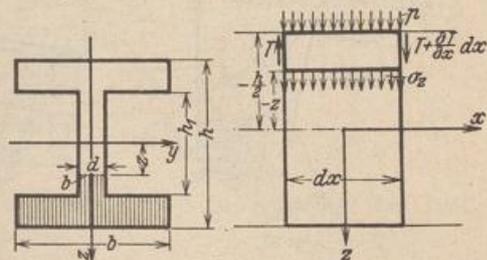


Abb. 31.

Abb. 32.

und als Näherung nur brauchbar, wenn die Verdrillung im Verhältnis zur Biegung klein ist.

Um Formänderung und Festigkeit abzuschätzen, wird der bezogene Verdrehungswinkel $d\theta/ds$ dem Drehmoment M_x des Querschnitts proportional gesetzt. Als Faktor dient das Produkt aus Gleitmodul G und einer dem Trägheitsmoment ähnlichen Querschnittskonstanten T

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{GT}. \quad (63)$$

O. Bach setzt in Anlehnung an einen Ansatz von St. Venant bei Rechteckquerschnitten von Stäben aus homogenem Werkstoff auf Grund von Versuchen mit $b/h = \lambda < 1$

$$T = \frac{\lambda^3}{(3,645 - 0,061\lambda)(1 + \lambda^2)} h^4. \quad (64)$$

Die Zahlen stimmen mit den theoretischen Ergebnissen überein, die A. Föppl und C. Weber durch Integration der Differentialgleichung erhalten haben. C. Weber setzt für den Rechteckquerschnitt und homogenen Werkstoff mit $h/b = n > 1$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{n\psi_3 b^4 G}; \quad \tau_{\max} = \psi_1 G \cdot b \frac{d\theta}{ds}; \quad T = n\psi_3 b^4. \quad (65)$$

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
ψ_1	0,6753	0,8476	0,9300	0,9854	0,9970	0,9990	~ 1	~ 1	1
ψ_3	0,1404	0,1957	0,2286	0,2633	0,2808	0,2982	0,3070	0,3123	0,3333

Diese Zahlen können mit großer Genauigkeit aus den folgenden Funktionen entwickelt werden:

$$\psi_1 \approx 1 - \frac{0,65}{1+n^3}, \quad \psi_3 = \frac{1}{3n} \left(n - 0,630 + \frac{0,052}{n^4} \right). \quad (66)$$

Nach den Versuchen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton über den Widerstand von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehen bestehen bei geringen Schubspannungen und sorgfältiger Bewehrung keine Bedenken, die Ansätze für homogenen Baustoff auch für Bauteile aus Eisenbeton anzuwenden. Indessen soll die Verdrillung stets nur untergeordnete Bedeutung und die damit verbundene Schubspannung nur die Eigenschaft von Nebenspannungen besitzen.

Werden nach (43) die Normal- und Schubspannungen eines infinitesimalen Stabteils ds mit großer Krümmung der Achse zu Schnittkräften zusammengefaßt, so können mit

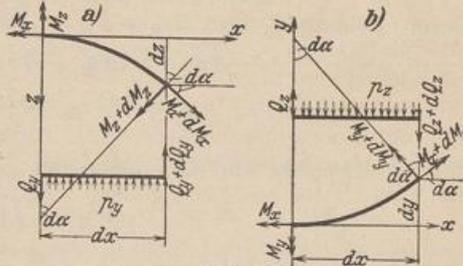


Abb. 33.

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad \sin(d\alpha) = d\alpha, \quad dy = dz = \frac{dx^2}{2r} \approx 0, \quad ds \approx r d\alpha \approx dx$$

bei Belastung senkrecht zur Stabebene die folgenden Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden (Abb. 33):

a) Krümmung des Stabes im Aufriß ($N_x = Q_z = M_y = 0$):

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} = -p_y, \quad \frac{dM_x}{dx} + \frac{M_x}{r} + Q_y = 0, \quad \frac{dM_z}{dx} = \frac{M_z}{r} \\ \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{M_x}{r^2} = -p_y. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

b) Krümmung des Stabes im Grundriß ($N_x = Q_y = M_z = 0$):

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} + \frac{M_y}{r} - Q_z = 0, \quad \frac{dM_z}{dx} = \frac{M_z}{r} \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{M_y}{r^2} = -p_z. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Hierbei sind alle kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt.

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des gekrümmten Stabes. Die Krümmung derjenigen gebogenen, ebenen Stäbe, welche im Bauwesen verwendet werden, ist in der Regel so klein, daß die Spannungen nach den Ansätzen (49), (51) für den geraden Stab berechnet werden. Ausnahmen ergeben sich an den Winkelpunkten eines Stabzuges. Die Ausrundung kann hier unter Umständen die Anwendung der Ergebnisse rechtfertigen, welche für die Spannungen σ_x , σ_z und τ eines gebogenen Stabes aufgestellt worden sind, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt. Als Grundlage dient auch hier die Annahme einer ebenen Verschiebung des Querschnitts, obwohl diese nicht allein durch die Schubspannungen τ_{xz} , sondern auch durch die Normalspannungen σ_z gestört wird.

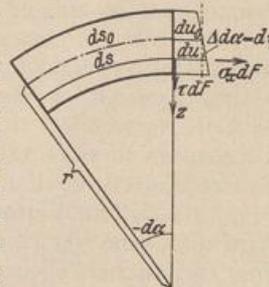


Abb. 34.

Aus Symmetriegründen ist $du = du(z) = du_0 + z d\psi$ nur von z abhängig. Dagegen sind nunmehr $\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + \frac{d\psi}{ds} z$ und ebenso σ_x quadratische Funktionen von z , da sich ds mit z ändert. Zunächst gelten die folgenden Beziehungen (Abb. 34):

$$ds_0 = -r d\alpha, \quad ds = ds_0 + z d\alpha, \quad \varepsilon_{0z} = \frac{\Delta ds_0}{ds}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\Delta ds_0}{ds_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{ds} = \frac{\Delta ds}{ds}.$$

Durch Belastung wird $ds_0 \rightarrow ds_0 + \Delta ds_0$, $d\alpha \rightarrow d\alpha + \Delta d\alpha$, $ds \rightarrow ds + \Delta ds$,

$$\Delta ds = \Delta ds_0 + \Delta z d\alpha + z \Delta d\alpha; \quad \Delta z \approx 0.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta ds_0 + z \Delta d\alpha}{ds_0 + z d\alpha} = \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{z}{r-z}. \quad (69)$$

Elastizitätsgesetz und Definition der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E; \quad N = \int \sigma_x dF = E \int \varepsilon_x dF; \quad M = \int \sigma_x z dF = E \int \varepsilon_x z dF,$$

$$\int \frac{z^2}{r^2} \frac{r}{r-z} dF = \int \frac{z^2}{r^2} \left(1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \dots \right) dF = \frac{\Theta}{r^2}; \quad \Theta \approx J.$$

$$\frac{N}{E} = F \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{\Theta}{r^2}; \quad \frac{M}{E} = \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} \right) \frac{\Theta}{r}.$$

$$E \varepsilon_0 = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF}; \quad E \Delta d\alpha = E d\psi = \left(\frac{M}{\Theta} - \frac{N}{rF} + \frac{M}{r^2 F} \right) ds_0. \quad (70)$$

Normalspannung als Funktion der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF} + \frac{Mz}{\Theta} \frac{r}{r-z}. \quad (71)$$

Für $r \gg h$ ist: $\frac{r}{r-z} \approx 1$, $\Theta \approx J_v$, $\varepsilon_0 = \frac{N}{EF}$, $\Delta d\alpha = d\psi \approx \frac{M}{EJ_v} ds_0$,

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{J_v}. \quad (72)$$

Die Schubspannungen τ_{xz} erfahren ebenfalls geringe Änderungen gegenüber den Angaben (58), (59) für den geraden Stab. Sie sind jedoch hier bereits als Näherung anzusehen, so daß sie auch zur Abschätzung der Schubspannungen des gekrümmten Stabes genügen.

Anwendungsbereich der technischen Biegelehre. Die Spannungsberechnung nach der technischen Biegelehre ist dort unbrauchbar, wo die Voraussetzungen der ebenen Verzerrung des Querschnitts nicht erfüllt sind. Dies ist der Fall an Knickpunkten und Unstetigkeitsstellen von Stabzügen und unter Einzellasten. Die Spannungsergebnisse des Geradliniengesetzes sind daher nach dem St. Venantschen Prinzip erst in einiger Entfernung von diesen ausgezeichneten Querschnitten zutreffend. Für die genauere Untersuchung des singulären Bereichs müssen andere Hilfsmittel verwendet werden.

Im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen werden auch in zahlreichen Fällen Bauteile verwendet, deren Werkstoff für Zug und Druck verschiedene elastische Konstanten besitzt oder zur Übertragung von Zugspannungen ungeeignet ist. Andere Bauteile werden aus mehreren Werkstoffen zusammengesetzt, welche je nach ihrem elastischen Vermögen an der Übertragung der inneren Kräfte beteiligt sind. Wird die ebene Verschiebung des Querschnitts in diesen Fällen auch als Grundlage einer technischen Theorie beibehalten, so erfahren die Ansätze zur Spannungsberechnung keine Änderung. Sie werden nach wie vor allein aus dem Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte abgeleitet. Sie bilden daher auch die Grundlage für den Festigkeitsnachweis und die Bemessung von Eisenbetonquerschnitten.

Weber, C.: Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Mitt. üb. Forschungsarbeiten d. VDI 1922 S. 249. — Derselbe: Biegung und Schub in geraden Balken. Z. angew. Math. Mech. 1924

S. 334. — Föppl, A.: Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. 3: Festigkeitslehre 10. Aufl. Leipzig 1927. — Timoshenko, S., u. J. M. Lessells: Festigkeitslehre. Berlin 1928. — Timoshenko, S.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Handb. physik. u. techn. Mechan. Bd. 4. Leipzig 1929. — Girtler, R.: Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen. Wien 1931.

11. Die Eigenspannungen des Baustoffs.

Bei jedem Festigkeitsnachweis wird mit der spannungsfreien Herstellung des Baustoffs gerechnet. Dies gilt von Gußeisen und Stahl ebenso wie von Beton und Eisenbeton. Wissenschaft, Technik und Handwerkskunst sind gemeinsam bemüht, dieses Ziel der Baustoffherzeugung zu erreichen. Die allgemeine physikalische Erkenntnis und die technischen Erfahrungen aus diesen Bestrebungen bilden die Grundlage der zahlreichen behördlichen Bestimmungen, welche das jederzeit Erreichbare im Interesse der öffentlichen Sicherheit vorschreiben.

Leider können die Baustoffe nur in beschränktem Maße in homogener Beschaffenheit, frei von Vorspannungen geliefert werden. Diese sind durch die physikalischen und chemischen Vorgänge bei der Herstellung und Verarbeitung unvermeidlich. Sie entstehen aus Temperatur- und Schwindwirkungen und aus den Unterschieden in den physikalischen Konstanten der Bestandteile. Ihre Ursache kann mittelbar durch die Kerbwirkung von Hohlräumen und Fremdeinschlüssen erklärt werden. Dasselbe gilt von den zahlreichen mikroskopisch feinen Rissen, der mikroskopisch mangelhaften Raumauffüllung und der wechselnden Dichte des Mittels. Diese bestimmen die allgemeinen Festigkeitseigenschaften, insbesondere das Verhältnis von Zug- und Schubfestigkeit zur Druckfestigkeit eines Baustoffes.

Die Bedeutung der Eigenspannungen wächst mit dem räumlichen Zusammenhang der Tragwerke. Sie ist also bei Flächentragwerken größer als bei Stabwerken und nimmt mit den Schwind- und Temperaturwirkungen zu. Die Erstarrungskontraktion des Baustoffs ist neben der gleichmäßigen Raumverkürzung stets noch von Einzelercheinungen begleitet, welche von der Ungleichartigkeit des Vorganges herrühren. Diese sind die Ursache von großen Eigenspannungen und müssen daher vermieden werden, um nicht die Brauchbarkeit, vielleicht sogar den Bestand eines Bauteils zu gefährden.

Bauteile aus Eisenbeton unterliegen außerdem stets Eigenspannungen durch die Raumveränderung des Betons relativ zur Stahlbewehrung. Daher werden sich unsymmetrisch bewehrte Bauteile beim Abbinden des Betons ebenso krümmen wie bei ungleichförmiger Temperaturänderung. Diese Erscheinungen sind von L. Herzka in mehreren Arbeiten behandelt worden. Er vergleicht nach den Ergebnissen von österreichischen Versuchen die Schwindwirkung nach vier Wochen und zwölf Monaten mit einer ungleichförmigen Erwärmung der oberen und unteren Fläche im Betrage von 14° C bis 64° C.

Die lineare Verkürzung der Bauteile durch Schwinden wird in den Bestimmungen einem Temperaturrückgang von t_0^0 gleichgesetzt, besser jedoch auf ein Schwindmaß bezogen, welches von dem Grad der Bewehrung abhängt:

$$n = E_e/E_b; \quad \psi = F_e/F_b;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Schwindmaß des unbewehrten Betons: } \varepsilon_{0s} = \Delta l/l = 0,00036, \approx 0,36^\circ/\text{cm} \\ \text{Schwindmaß des Eisenbetons: } \varepsilon_s = \Delta l/l = \varepsilon_{0s}/(1 + n\psi), \\ \text{Verbundschwindspannungen: im Eisen } \sigma_{e,d} = \varepsilon_s E_e, \text{ im Beton } \sigma_{b,z} = \psi \varepsilon_s E_e. \end{array} \right\} (73)$$

Eine gleichmäßige Temperaturänderung des Tragwerks erzeugt eine zur ursprünglichen ähnliche Form. Daher werden in diesem Falle Eigenspannungen nur bei geometrischer Überbestimmtheit der Stützung hervorgerufen. Ihre Größe ist, abgesehen von der Wärmeausdehnungszahl α_t , bestimmt durch die Querschnittsab-