Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des gekrümmten Stabes

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Diese Zahlen können mit großer Genauigkeit aus den folgenden Funktionen entwickelt werden:

$$\psi_1 \approx 1 - \frac{0{,}65}{1+n^3}, \qquad \psi_3 = \frac{1}{3n}\left(n - 0{,}630 + \frac{0{,}052}{n^4}\right). \tag{66}$$

Nach den Versuchen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton über den Widerstand von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehen bestehen bei geringen Schubspannungen und sorgfältiger Bewehrung keine Bedenken, die Ansätze für homogenen Baustoff auch für Bauteile aus Eisenbeton anzuwenden. Indessen soll die Verdrillung stets nur untergeordnete Bedeutung und die damit verbundene Schubspannung nur die Eigenschaft von Nebenspannungen besitzen.

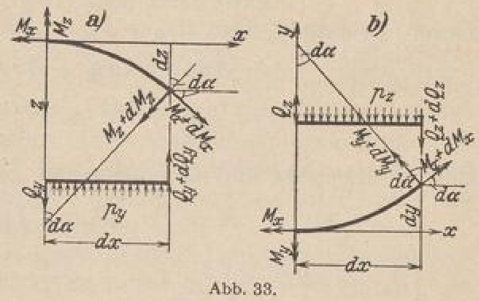

Abb. 33.

Werden nach (43) die Normal- und Schubspannungen eines infinitesimalen Stabteils ds mit großer Krümmung der Achse zu Schnittkräften zusammengefaßt, so können mit

$$\cos(d\alpha) = 1, \qquad \sin(d\alpha) = d\alpha, \qquad dy = dz = \frac{dx^2}{2r} \approx 0, \qquad ds \approx r\,d\alpha \approx dx$$

bei Belastung senkrecht zur Stabebene die folgenden Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden (Abb. 33):

a) Krümmung des Stabes im Aufriß ($N_x = Q_z = M_y = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_y}{dx} = -p_y, \qquad \frac{dM_z}{dx} + \frac{M_x}{r} + Q_y = 0, \qquad \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_z}{r} \\ &\text{oder} \qquad \frac{d^2M_z}{dx^2} + \frac{M_z}{r^2} = -p_y. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

b) Krümmung des Stabes im Grundriß ($N_x = Q_y = M_z = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \qquad \frac{dM_y}{dx} + \frac{M_x}{r} - Q_z = 0, \qquad \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_y}{r} \\ &\text{oder} \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} + \frac{M_y}{r^2} = -p_z. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Hierbei sind alle kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt.

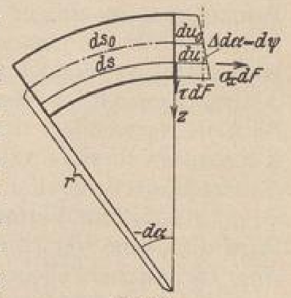

Abb. 34.

Verzerrungs- und Spannungszustand am Querschnitt des gekrümmten Stabes. Die Krümmung derjenigen gebogenen, ebenen Stäbe, welche im Bauwesen verwendet werden, ist in der Regel so klein, daß die Spannungen nach den Ansätzen (49), (51) für den geraden Stab berechnet werden. Ausnahmen ergeben sich an den Winkelpunkten eines Stabzuges. Die Ausrundung kann hier unter Umständen die Anwendung der Ergebnisse rechtfertigen, welche für die Spannungen σ_x, σ_z und τ eines gebogenen Stabes aufgestellt worden sind, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt. Als Grundlage dient auch hier die Annahme einer ebenen Verschiebung des Querschnitts, obwohl diese nicht allein durch die Schubspannungen τ_{xz}, sondern auch durch die Normalspannungen σ_z gestört wird.

Aus Symmetriegründen ist $du = du(z) = du_0 + z d\psi$ nur von z abhängig. Dagegen sind nunmehr $\varepsilon_x = \varepsilon_{0z} + \frac{d\psi}{ds} z$ und ebenso σ_x quadratische Funktionen von z, da sich ds mit z ändert. Zunächst gelten die folgenden Beziehungen (Abb. 34):

$$ds_0 = -r\,d\alpha\,, \quad ds = ds_0 + z\,d\alpha\,, \quad \varepsilon_{0z} = \frac{\Delta ds_0}{ds}\,, \quad \varepsilon_0 = \frac{\Delta ds_0}{ds_0}\,, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{ds} = \frac{\Delta ds}{ds}\,.$$

Durch Belastung wird $ds_0 \to ds_0 + \Delta ds_0$, $d\alpha \to d\alpha + \Delta d\alpha$, $ds \to ds + \Delta ds$,

$$\Delta ds = \Delta ds_0 + \Delta z\,d\alpha + z\,\Delta d\alpha\,; \quad \Delta z \approx 0\,.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\Delta ds_0 + z\,\Delta d\alpha}{ds_0 + z\,d\alpha} = \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha}\right)\frac{z}{r-z}\,. \tag{69}$$

Elastizitätsgesetz und Definition der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E\,; \qquad N = \int \sigma_x dF = E\int \varepsilon_x dF\,; \qquad M = \int \sigma_x z\,dF = E\int \varepsilon_x z\,dF\,,$$

$$\int \frac{z^2}{r^2}\,\frac{r}{r-z}\,dF = \int \frac{z^2}{r^2}\left(1 + \frac{z}{r} + \frac{z^2}{r^2} + \cdots\right)dF = \frac{\Theta}{r^2}\,; \quad \Theta \approx J\,.$$

$$\frac{N}{E} = F\varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha}\right)\frac{\Theta}{r^2}\,; \qquad \frac{M}{E} = \left(\varepsilon_0 - \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha}\right)\frac{\Theta}{r}\,.$$

$$E\varepsilon_0 = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF}\,; \qquad E\,\Delta d\alpha = E\,d\psi = \left(\frac{M}{\Theta} - \frac{N}{rF} + \frac{M}{r^2 F}\right)ds_0\,. \tag{70}$$

Normalspannung als Funktion der Schnittkräfte:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M}{rF} + \frac{Mz}{\Theta}\,\frac{r}{r-z}\,. \tag{71}$$

Für $r \gg h$ ist: $\frac{r}{r-z} \approx 1$, $\Theta \approx J_y$, $\varepsilon_0 = \frac{N}{EF}$, $\Delta d\alpha = d\psi \approx \frac{M}{EJ_y}\,ds_0$,

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{J_y}\,. \tag{72}$$

Die Schubspannungen τ_{xz} erfahren ebenfalls geringe Änderungen gegenüber den Angaben (58), (59) für den geraden Stab. Sie sind jedoch hier bereits als Näherung anzusehen, so daß sie auch zur Abschätzung der Schubspannungen des gekrümmten Stabes genügen.

Anwendungsbereich der technischen Biegelehre. Die Spannungsberechnung nach der technischen Biegelehre ist dort unbrauchbar, wo die Voraussetzungen der ebenen Verzerrung des Querschnitts nicht erfüllt sind. Dies ist der Fall an Knickpunkten und Unstetigkeitsstellen von Stabzügen und unter Einzellasten. Die Spannungsergebnisse des Geradliniengesetzes sind daher nach dem St. Venantschen Prinzip erst in einiger Entfernung von diesen ausgezeichneten Querschnitten zutreffend. Für die genauere Untersuchung des singulären Bereichs müssen andere Hilfsmittel verwendet werden.

Im Gegensatz zu den bisherigen Annahmen werden auch in zahlreichen Fällen Bauteile verwendet, deren Werkstoff für Zug und Druck verschiedene elastische Konstanten besitzt oder zur Übertragung von Zugspannungen ungeeignet ist. Andere Bauteile werden aus mehreren Werkstoffen zusammengesetzt, welche je nach ihrem elastischen Vermögen an der Übertragung der inneren Kräfte beteiligt sind. Wird die ebene Verschiebung des Querschnitts in diesen Fällen auch als Grundlage einer technischen Theorie beibehalten, so erfahren die Ansätze zur Spannungsberechnung keine Änderung. Sie werden nach wie vor allein aus dem Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte abgeleitet. Sie bilden daher auch die Grundlage für den Festigkeitsnachweis und die Bemessung von Eisenbetonquerschnitten.

Weber, C.: Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Mitt. üb. Forschungsarbeiten d. VDI 1922 S. 249. — Derselbe: Biegung und Schub in geraden Balken. Z. angew. Math. Mech. 1924