



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des geraden Stabes

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

tungen sind entgegengesetzt (Abb. 20). $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ können für jeden Abschnitt angegeben werden, wenn die Stützenwiderstände oder die an den Anschlußstellen wirkenden Schnittkräfte bekannt sind.

Im allgemeinen besitzen nur drei Sonderfälle Bedeutung. Der erste behandelt den Stab mit ebener Krümmung und beliebiger Belastung, die nach Komponenten in seiner Ebene und senkrecht dazu zerlegt wird. $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ werden dann mit sechs Komponenten angegeben. Im zweiten Falle sind die Kräfte senkrecht zur Stabebene Null. $R^{(a)}$ und $M_R^{(a)}$ werden durch die drei Komponenten N , Q_z , M_y bestimmt. Der dritte Sonderfall betrifft den geraden Stab, dessen äußere Kräfte mit seiner Achse in einer Ebene liegen. Ist deren Spur s gegen die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts geneigt, so werden die der Geraden s zugeordneten Kernmomente angegeben oder die Vektoren der resultierenden Kraft und des resultierenden Moments auf die Hauptträgheitsachsen projiziert, so daß die Spannungen aus

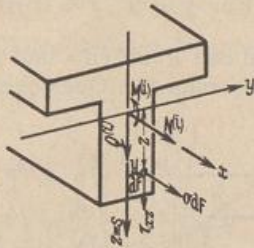


Abb. 21.

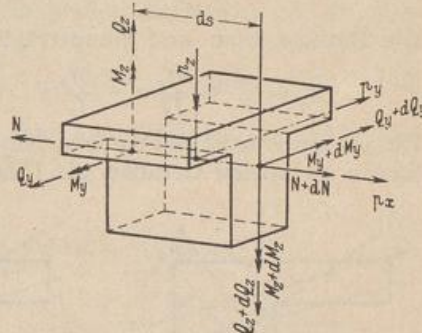


Abb. 22.

abgeleitet werden. Der Belastungsfall wird als schiefe Biegung bezeichnet. Bei zahlreichen Berechnungen fällt die Kraftlinie s in die Richtung der Hauptträgheitsachse z des Querschnitts. In diesem Falle sind M_x , Q_y Null und $\sigma_x = \sigma_x(z)$. Die Spannungen σ_x , τ_{xz} können mit drei Schnittkräften angegeben werden (Abb. 21).

$$N = \int \sigma_x dF, \quad M_y = \int \sigma_x z dF, \quad M_x = -\int \sigma_x y dF, \quad Q_y = \int \tau_{zy} dF, \quad Q_z = \int \tau_{xz} dF \quad (45)$$

Aus dem Gleichgewicht der Schnittkräfte an einem differentialen Stabteil $ds = dx$ werden bei beliebiger Belastung $\hat{p} = \hat{p}_x \hat{+} \hat{p}_y \hat{+} \hat{p}_z$ in t/m (Abb. 22) die folgenden Beziehungen abgeleitet:

$$N = \int \sigma_x dF, \quad M_y = \int \sigma_x z dF, \quad Q_z = \int \tau_{xz} dF. \quad (46)$$

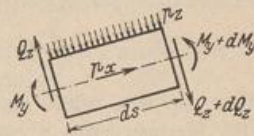


Abb. 23.

Schneidet die Ebene der äußeren Kräfte den Querschnitt in einer Hauptachse (Abb. 23), so ist einfacher

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, & \frac{dM_x}{dx} &= -Q_y, & \frac{dN}{dx} &= -\hat{p}_x, \\ \frac{d^2M_y}{dx^2} &= \frac{dQ_z}{dx} = -\hat{p}_z, & \frac{d^2M_x}{dx^2} &= -\frac{dQ_y}{dx} = \hat{p}_y. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Schneidet die Ebene der äußeren Kräfte den Querschnitt in einer Hauptachse (Abb. 23), so ist einfacher

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad \frac{dQ_z}{dx} = \frac{d^2M_y}{dx^2} = -\hat{p}_z, \quad \frac{dN}{dx} = -\hat{p}_x. \quad (48)$$

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des geraden Stabes.

Die relative Verschiebung $du = \Delta ds = \epsilon_x(y, z) ds$ einander zugeordneter Punkte benachbarter Querschnitte ist bei ebener Verschiebung des Querschnitts linear. Dasselbe gilt bei gerader Stabachse, also unveränderlichem $ds(y, z)$ auch für die Dehnung $\Delta ds/ds = \epsilon_x$. Die lineare Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung führt daher beim geraden Stabe zum Geradliniengesetz der Normalspannung σ_x , das auch bei wenig gekrümmten Stäben als Näherung verwendet werden kann.

Die gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Querschnitte wird durch den Weg der Schwerpunkte $du_0 = \Delta ds_0 = \varepsilon_0 ds$ und durch die gegenseitige Neigung $d\psi = d\psi_y + d\psi_z$ beschrieben. Die relativen Verschiebungen und daher auch die Spannungen σ_x sind in der Drehachse Null. Sie heißt aus diesem Grunde Nulllinie. Im übrigen ist

$$du = \Delta ds = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds - y d\psi_z + z d\psi_y = \left(\varepsilon_0 + \frac{y}{\rho_z} - \frac{z}{\rho_y} \right) ds = \frac{\sigma_x}{E} ds.$$

Die Bezugsachsen sind Hauptträgheitsachsen, so daß mit (45)

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad \text{Für } y=0, z=0 \text{ ist } \sigma_x = \sigma_0 = \frac{N}{F}. \quad (49)$$

Die Grenzwerte σ_i und σ_a entstehen in den Punkten i und a , in denen die zur Nulllinie n parallelen Geraden die Umgrenzung des Querschnitts berühren (Abb. 24).

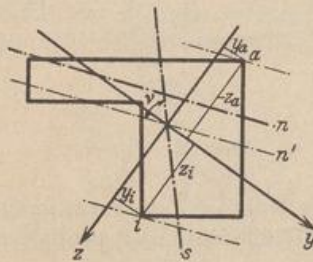


Abb. 24.

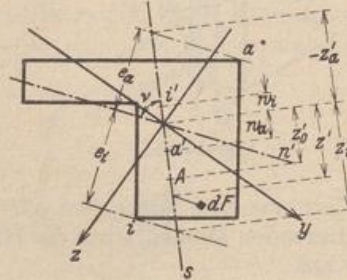


Abb. 25.

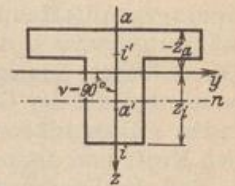


Abb. 26.

Die Richtung von n ist der zur Kraftlinie s konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse des Querschnitts ($\sphericalangle(n, s) = \nu$)

$$\sigma_{i,a} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a} - \frac{M_z}{J_z} y_{i,a}.$$

Der Ansatz wird einfacher, wenn die Momente der inneren Kräfte ($\sigma_x dF$) auf die Kernpunkte i' und a' der Kraftlinie s bezogen werden (Kernmomente). Ist A der Spurpunkt der Resultierenden der äußeren Kräfte im Querschnitt, so gilt mit $R_z^{(a)} = N^{(a)}$ (Abb. 25):

$$M_{i'} = N^{(a)} (z'_0 + |w_i|) = \int \sigma_x (z' + |w_i|) dF,$$

$$M_{a'} = N^{(a)} (z'_0 - |w_a|) = \int \sigma_x (z' - |w_a|) dF.$$

Die Strecken w_i, w_a werden von der Kernfigur des Querschnitts auf der Kraftlinie s abgeschnitten und als Kernweiten bezeichnet. Die Abstände der Punkte i und a von der zur Nulllinie n parallelen Schwerachse n' sind $e_i = |z'_i| \sin \nu, e_a = |z'_a| \sin \nu$. Das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse ist J'_n . Mit

$$\frac{J'_n}{|z'_i| \sin \nu} = F |w_i| = W_i, \quad \frac{J'_n}{|z'_a| \sin \nu} = F |w_a| = W_a$$

ist

$$\sigma_i = \frac{M_{i'}}{F |w_i|} = \frac{M_{i'}}{W_i}, \quad \sigma_a = - \frac{M_{a'}}{F |w_a|} = - \frac{M_{a'}}{W_a}. \quad (50)$$

Fällt die Spur s der Kraftebene mit der Hauptträgheitsachse z zusammen (Abb. 26), so ist $M_x = 0, d\psi_z = 0, du = \varepsilon_x ds = \varepsilon_0 ds + z d\psi_y$. Die Nulllinie n ist winkelrecht zur Kraftlinie s ($\sphericalangle(n, s) = \nu = 90^\circ$).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\varepsilon_0 + \frac{d\psi_y}{ds} z \right) = \frac{\sigma}{E}, & \sigma &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z, & \sigma_{i,a} &= \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_{i,a}, \\ W_i &= \frac{J_y}{|z_i|}, & W_a &= \frac{J_y}{|z_a|}, & \sigma_i &= \frac{M_{i'}}{W_i}, & \sigma_a &= - \frac{M_{a'}}{W_a}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Die Beziehungen zwischen der Längskraft N (+ als Zugkraft), den Momenten der inneren Kräfte ($\sigma_x dF$) in bezug auf den Schwerpunkt S und den Kernmomenten M_v, M_a sind

$$N = \frac{M_v' - M_a'}{|w_v| + |w_a|}; \quad M = \frac{M_v' |w_a| + M_a' |w_v|}{|w_a| + |w_v|}. \quad (52)$$

Das Spannungsbild des Stabes zeigt außerdem auch Schubspannungen τ_{xz}, τ_{xy} . Sie ergeben sich aus der Betrachtung des Gleichgewichts der Kräfte am differentialen Prisma:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Für den allgemeinen Fall der schiefen Biegung ohne Längskraft ist nach (47), (49)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{Q_z}{J_v} z + \frac{Q_v}{J_z} y, \\ \int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dy dz + \int \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dz &= -\frac{Q_z}{J_v} \int z dF - \frac{Q_v}{J_z} \int y dF. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

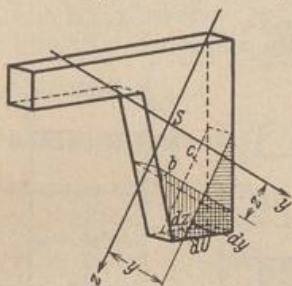


Abb. 27.

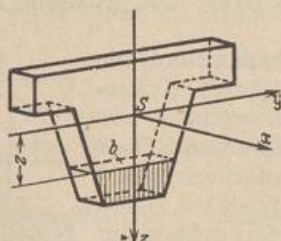


Abb. 28.

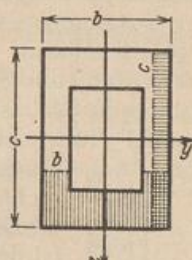


Abb. 29.

Für eine Fläche F_b oder eine Fläche F_c , die nach Abb. 27 durch die Parallele b, c zu der Hauptachse y, z begrenzt ist, gilt unter der Voraussetzung

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0$$

mit $dy = dU \sin(dU, z)$, $dz = dU \sin(dU, y)$,

$$\int_{U_b} [\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y)] dU = -\frac{Q_z}{J_v} S_{bv} - \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}. \quad (55)$$

Die Belastung des Stabes ist senkrecht zur Oberfläche gerichtet, so daß am Rande des Querschnitts

$$\tau_{zx} \sin(dU, z) + \tau_{yx} \sin(dU, y) = 0. \quad (56)$$

Die Integration erstreckt sich also allein auf die Strecke b mit $\sin(dU, z) = -1$, $\sin(dU, y) = 0$ oder c mit $\sin(dU, z) = 0$, $\sin(dU, y) = -1$. Daher ist

$$\int_b \tau_{zx} dy = \frac{Q_z}{J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{bz}, \quad \int_c \tau_{yx} dz = \frac{Q_z}{J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{J_z} S_{cz}. \quad (57)$$

Die mittleren Schubspannungen τ_0 im Schnitt b oder c lassen sich also folgendermaßen angeben:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx,0} &= \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv} + \frac{Q_v}{b J_z} S_{bz}, \\ \tau_{yx,0} &= \frac{Q_z}{c J_v} S_{cv} + \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Sind die Hauptträgheitsachsen gleichzeitig Symmetrieachsen (Abb. 28 u. 29), so sind

$$S_{bz} = 0 \quad \text{und} \quad S_{cv} = 0. \quad \text{Daher} \quad \tau_{zx,0} = \frac{Q_z}{b J_v} S_{bv}; \quad \tau_{yx,0} = \frac{Q_v}{c J_z} S_{cz}. \quad (59)$$

Im Regelfall ist $Q_y = 0$, also $\tau_{yx} = 0$; für den Rechteckquerschnitt ist außerdem $S_{by} = \frac{1}{2} (\frac{h^2}{4} - z^2) b$; $\tau_{zx} = \frac{3Q}{2F} [1 - (\frac{2z}{h})^2]$; $\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$, Abb. 30. (60)

Für Querschnitte, die sich nach Abb. 31 aus Rechtecken zusammensetzen, ist

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z}{a J_y} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - z^2 \right) \right]. \quad (61)$$

In diesen einfachen Fällen kann auch die Normalspannung σ_z nach Abb. 32 aus dem Gleichgewicht der senkrechten Kräfte angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} p dx + \frac{\partial T}{\partial x} dx + b \sigma_z dx = 0, \quad T = \int_{-h/2}^z b \tau_{zx} dz, \\ \text{Rechteckquerschnitt: } \sigma_z = -\frac{p}{2J_y} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Die Schubspannungen und Normalspannungen τ, σ_x, σ_z werden zu Hauptspannungen zusammengesetzt. Größe und Richtung werden analytisch oder graphisch nach (40) bestimmt.

Verdrillung und Schubspannung. Die Verdrillung des Stabes durch äußere Kräftepaare $M_x^{(a)}$ führt zur Verwölbung des Querschnitts, wenn dieser nicht rotationssymmetrisch begrenzt ist. Daher ist der lineare Ansatz für die Normalspannungen σ_x auch bei gleichzeitiger Biegung nicht mehr gültig

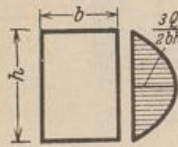


Abb. 30.

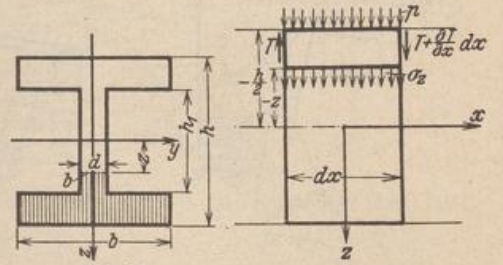


Abb. 31.

Abb. 32.

und als Näherung nur brauchbar, wenn die Verdrillung im Verhältnis zur Biegung klein ist.

Um Formänderung und Festigkeit abzuschätzen, wird der bezogene Verdrehungswinkel $d\theta/ds$ dem Drehmoment M_x des Querschnitts proportional gesetzt. Als Faktor dient das Produkt aus Gleitmodul G und einer dem Trägheitsmoment ähnlichen Querschnittskonstanten T

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{GT}. \quad (63)$$

O. Bach setzt in Anlehnung an einen Ansatz von St. Venant bei Rechteckquerschnitten von Stäben aus homogenem Werkstoff auf Grund von Versuchen mit $b/h = \lambda < 1$

$$T = \frac{\lambda^3}{(3,645 - 0,061\lambda)(1 + \lambda^2)} h^4. \quad (64)$$

Die Zahlen stimmen mit den theoretischen Ergebnissen überein, die A. Föppl und C. Weber durch Integration der Differentialgleichung erhalten haben. C. Weber setzt für den Rechteckquerschnitt und homogenen Werkstoff mit $h/b = n > 1$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_x}{n\psi_3 b^4 G}; \quad \tau_{\max} = \psi_1 G \cdot b \frac{d\theta}{ds}; \quad T = n\psi_3 b^4. \quad (65)$$

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
ψ_1	0,6753	0,8476	0,9300	0,9854	0,9970	0,9990	~ 1	~ 1	1
ψ_3	0,1404	0,1957	0,2286	0,2633	0,2808	0,2982	0,3070	0,3123	0,3333