



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

II. Das statisch bestimmte Stabwerk

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Z. VDI 1900 S. 1524. — Derselbe: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik S. 187. Berlin 1906. — Kármán, Th. v.: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Mitt. über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 118 und Z. VDI 1911 S. 1751. — Honegger, E., Zürich: Das Verhalten mechanisch beanspruchter Metalle. Eisenbau 1921 S. 47. — Sandel, G. D.: Über die Festigkeitsbedingungen. Leipzig 1925. — Schleicher: Der Spannungszustand an der Fließgrenze. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 199. — Derselbe: Über die Sicherheit gegen Überschreiten der Fließgrenze. Bauing. 1928 S. 253. — Náđai, A.: Plastizität und Erddruck. Handb. Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Gehler, W.: Sicherheitsgrad und Beanspruchung. Bericht über die 2. Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau S. 176. Wien 1929. — Griffith, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philos. Trans. Roy. Soc. A. vol. 221 (1921) S. 163; Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924 S. 55. — Smekal, A.: Naturwiss. Bd. 10 (1922) S. 799; Handb. der Physikalischen und Technischen Mechanik Bd. 4. 2. Hälfte. Leipzig 1931. Abschn. Kohäsion der Festkörper.

II. Das statisch bestimmte Stabwerk.

13. Allgemeine Bemerkungen über Schnittkräfte, Zustands- und Einflußlinien.

Die Beurteilung der Sicherheit eines Stabwerks ist mit der Feststellung des Spannungszustandes auf die Berechnung der Schnittkräfte zurückgeführt. Diese werden für eine vorgegebene Belastung, für die ungünstigste Stellung einer beweglichen Lastengruppe oder auch für die einem jeden Querschnitt zugeordnete ungünstigste Zusammenfassung aller möglichen Belastungen angegeben.

Die Schnittkräfte aus einer vorgegebenen Belastung bilden, als die Ordinaten von Schaulinien nach einer ausgezeichneten Richtung zur Stabachse aufgetragen, drei Zustandslinien, die je nach der Art der Schnittkraft als Längskraft-, Querkraft- und Momentenlinie bezeichnet werden.

Die anderen beiden Aufgaben setzen die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes voraus, nach dem eine beliebige Kraftwirkung W_h , also Stützenwiderstand, Schnittkraft oder Formänderung, als lineare Funktion der einzelnen Lasten oder Lastengruppen

$$W_h = \sum_{m=1}^{m=n} W_{hm} P_m \quad (77)$$

angegeben werden kann. Diese Voraussetzung ist nach S. 19 für alle kinematisch starren Tragwerke erfüllt, deren elastische Eigenschaften im Belastungsbereich durch das Hookesche Gesetz beschrieben werden. Das Superpositionsgesetz gilt daher nicht für Stabwerke mit veränderlicher Gliederung.

Die Grenzwerte einer Schnittkraft aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter, gebundener Einzellasten P_m oder einer stetigen, gleichgerichteten Streckenbelastung $p(x)$ werden mit der Einflußlinie der Schnittkraft bestimmt. Ihre Ordinaten sind die graphische Darstellung der Schnittkraft W_{hm} , welche durch die verschiebbliche, jedoch in ihrer Richtung unveränderliche Last $P_m = 1\text{ t}$ in allen möglichen Stellungen hervorgerufen wird. Die Ordinate $W_{hm} = \eta_m$ wird von einer Bezugsgeraden im Schnittpunkt m' der Wirkungslinie von P_m in deren Richtung aufgetragen. Man unterscheidet daher Einflußlinien für senkrechte, waagerechte oder schräge Belastung des Stabzugs. Ihre Ordinaten sind im allgemeinen positiv oder negativ.

Die Einflußlinie dient zur Ermittlung der beiden ungünstigsten Stellungen der beweglichen Belastung mit

$$W_h = \sum W_{hm} P_m + \int p(x) W_{hm} dx = \max_{\min} W_{hp} \quad (78)$$

als positivem oder negativem Grenzwert. Diese können darnach auch selbst bestimmt

werden, indem die $W_{hm} = \eta_m$ mit den zugeordneten Lasten P_m multipliziert und die Produkte addiert werden. Bei $p(x) = \text{const}$ ist

$$W_h = p \int \eta dx = p F_\eta. \quad (79)$$

Der Begriff der Einflußlinie läßt sich auch auf eine in ihrer Richtung veränderliche Einzelkraft sowie auf ein wanderndes Kräftepaar von 1 mt anwenden und zum Einflußfeld erweitern, das die Größe einer Schnittkraft für die in bezug auf Angriffspunkt und Richtung beliebige Einzellast angibt.

Werden die beiden Grenzwerte ($\max W_{hp}$, $\min W_{hp}$) aus der beweglichen Belastung in Verbindung mit den positiven oder negativen Werten der Schnittkraft aus den anderen Belastungen wiederum als Ordinaten aufgetragen, so entstehen die Schaulinien der absoluten Grenzwerte $\max W_h$, $\min W_h$. Sie liefern die ungünstigsten Spannungen des Querschnitts und damit die Unterlagen für die Bemessung des Tragwerks.

Die Beschreibung des Tragwerks. Die Berechnung der Schnittkräfte wird auf die ebenen Stabzüge und Stabverbindungen mit gerader, gekrümmter oder beliebig gebrochener Stabachse und mit gemeinsamer Symmetrieebene beschränkt, die in die Ebene der äußeren Kräfte fällt. Der Spannungszustand wird dann in jedem Querschnitt durch die drei Schnittkräfte N , M_y , Q_z oder M_x , M_y , Q_z beschrieben. Diese sind Funktionen der Lasten, Stützkräfte und unter Umständen auch von statisch

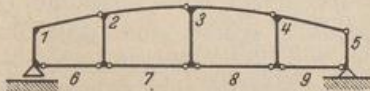


Abb. 36. $n = 9$; $t = 3$; $v = 2 \cdot 12$;
 $t + v = 27 = 3n$,
daher statisch bestimmt.

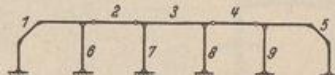


Abb. 37. $n = 9$; $t = 2 \cdot 6$; $v = 2 \cdot 8$;
 $t + v = 28 = 3n + 1$,
daher einfach statisch unbestimmt.

unbestimmten Größen. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte zur Berechnung der Stützkräfte, so spricht man von äußerer statischer Bestimmtheit des Stabwerks. Gilt das gleiche von den Schnittkräften, so ist auch innere statische Bestimmtheit vorhanden. Die Untersuchung bleibt zunächst auf diese Tragwerke beschränkt.

Das einfachste Tragwerk ist der beliebig gestützte offene Stabzug. Zusammengesetzte Stabwerke entstehen durch die Verbindung einzelner biegesteifer Stäbe und Scheiben allein oder im Zusammenhang mit Stabzügen, deren Elemente nur Längskräfte erhalten. Beispiele der ersten Gruppe sind der Auslegeträger und Dreigelenkbogen, Hänge- und Sprengwerke gehören als versteifte Stabbogen der zweiten an. Die Scheiben werden kinematisch entweder starr oder beweglich durch reibungslose Gelenke, Führungen und Stäbe miteinander verbunden. Man spricht in diesem Zusammenhang von starrer und beweglicher Einspannung, von Gelenken und beweglicher Lagerung und idealisiert sie durch eine kinematisch gleichwertige Anordnung von Stützen- und Verbindungsstäben. Auf diese Weise entstehen drei-, zwei- und einstäbige Verbindungen mit null, ein und zwei Freiheitsgraden der Relativbewegung.

Die Kräfte, die an den Stützpunkten und in den Scheibenverbindungen durch die Belastung hervorgerufen werden, können statisch bestimmt, also mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte in der Ebene eindeutig angegeben werden, wenn die Anzahl der für jede Scheibe (Anzahl n) und jeden freien Knoten (Anzahl k) verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen gleich der Anzahl der Stützenbedingungen t , vermehrt um die Anzahl der Verbindungsstäbe v und die Anzahl der Systemstäbe s ist, die nur Längskräfte übertragen. Die notwendige Bedingung zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Verbindungskräfte ist daher

$$3n + 2k = t + v + s. \quad (80)$$

Sie ist auch hinreichend, wenn die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen von Null verschieden ist.

Unter dieser Voraussetzung können auch die Lasten, Stütz- oder Verbindungskräfte links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt äquivalent in $N^{(a)}$, $M^{(a)}$, $Q^{(a)}$ zusammengefaßt und für den Schwerpunkt des Querschnitts oder die Kernpunkte i' , a' der Kraftlinie angegeben werden.

Hilfsmittel der Mechanik zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die statischen Bedingungen für die unbekannt äußeren Kräfte einer Scheibe i , die mit einer Gruppe von gegebenen Kräften im Gleichgewicht stehen, können stets nach einem der folgenden beiden Ansätze angeschrieben werden (Abb. 38):

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \sum_i X_k = 0, \quad \sum_i Y_k = 0, \quad \sum_i M_{k,a} = 0. \\ 2. \quad \sum_i M_{k,a} = 0, \quad \sum_i M_{k,b} = 0, \quad \sum_i M_{k,c} = 0. \end{array} \right\} \quad (81)$$

Hierbei bedeuten a, b, c drei zur Auflösung der Gleichungen geeignete Bezugspunkte für die Momente der Kräfte.

Die Aufgabe kann auch zeichnerisch gelöst werden, indem zuerst die Resultierende R aus der gegebenen Belastung durch eine Mittelkraftlinie oder durch Kraft- und Seileck bestimmt und je nach der Aufgabe in 2 oder 3 Komponenten derart zerlegt wird, daß die Gleichgewichtsbedingungen graphisch erfüllt sind. Die äußeren Kräfte einer unbelasteten, mit drei Stützen- oder Verbindungsstäben angeschlossenen Scheibe sind daher Null. Bei vier Komponenten ist die geometrische Summe von zweien in diesem Falle entgegengesetzt gleich der Summe der beiden anderen.

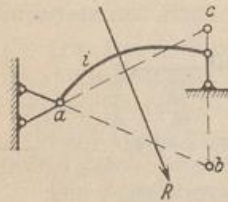


Abb. 38.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer beweglichen Scheibe oder Scheibenverbindung werden in allgemeiner Form durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgesprochen. Nach diesem ist die Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte bei Gleichgewicht der Scheibe oder Scheibenverbindung während einer virtuellen, d. h. verschwindend kleinen, mit den kinematischen Eigenschaften des Systems verträglichen Bewegung Null.

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = \sum \mathfrak{P}_m \delta \bar{s}_m = \sum [X_m \delta x_m + Y_m \delta y_m] = 0 \\ \mathfrak{P}_m = X_m \hat{+} Y_m, \quad \delta \bar{s}_m = \delta x_m \hat{+} \delta y_m. \end{array} \right\} \quad (82)$$

Dieser Ansatz enthält ebenso viele statische Bedingungen als das System Freiheitsgrade. Die virtuellen Verschiebungen $\delta x_m, \delta y_m$ sind verschwindend kleine Änderungen der Koordinaten x_m, y_m des Angriffspunktes der Kraft P_m , so daß nach S. 21

$$\delta A = \delta \sum [X_m x_m + Y_m y_m] = -\delta \Pi = 0 \quad (83)$$

und daher die potentielle Energie Π der äußeren Kräfte bei Gleichgewicht des Systems zum Minimum wird.

Um die konkrete Schwierigkeit des unendlich kleinen Weges $\delta \bar{s}$ zu vermeiden, können die Verschiebungen auf die hierzu erforderliche Zeit bezogen werden. Man geht mit der auf diese Weise entstehenden mittleren Geschwindigkeit zur Grenze über und erhält aus (82) das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \sum [X_m \dot{x}_m + Y_m \dot{y}_m] = 0. \quad (84)$$

An die Stelle der unendlich kleinen Verschiebungen sind die Geschwindigkeiten \dot{x}_m, \dot{y}_m der Momentanbewegung getreten, die zeichnerisch dargestellt werden können. Sie lassen sich hier als Wege in der Zeiteinheit ansehen, um mit der Einführung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten keine begrifflichen Änderungen gegen (82) herbeizuführen.

Nach diesem Ansatz kann jede einzelne Stütz- und Schnittkraft des Stabwerks unabhängig von den unbekanntem äußeren Kräften angegeben werden, während diese bei einer Lösung nach (81) stets bekannt sein müssen, bevor sich die Schnittkräfte berechnen lassen.

Allgemeine Ansätze zur analytischen Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die Berechnung der Stützkräfte einer einzelnen statisch bestimmt gestützten Scheibe nach (81) gilt als bekannt. Dieselben Ansätze liefern bei einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung aus n Scheiben $3n$ lineare Gleichungen, aus denen $t+v$ unbekanntem Stütz- und Verbindungskräfte angegeben werden können. Diese sind unendlich groß, wenn die Nennerdeterminante Null ist. Das Stabwerk besitzt dann unendlich kleine Beweglichkeit.

Die Lösung ist in der Regel einfacher, wenn die Berechnung zunächst auf die Stützenwiderstände beschränkt wird. In diesem Falle stehen die drei statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der freien, also von der Stützung gelösten Scheibenkette zur Verfügung. Hierzu treten $3(n-1)-v$ statische Bedingungen für die äußeren Kräfte an einzelnen Scheiben oder Teilen der Scheibenverbindung, da auch relative Drehungen oder Verschiebungen der Scheiben bei Gleichgewicht ausgeschlossen sind. Daher werden $3n-v$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der t Stützenwiderstände verwendet. Die Lösung ist bei statisch bestimmten Stabwerken, abgesehen vom Ausnahmefall der unendlich kleinen Be-

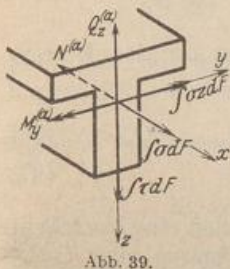


Abb. 39.



Abb. 40.

weglichkeit, eindeutig. Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, zunächst die Verbindungskräfte an den Gelenken zu bestimmen und dann erst mit diesen und den Lasten die Stützkräfte jeder einzelnen Scheibe anzugeben.

Mit den Stütz- und Gelenkkraften können die Schnittkräfte M , N , Q oder M_y , $M_{y'}$, Q für den Stabquerschnitt abgeleitet werden. Der positive Richtungssinn ergibt sich aus der positiven Definition der Koordinaten in Abb. 17. Die Längskraft ist positiv als Zugkraft. Der Zuwachs der Normalspannung $d\sigma_x$ beim Fortschreiten in der z -Richtung bestimmt das positive Biegemoment M_y und bedeutet eine hohle Krümmung des Stabes gegen die negative z -Achse. Mit der positiven Definition von $\partial\tau_{xz}/\partial x \cdot dx$ und damit auch von dQ_z nach Lage und Richtung der Bezugsachsen nimmt das positive Moment bei positiver Querkraft zu. Das positive Vorzeichen von $N_x^{(a)}$, $M_y^{(a)}$, $Q_z^{(a)}$ ist dann durch (44) bestimmt (Abb. 39). Umgekehrt sind mit der Dehnung und der Krümmung des Stabes durch ein positives Biegemoment auch die positiven Bezugsachsen x , z gegeben. Bei mehrteiligen Stabzügen werden oft die Stabkanten, an denen positive Momente Zugspannungen erzeugen, zeichnerisch nach Abb. 40 hervorgehoben. Sie bezeichnen den positiven Bereich von z . Die Darstellung ist überflüssig, wenn die positiven Biegemomente stets nach Vereinbarung an der gezogenen Stabfaser aufgetragen werden.

Die Schnittkräfte V_a , H_a , M_a des Querschnitts a (Abb. 41) sind Stütz- oder Anschlußkräfte und daher bekannt. Die Belastung des Stabes durch Einzellasten $\dots P_{m-1}$, $P_m \dots$, deren Wirkungslinien die Stabachse in den Punkten $\dots (m-1)$, $m \dots$ schneiden und dort nach P_{xm} , P_{ym} zerlegt werden, liefert im Querschnitt k mit V_a , H_a , M_a die folgenden Schnittkräfte (Abb. 41 und 42):

$$\left. \begin{aligned} H_k &= -H_a - \sum_k P_{xm}, & V_k &= V_a - \sum_k P_{ym}, \\ M_k &= M_a + V_a x_k - H_a y_k - \sum_k P_{ym} (x_k - a_m) - \sum_k P_{xm} (y_k - c_m), \\ N_k &= -V_k \sin \alpha_k + H_k \cos \alpha_k, & Q_k &= V_k \cos \alpha_k + H_k \sin \alpha_k. \end{aligned} \right\} (85)$$

Ihr Verlauf kann durch die Differentialbeziehungen unter (48) nachgeprüft werden. Das Biegemoment wird in denjenigen Querschnitten zum Grenzwert, in denen die Querkraft Null ist oder an einer Unstetigkeitsstelle das Vorzeichen wechselt. Die positive Querkraft bedeutet zunehmende Biegemomente M_y , die konstante Querkraft den linearen Verlauf des Biegemoments.

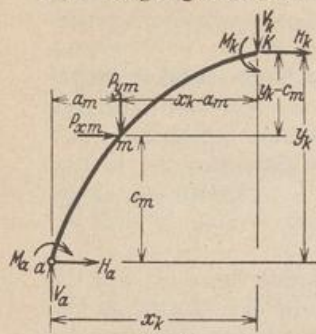


Abb. 41.

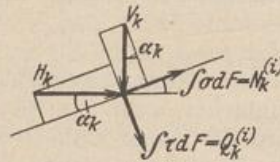


Abb. 42.

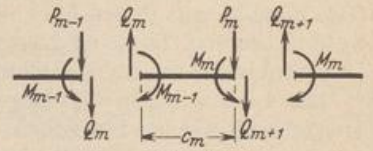


Abb. 43.

Bei Einzelbelastung winkelrecht zu einem geraden Stabe ist für den Bereich $(m-1)$ bis m nach Abb. 43

$$\frac{dM}{dx} = Q_m = \text{const}, \text{ daher } M_m - M_{m-1} = Q_m c_m, \quad M_m = M_{m-1} + Q_m c_m. \quad (86)$$

$$P_m + Q_{m+1} - Q_m = 0, \quad Q_{m+1} = Q_m - P_m. \quad (87)$$

Lastpunkt Querschnitt	c_m	P_m	Q_m	$Q_m c_m$	M_m
0	—	V_0	—	—	M_0
1	c_1	P_1	Q_1	$Q_1 c_1$	M_1
2	c_2	P_2	Q_2	$Q_2 c_2$	M_2
3	c_3	P_3	Q_3	$Q_3 c_3$	M_3
·	·	·	·	·	·

Die Beziehungen bilden eine Vorschrift zur einfachen Berechnung aller Querkraften und Biegemomente eines statisch bestimmten Stabzugs (s. nebenstehende Tabelle).

Hierbei sind c, P gegeben, die Randwerte V_0, M_0 anderweit berechnet und bekannt. Demnach ist $Q_1 = V_0 - P_1$ usw., $M_1 = M_0 + Q_1 c_1$ usw.

Bei einem geraden, unter α_m geneigten Stabe mit beliebig gerichteten Einzellasten $P_m = P_{xm} \hat{+} P_{ym}$ wird

$$N_m = H_m \cos \alpha_m - V_m \sin \alpha_m, \quad Q_m = H_m \sin \alpha_m + V_m \cos \alpha_m.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Abschnitt c_m ergibt sich nach Abb. 44

$$\left. \begin{aligned} V_{m+1} - V_m + P_{ym} &= 0, & H_{m+1} - H_m + P_{xm} &= 0, & M_m - M_{m-1} &= Q_m s_m, \\ V_{m+1} &= V_m - P_{ym}, & H_{m+1} &= H_m - P_{xm}; \\ M_m &= M_{m-1} + Q_m s_m = M_{m-1} + V_m c_m + H_m e_m. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

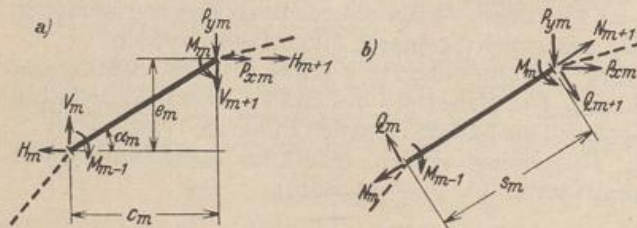


Abb. 44.

Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, die Einzellasten in zwei Komponenten, nach der Stabachse und senkrecht zu ihr zu zerlegen.

In allen Fällen ist zunächst die unmittelbare Eintragung der Lasten angenommen worden. Geschieht dies

jedoch nur in Abständen u_r in Verbindung mit Querkonstruktionen, die stets als Balken auf zwei Stützen angesehen werden, so wird die vorgelegte Belastung an den Querträgern durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten $\dots F_{r-1}, F_r \dots$

ersetzt (Abb. 45). Die Querkraft ist zwischen zwei Querträgern konstant, das Moment an deren Anschlußstellen ebenso groß wie bei unmittelbarer Belastung und im Bereiche von u_r linear. Demnach werden die Momente unter Einschaltung der Querschnitte $(r-1), r$ nach (86) berechnet und die Querkräfte Q_r eines Feldes rückwärts aus

$$Q_r = \frac{M_r - M_{r-1}}{u_r} \quad (89)$$

bestimmt (Rechenvorschrift S. 44).

Bei einer stetigen Belastung $p(x)$ des Stabzuges werden die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht eines infinitesimalen Abschnitts angeschrieben. Man unterscheidet dabei gekrümmte Stäbe (ds)

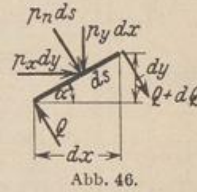


Abb. 46.

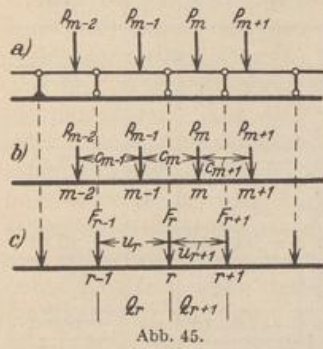


Abb. 45.

(Abb. 46) und gerade Stäbe (dx) mit waagerechter Achse und vernachlässigt kleine Größen zweiter Ordnung.

$$\left. \begin{aligned} dQ &= -p_n(s) ds = -[p_x(s) \sin^2 \alpha + p_y(s) \cos^2 \alpha] ds; & \frac{d^2 M}{ds^2} &= -p_n(s), \\ dQ &= -p(x) dx; & \frac{dQ}{dx} &= \frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Die zweimalige Integration der Belastungsfunktion p liefert daher die Schnittkräfte Q und M , sobald die Integrationskonstanten durch die statisch bestimmte Stützung des Stabzuges bekannt sind.

Rechenvorschrift.

a) Unmittelbare Belastung (Abb. 47a):

Stützkraft C aus Momentengleichung für den Schleppträger um den Gelenkpunkt:

$$C \cdot 8,0 = P_9 \cdot 0,5 + P_{10} \cdot 3,5 + P_{11} \cdot 5,0, \quad C = 22,5 \text{ t.}$$

Stützkraft B aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt a , Stützkraft A aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt b .

m	P_m	a_m	a'_m	$P_m a_m$	$P_m a'_m$	c_m	Q_m [t]	$Q_m c_m$	M_m [mt]
a	(- 41,875)	0,0	+ 16,0	-	(- 670)	-	-	-	0,0
1	+ 18,0	+ 4,0	+ 12,0	+ 72	+ 216	4,0	+ 41,875	+ 167,500	+ 167,500
2	+ 18,0	+ 5,5	+ 10,5	+ 99	+ 189	1,5	+ 23,875	+ 35,813	+ 203,313
3	+ 18,0	+ 7,0	+ 9,0	+ 126	+ 162	1,5	+ 5,875	+ 8,812	+ 212,125
4	+ 18,0	+ 8,5	+ 7,5	+ 153	+ 135	1,5	- 12,125	- 18,188	+ 193,937
5	+ 18,0	+ 10,0	+ 6,0	+ 180	+ 108	1,5	- 30,125	- 45,187	+ 148,750
6	+ 20,0	+ 13,5	+ 2,5	+ 270	+ 50	3,5	- 48,125	- 168,438	- 19,688
7	+ 20,0	+ 15,0	+ 1,0	+ 300	+ 20	1,5	- 68,125	- 102,187	- 121,875
b	(- 145,625)	+ 16,0	\pm 0,0	(- 2330)	-	1,0	- 88,125	- 88,125	- 210,000
8	+ 20,0	+ 19,0	- 3,0	+ 380	- 60	3,0	+ 57,500	+ 172,500	- 37,500
d	-	+ 20,0	- 4,0	-	-	1,0	+ 37,500	+ 37,500	0,000
9	+ 20,0	+ 20,5	- 4,5	+ 410	- 90	0,5	+ 37,500	+ 18,750	+ 18,750
10	+ 20,0	+ 23,5	- 7,5	+ 470	- 150	3,0	+ 17,500	+ 52,500	+ 71,250
11	+ 20,0	+ 25,0	- 9,0	+ 500	- 180	1,5	- 2,500	- 3,750	+ 67,500
c	- 22,5	+ 28,0	- 12,0	- 630	+ 270	3,0	- 22,500	- 67,500	+ 0,000
	$\Sigma = 0$			$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0$				

In der Regel rechnet man mit abgerundeten Werten für Stütz- und Querkräfte und gleicht die Momente nachträglich aus.

b) Mittelbare Belastung (Abb. 47 b).
Stützkkräfte wie bei unmittelbarer Belastung:

r	m	P_m	c_m	Q_m	$Q_m c_m$	M_r [mt]	$M_r - M_{r-1}$	u_r	Q_r [t]
	a	- 41,875	-	-	-	0,00			
I		+ 18,000	4,0	+ 41,875	+ 167,50	+ 167,50	+ 167,50	4,0	+ 41,875
	2	+ 18,000	1,5	+ 23,875	+ 35,81	+ 203,31			
	3	+ 18,000	1,5	+ 5,875	+ 8,81	+ 212,12			
II		-	1,0	- 12,125	- 12,12	+ 200,00	+ 32,50	4,0	+ 8,13
	4	+ 18,000	0,5	- 12,125	- 6,06	+ 193,94			
	5	+ 18,000	1,5	- 30,125	- 45,19	+ 148,75			
III		-	2,0	- 48,125	- 96,25	+ 52,50	- 147,50	4,0	- 36,87
	6	+ 20,000	1,5	- 48,125	- 72,19	- 19,69			
	7	+ 20,000	1,5	- 68,125	- 102,19	- 121,88			
IV	b	- 145,625	1,0	- 88,125	- 88,12	- 210,00	- 262,50	4,0	- 65,62
	8	+ 20,000	3,0	+ 57,500	+ 172,50	- 37,50			
	9	+ 20,000	0,5	+ 37,500	+ 18,75	+ 18,75			
V	d	-	1,0	+ 37,500	+ 37,50	0,00	+ 210,00	4,0	+ 52,50
	10	+ 20,000	3,0	+ 17,500	+ 52,50	+ 71,25			
VI		-	0,5	- 2,500	- 1,25	+ 70,00	+ 70,00	4,0	+ 17,50
	11	+ 20,000	1,0	- 2,500	- 2,50	+ 67,50			
	12	+ 20,000	1,0	- 2,500	- 2,50	+ 67,50			
VII	c	- 22,500	3,0	- 22,500	- 67,50	0,00	- 70,00	4,0	- 17,50

In der Regel wird für die Rechnung eine Differenzenbeziehung an Stelle der Differentialbeziehung (90) verwendet, der Bereich der Belastungsfunktion dabei in eine Anzahl gleich großer Intervalle unterteilt und diese selbst in jeder Stufe durch eine Gerade (1) oder einen Parabelabschnitt (2) ersetzt.

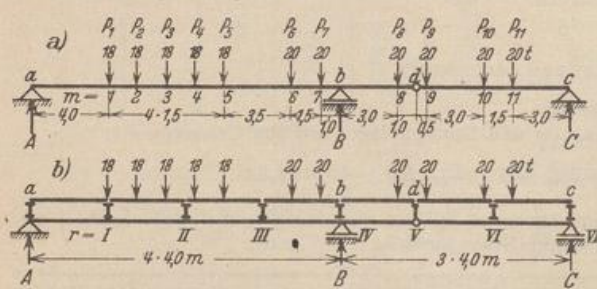


Abb. 47.

Die stetige Belastung $p(x)$ wird in eine äquivalente Gruppe von Einzellasten P_m zerlegt, deren

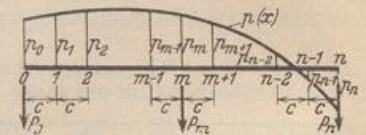


Abb. 48.

Moment in den Teilpunkten $m, (m+1)$ mit denjenigen von $p(x)$ übereinstimmt (Abb. 48). Die Querkräfte Q_m und die Biegemomente M_m werden dann nach den Angaben unter (86), (87) berechnet. Die Schaulinie des Biegemomentes M verläuft durch die Endpunkte der Ordinaten M_m . Sie ist daher bei geeigneter Teilung genügend genau bestimmt.

1. Die Funktion $p(x)$ wird durch einen Geradenzug ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{6}(2p_0 + p_1), \dots, P_m = \frac{c}{6}(p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}), \dots, P_n = \frac{c}{6}(p_{n-1} + 2p_n). \quad (91)$$

2. Die Funktion $p(x)$ wird durch Parabelabschnitte ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{2} \frac{7p_0 + 6p_1 - p_2}{12}, \dots, P_m = c \frac{p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}}{12}, \dots, P_n = \frac{c}{2} \frac{7p_n + 6p_{n-1} - p_{n-2}}{12}. \quad (92)$$

Graphische Methoden zur Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte. Um die Stützkkräfte einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung zeichnerisch anzugeben, werden diese zunächst für die resultierende Kraft aus der Belastung jeder einzelnen Scheibe bestimmt und dann durch Superposition zusammengefaßt. Dieses Ergebnis wird unmittelbar erhalten, wenn die Resultierende der Lasten

jeder Scheibe durch zwei äquivalente Kräfte ersetzt wird, welche durch die benachbarten Zwischengelenke verlaufen.

Die bekannten Stütz- und Gelenkkräfte einer Stabverbindung werden, unter Umständen nach Ergänzung durch zwei gleichgroße, einander entgegengesetzt gerichtete Hilfskräfte H_0, H'_0 , der Reihe nach mit den am Stabzug angreifenden Lasten $P, p dx$ zusammengesetzt. Auf diese Weise entsteht die Mittelkraftlinie aller äußeren Kräfte. Sie liefert, abgesehen von einer Kraft H'_0 , die Resultierende R_k aller links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt k vorhandenen äußeren Kräfte nach Lage und Richtung und in Verbindung mit dem zugeordneten Krafteck auch deren Größe. Damit sind die Schnittkräfte M_k, N_k, Q_k oder die Kernmomente $M_{i,k}, M_{a',k}$ für den nach Lage und Abmessungen vorgeschriebenen Querschnitt bekannt (Beispiel Abb. 50).

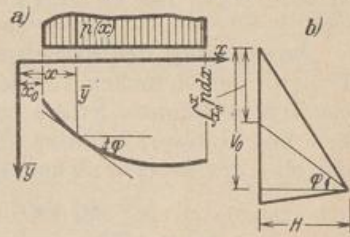


Abb. 49.

Die Kräftegruppe (H_0, H'_0) ist bei Balkenträgern mit senkrechter Belastung nötig. Ihre Richtung wird waagrecht angenommen. H'_0 ist dann gleich groß und entgegengesetzt gerichtet zur Komponente H_k der Resultierenden R_k und wird in der Regel mit H bezeichnet. Die Biegemomente sind $M_k = H \bar{y}_k$. Bei stetiger Belastung entsteht auch hier eine Differentialbeziehung. Nach Abb. 49 ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{V_0 - \int p dx}{H} = \frac{Q}{H}; \quad \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = -\frac{p(x)}{H}. \quad (93)$$

Der zweite Differentialquotient von \bar{y} kann durch die Krümmung ϱ ersetzt werden.

$$p(x) = \frac{H}{\varrho \cos^3 \varphi}; \quad \text{für } \varphi = 0 \text{ ist } p(x) = p_0, \quad \varrho = \varrho_0, \text{ also } H = p_0 \varrho_0. \quad (94)$$

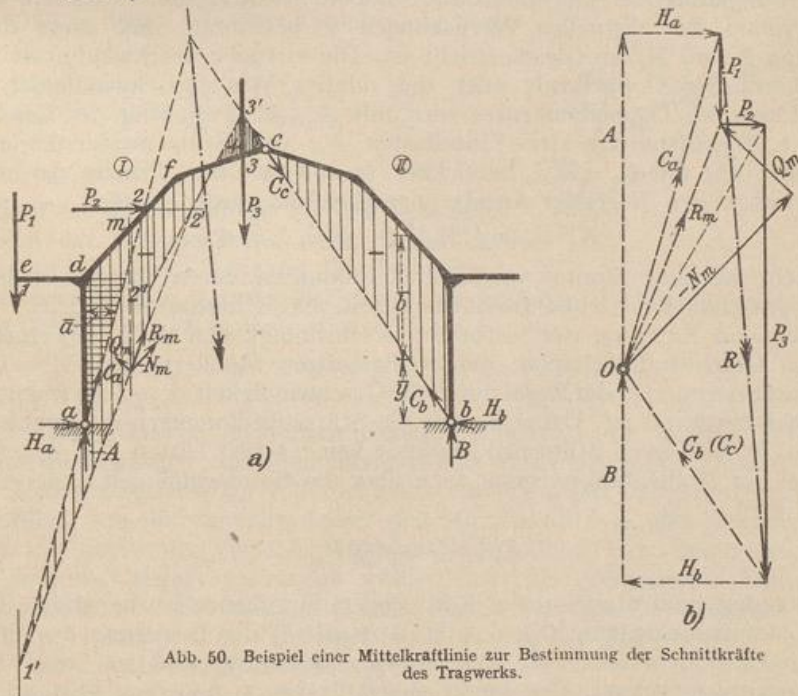


Abb. 50. Beispiel einer Mittelkraftlinie zur Bestimmung der Schnittkräfte des Tragwerks.

Bestimmung der Resultierenden nach Lage und Größe. $R \equiv (P_1, P_2, P_3)$. — Ermittlung der Stützenwiderstände C_a, C_b aus der Bedingung $C_b \uparrow C_c = 0$ an dem unbelasteten Stabe II,

so daß beide Kräfte in die Richtung $b-c$ fallen. — Aufzeichnung der Mittelkraftlinie aus $(C_a, P_1, P_2, P_3) \equiv C_e$. Die waagerechte Komponente von R_k im Bereiche a bis 2 : $H_m = H_a$, im Bereiche von 2 über c bis b : $H_k = H_a + P_2 = -H_b$. Im Bereiche von a bis d ist das Moment $M_n = A \cdot a_n$, im Bereiche von d bis 2 ist $M_m = H_a \bar{b}_m$, im Bereiche von 2 über c bis b ist $M_k = H_b \bar{b}_k$. Das Vorzeichen für \bar{b} ergibt sich aus der Abb. 50, es ist so gewählt, daß positive Momente auf der Stabinnenseite Zug erzeugen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten setzt zur Berechnung statisch bestimmter Stütz- und Schnittkräfte einfache oder mehrfache Beweglichkeit des Stabwerks voraus. Da dieses jedoch als starr vorgeschrieben ist, werden einzelne der inneren Schnittkräfte oder Stützkräfte

$$N_r^{(i)} = \int \sigma dF, \quad M_r^{(i)} = \int \sigma z dF, \quad Q_r^{(i)} = \int \tau dF, \quad C_e \quad (95)$$

als äußere Doppelkräfte einer Stabkette verwendet, deren Elemente durch Gelenke oder Führungen verbunden sind. Die mechanisch äquivalenten Verbindungen sind in Abb. 51 wiedergegeben. Um eine Stützkraft C_e oder eine Schnittkraft K_r der Gruppe (95) unabhängig von allen übrigen zu berechnen, wird diese allein

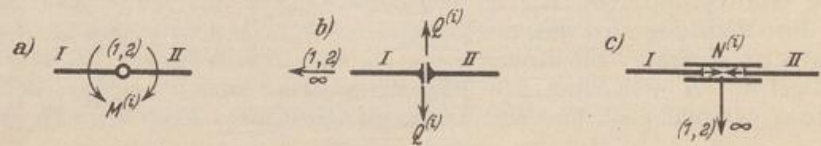


Abb. 51.

zur äußeren Doppelkraft einer Stabkette. Dabei wird die Stützenbedingung (e) oder die zugeordnete materielle Verbindung der benachbarten beiden Querschnitte (r) ausgeschaltet, so daß die Stabkette einen Freiheitsgrad erhält und daher zwangsläufig ist. Die unbekannte äußere Kraft K_r der Stabkette wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen so bestimmt, daß diese durch die Belastung \mathfrak{P} und K_r im Gleichgewicht ist. Die virtuelle Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Doppelkraft oder die relative Winkelgeschwindigkeit der Angriffseraden des Doppelmomentes wird mit Δ_r , die Projektion der Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Einzellasten P_m und Stützenwiderstände C_e auf deren Richtung mit δ_m und δ_e bezeichnet, so daß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgender Ansatz angeschrieben werden kann:

$$K_r^{(i)} \Delta_r + \sum P_m \delta_m + \sum C_e \delta_e = 0. \quad (96)$$

Er besteht aus einer Summe von inneren Produkten, deren Vorzeichen durch den Winkel zwischen Kraft- und Geschwindigkeitsvektor bestimmt wird.

Größe und Richtung der virtuellen Geschwindigkeiten Δ_r , δ_m , δ_e ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsplan der zwangsläufigen Stabkette mit $K_r^{(i)} = 0$, deren Momentanbewegung in der Regel durch die Geschwindigkeit $\Delta_r = 1$ als frei wählbaren Parameter bestimmt ist. Dabei werden die Stützenbedingungen der Stabkette eingehalten, so daß deren Stützenwiderstände keine Arbeit leisten ($\sum C_e \delta_e = 0$), wenn nicht bei der Momentanbewegung auch über die Geschwindigkeit anderer Punkte verfügt wird.

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m. \quad (97)$$

Die Bewegung eines Stabes s_k der Kette gegen die ruhende Ebene ist eine Drehung um ein Momentanzentrum O_k , den Hauptpol (k) der Bewegung des Stabes s_k . Die Winkelgeschwindigkeit ω_k der Momentanbewegung wird im Sinne des Uhrzeigers positiv gerechnet. Der Punkt m des Stabes s_k mit dem Abstand r_m vom Momentanzentrum (Abb. 52) erhält die senkrecht zum Fahrstrahl r_m gerichtete Geschwindigkeit $\omega_k r_m$, so daß die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der in m an-

greifenden äußeren Kraft P_m folgenden Betrag erhält:

$$P_m \delta_m = P_m \omega_k r_m \cos \varphi_m = P_m \omega_k \varrho_m = \Theta_m \omega_k. \quad (98)$$

Hierbei ist $\Theta_m = P_m \varrho_m$ das Moment der Kraft P_m bezogen auf den Hauptpol (h), so daß die Arbeit der äußeren Kräfte als Produkt des Momentes Θ_m der Kraft P_m und der Winkelgeschwindigkeit ω_k der zugeordneten Scheibe gebildet wird. Daher wird die Stütz- oder Schnittkraft $K_r^{(k)}$ eines Stabwerks mit n Scheiben oder Stäben nach (98) berechnet.

$$K_r^{(k)} = -\frac{1}{A_r} \sum_k [\omega_k \sum_u \Theta_u], \quad k = 1, \dots, n. \quad (99)$$

Die Bewegung einer Scheibe h relativ zu einer anderen Scheibe k ist ebenfalls eine Drehung um ein reelles oder imaginäres Gelenk, das Momentanzentrum der Relativbewegung, das hier als Nebenpol (h, k) bezeichnet wird. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Scheiben ist $\omega_{kh} = \omega_k - \omega_h$. Die Haupt- und Nebenpole der zwangsläufigen Stabkette bilden die Polfigur. Sie bestimmt in Verbindung mit einem der Größe nach frei wählbaren Parameter, der Winkelgeschwindigkeit ω_k einer Scheibe oder der Relativgeschwindigkeit ω_{kh} , die Winkelgeschwindigkeit aller übrigen Scheiben und damit die Geschwindigkeit aller Punkte der Stabkette. Daher ist mit der Polfigur auch der Geschwindigkeitsplan der Stabkette gefunden. Zu ihrer Aufzeichnung werden die drei folgenden Sätze aus der Kinematik der ebenen Bewegung verwendet.

1. Der Pol der Relativbewegung (a, b) zweier Scheiben a und b gehört beiden Scheiben an. Seine Geschwindigkeit ist eindeutig, so daß die Hauptpole (a) und (b) mit (a, b) auf einer Geraden liegen. Nach Abb. (53) ist $r'_{ab} \omega_a = r'_{ab} \omega_b$.

2. Die Nebenpole (a, b), (b, c), (a, c) dreier Scheiben mit den Hauptpolen (a) $\equiv A$, (b) $\equiv B$, (c) $\equiv C$ liegen auf einer Geraden, da nach

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{CJ}} = \frac{r'_{ab}}{\overline{CK}} = \frac{r'_{ab} r''_{bc}}{r'_{ab} r'_{bc}} = \frac{\omega_b \omega_c}{\omega_a \omega_b} = \frac{\omega_c}{\omega_a},$$

$$\overline{AJ} \omega_a = \overline{CJ} \omega_c \quad \text{also} \quad J \equiv (a, c).$$

Die Polfigur ist die Grundlage für den Geschwindigkeitsplan der Scheibenkette, wenn die um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedrehten Geschwindigkeiten aufgetragen werden. Aus der Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten zweier beliebiger Punkte m und n einer starren Scheibe

$$v_m : v_n = r_m \omega : r_n \omega = r_m : r_n \quad (100)$$

folgt ein dritter Satz:

3. Die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten einer starren Scheibe F bilden eine ähnliche und zum Momentanzentrum ähnlich liegende Figur F' .

Der Geschwindigkeitsplan soll die Stützenbedingungen der Stabkette in der Regel erfüllen, um die virtuelle Arbeit der Stützenkräfte in (96) auszuschließen. Ist jedoch in einem ersten Verschiebungsplan $\sum C_e \delta_e \neq 0$, so kann damit ein zweiter Verschiebungsplan derart verbunden werden, daß die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der Stützpunkte aus den beiden Momentanbewegungen Null ist. Die zweite von ihnen ist in der Regel eine Drehung der Stabkette ohne Relativbewegung der einzelnen Scheiben ($\omega_{ik} = 0$).

Der Geschwindigkeitsplan einer Stabkette kann auch ohne Polfigur entwickelt werden. Dabei wird stets die Geschwindigkeit des Punktes c eines Stabzweiecks (l_1, l_2) aus den bekannten Geschwindigkeiten der Endpunkte a und b bestimmt.

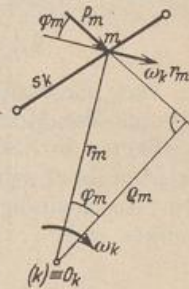


Abb. 52.

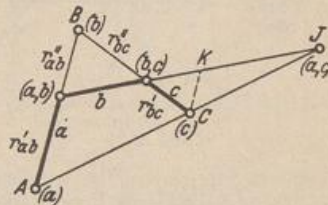


Abb. 53.

In Abb. 54 sind die gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{a'a'}$, $\vec{b'b'}$ gegeben und die gedrehte Geschwindigkeit $\vec{c'c'}$, die Hauptpole (1), (2) und die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 gesucht.

Punkt c' wird nach dem dritten Satze mit $a'c' = l_1' \parallel l_1$, $b'c' = l_2' \parallel l_2$ bestimmt. Die Hauptpole (1) und (2) sind die Schnittpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Scheiben l_1 und l_2 . Da sich diese nicht immer aufzeichnen lassen, werden die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 aus dem Geschwindigkeitsplan abgeleitet.

$$\omega_1 = \frac{\vec{a'a'}}{r_a} = \frac{v'_a}{s'_1} = \frac{v'_c}{s'_2} = \frac{v'_a + v'_c}{s'_1 + s'_2} = \frac{l_1 - l'_1}{l_1}$$

Mit den gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{m'm'}$ der Angriffspunkte m der äußeren Kräfte kann der Ansatz (82) in der folgenden Form verwendet werden (Abb. 55):

$$\delta A = \sum P_m v_m \cos(P_m, v_m) = \sum P_m h_m = \sum [P_m \vec{m'm'}]. \quad (101)$$

Das Ergebnis (101) erscheint dann als Summe der Momente der äußeren Kräfte der Stabkette in bezug auf die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Die Geschwindigkeiten v_a, v_b, \dots der Gelenkpunkte a, b, \dots können auch von einem Ur-

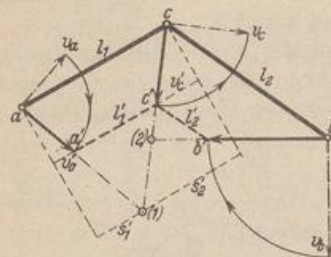


Abb. 54.

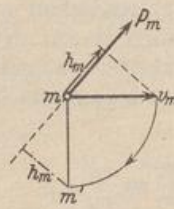


Abb. 55.

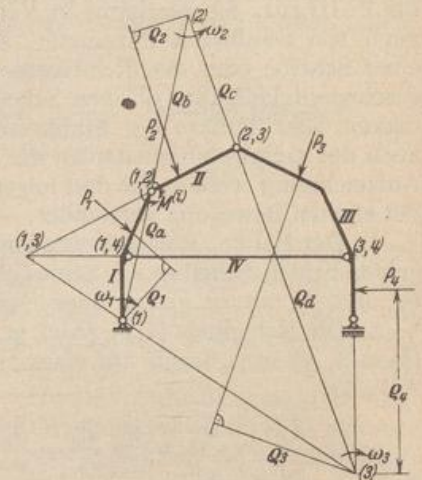


Abb. 56.

sprung O aufgetragen und der Reihe nach ebenso wie bei einem Verschiebungsplan nach Williot für $\Delta l = 0$ aufgezeichnet werden.

Dreigelenkbogen mit Zugband unter ruhender Belastung. Bestimmung des Biegemomentes aus einem Polplan. (Abb. 56).

$$\omega_1 \varrho_a = \omega_2 \varrho_b, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{\varrho_a}{\varrho_b},$$

$$\omega_2 \varrho_c = \omega_3 \varrho_d, \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{\varrho_c}{\varrho_d} = \omega_1 \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \cdot \frac{\varrho_c}{\varrho_d},$$

$$P_1 \varrho_1 \omega_1 + P_2 \varrho_2 \omega_2 - (P_3 \varrho_3 + P_4 \varrho_4) \omega_3 - M^{(1)} (\omega_1 + \omega_2) = 0,$$

$$P_1 \varrho_1 \omega_1 + P_2 \varrho_2 \cdot \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \omega_1 - (P_3 \varrho_3 + P_4 \varrho_4) \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \cdot \frac{\varrho_c}{\varrho_d} \omega_1 - M^{(1)} \left(1 + \frac{\varrho_a}{\varrho_b}\right) \omega_1 = 0.$$

Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte. Die Grenzwerte von Stütz- oder Schnittkräften aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter Einzellasten P_m oder einer stetigen gleichgerichteten Flächenbelastung p werden mit Einflußlinien berechnet (77). Diese dienen zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellung und unter Umständen nach (78) auch zur Berechnung der Grenzwerte, die jedoch oft schneller und sicherer für eine in der ungünstigsten Laststellung vorhandene ruhende Kräftegruppe angegeben werden.

Ist die Einflußlinie oder einer ihrer Teile ein Dreieck, so ist die ungünstigste Stellung eines Lastzuges in dem Bereich $l = x + x'$ bei Linksfahrt erreicht, wenn die Ungleichungen

$$\frac{x}{l} < \frac{\sum_1^r P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_n}, \quad \frac{x}{l} > \frac{\sum_1^{r-1} P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_{r-1}}{\mathfrak{P}_n} \quad (102)$$

erfüllt sind und die schwersten Lasten in der Nähe der Spitze des Dreiecks liegen. Dabei ist P_1 die erste, P_n die letzte Last im Belastungsbereich l , während P_r über der Spitze steht. Die Nachprüfung der Ungleichungen setzt eine Annahme über die Stellung des Zuges voraus, mit der P_1, P_r, P_n und damit auch die Summen $\mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_n$ der Ungleichungen (102) gegeben sind.

Die Einflußlinien W_h werden dadurch gewonnen, daß die Einflußgröße W_{hm} als Funktion der Abszisse des Angriffspunktes m der wandernden Last $P=1t$ analytisch ermittelt und von einer Nulllinie aus im Lastpunkt m als Ordinate W_{hm} aufgezeichnet wird. Die Richtung ist durch das Vorzeichen der beiden Halbebenen bestimmt.

Jede statisch bestimmte Stütz- oder Schnittkraft kann mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (97) als äußere Kraft einer zwangsläufigen Stabverbindung berechnet werden. Um Einflußlinien zu zeichnen, wird

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m = -\frac{1_m \delta_m}{\Delta_r} \quad (103)$$

mit $P_m = 1t$, der beweglichen, am Lastgurt angreifenden Einzellast von gleichbleibender senkrechter, waagerechter oder schräger Richtung. Daher sind die Wege δ_m die Projektionen der wirklichen Verschiebungen ($\delta_{xm} \hat{+} \delta_{ym}$) auf die Krafrichtung. Sie sind in einem Verschiebungsplan des Lastgurtes enthalten, der aus der Momentanbewegung der Stabkette ($K_r^{(i)} = 0$) abgeleitet wird. Für die äußeren Kräfte in der Form von Momenten oder Kräftepaaren ist δ_m die Verdrehung desjenigen Elementes der Stabkette, an welchem diese angreifen. Die Geschwindigkeit Δ_r kann als der frei verfügbare Parameter der Bewegung angesehen werden, so daß die Geschwindigkeiten δ_m der Punkte m des Lastgurtes Funktionen von Δ_r sind und in der Richtung mit derjenigen der wandernden Last übereinstimmen. Sie werden also mit senkrechtem, waagerechtem oder schräg gerichtetem Vektor aufgetragen. Danach ist der Geschwindigkeitsplan der Stabkette bei geeignetem Maßstab das Einflußfeld der Schnittkraft, aus dem deren Einflußlinie für beliebig gerichtete Lastgruppen abgeleitet werden.

Während der Momentanbewegung der Stabkette beschreibt jedes Element s_k eine Drehung um den zugeordneten Hauptpol (h), so daß sich die Geschwindigkeiten der Punkte des Lastgurtes linear mit der Entfernung vom Hauptpol ändern. Daher ist jedem Element der Stabkette eine Gerade der Einflußlinie zugeordnet. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Hauptpol liefert im Schnitt mit dem Lastgurt einen durch $\delta_m = 0$ ausgezeichneten Punkt. Er bildet die dem Element zugeordnete Lastscheide. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Nebenpol (h, k) trifft denjenigen Punkt auf dem Lastgurt, dessen Verschiebung δ_m als Punkt der Scheibe h ebenso groß ist wie als Punkt der Scheibe k . Jeder Nebenpol bestimmt damit eine

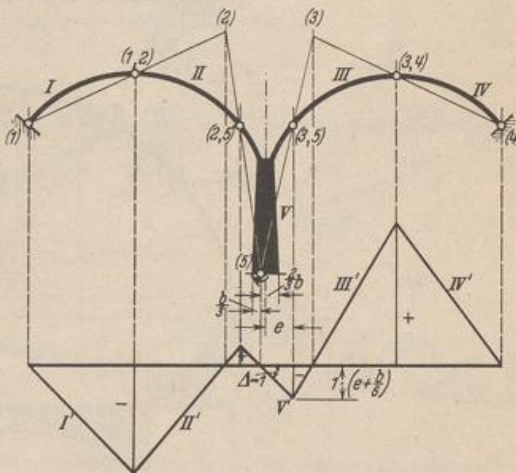


Abb. 57. Einflußlinie des Kernmomentes in der Sohle eines Gewölbepfeilers.

Ecke der Einflußlinie. Die Polfigur der Stabkette liefert also für jede Krafrichtung die Form der Einflußlinie. Der frei verfügbare Parameter Δ_r wird so gewählt, daß

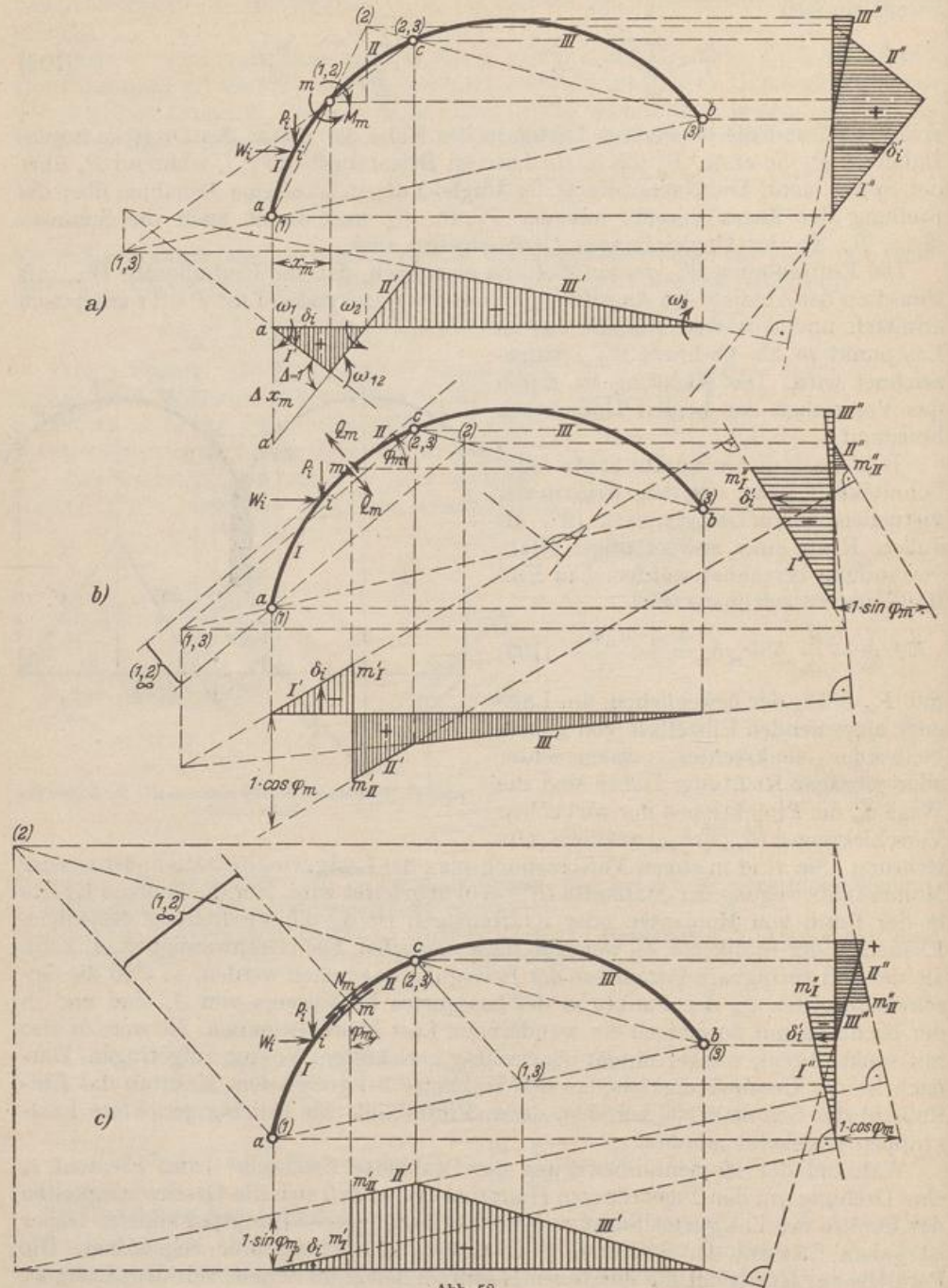


Abb. 58.

$K_r^{(i)} \Delta_r = -K_r^{(i)} \cdot 1_r$, also $|\Delta_r| = 1$ und daher bei starrer Stützung ($\delta_e = 0$)

$$1_r \cdot K_r^{(i)} = \sum P_m \delta_m. \quad (104)$$

Damit ist auch der Maßstab der Einflußlinie bestimmt (Abb. 57).

Die Ordinaten δ_m der Einflußlinie sind durch die Ableitung aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ebenso wie Δ_r Geschwindigkeiten. Daher ist auch das Vorzeichen der Einflußlinie durch das Vorzeichen der virtuellen Arbeiten $P_m \delta_m, M_m \omega_k$ bestimmt.

Einflußlinien der Schnittkräfte eines Dreigelenkbogens (Abb. 58):

a) Einflußlinie für das Biegemoment im Querschnitt m bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58a).

Kinematische Kette für $M_m = 0$: Stäbe I, II, III . Hauptpole: $(1) \equiv a, (3) \equiv b$. Nebenpole $(1, 2), (2, 3)$. Hieraus ergeben sich (2) mit $(1), (1, 2)$ und $(3), (2, 3)$, ferner der Nebenpol $(1, 3)$ mit $(1), (3)$ und $(1, 2), (2, 3)$. Die Lastscheiden liegen auf Parallelen zur Belastungsrichtung durch die Hauptpole $(1), (2), (3)$, die Eckpunkte der Einflußlinie auf Parallelen durch die Nebenpole $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$. Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = 0 = -M_m \omega_1 - M_m \omega_2 + P_i \delta_i; \quad M_m \cdot (\omega_1 + \omega_2) = M_m \Delta = P_i \delta_i; \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

$\Delta = 1$ bedeutet bei Gleichsetzung von Sehne und Bogen $\bar{a} \bar{a}' = x_m$. Die Einheit kann auch aus der Relativbewegung des Stabes II gegen I bestimmt werden:

$$-M \omega_{21} + P_i \delta_i = 0; \quad \omega_{21} = \Delta = 1, \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

Die Grenzlinien der waagerechten Einflußlinie sind zu den zugeordneten Geraden der senkrechten Einflußlinie winkelrecht. Daher gilt ebenfalls

$$+M \omega_{21} = W_i \delta_i.$$

b) Einflußlinie für die Querkraft Q_m bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58b).

Kinematische Kette für $Q = 0$. Ermittlung der Polfigur. Die Hauptpole $(1), (3)$ und der Nebenpol $(2, 3)$ sind gegeben. Der Nebenpol $(1, 2)$ liegt, da II sich gegen I parallel verschiebt, auf der Tangente des Bogens im Unendlichen. Der Hauptpol (2) wird durch $I, (1, 2)$ und $3, (2, 3)$ gefunden. Damit sind auch die Lastscheiden und Eckpunkte der senkrechten und waagerechten Einflußlinie gegeben. Zur Bestimmung der Einheit der Einflußlinie wird die Relativbewegung der Stäbe I und II betrachtet. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta A = 0$ ergibt bei der senkrechten Einzellast

$$-Q_m \frac{m'_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } Q_m = P_i \delta_i.$$

Um daher den Verschiebungsplan der Kette als Einflußlinie zu verwenden, wird der Parameter $m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m$ gewählt. In diesem Falle ist die gegenseitige Verschiebung Δ der Querschnitte m_I und m_{II} in Richtung von Q_m gleich der Einheit. Für eine waagerechte Einzellast W_i ist

$$-Q_m \frac{m''_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } Q_m = W_i \delta_i.$$

c) Die Ansätze für die Einflußlinien der Längskraft lauten (Abb. 58c):

$$-N_m \frac{m'_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } N_m = P_i \delta_i;$$

$$-N_m \frac{m''_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } N_m = W_i \delta'_i.$$

Die Abb. 59 zeigt die Einflußlinie der Querkraft Q_m eines unterspannten Balkenträgers. Sie ist aus dem Pol- und Verschiebungsplan der kinematischen Kette $Q_m = 0$ mit der Annahme $v_b = 0$ entwickelt worden. Damit ergeben sich die Hauptpole $(2)', (3)', (4)'$ und die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit $b' b''$ des Stützpunktes b . Um hier die Stützenbedingung nachträglich zu erfüllen, wird nach S. 47 ein zweiter Verschiebungsplan gezeichnet, der durch den Weg $\overrightarrow{b' b''}$ und $\omega_{12} = 0$ bestimmt ist. Damit wird $a' b''$ zur Achse der Einflußlinie. $m'_I m''_{II} = \Delta = 1$ ist Einheit der Einflußlinie.

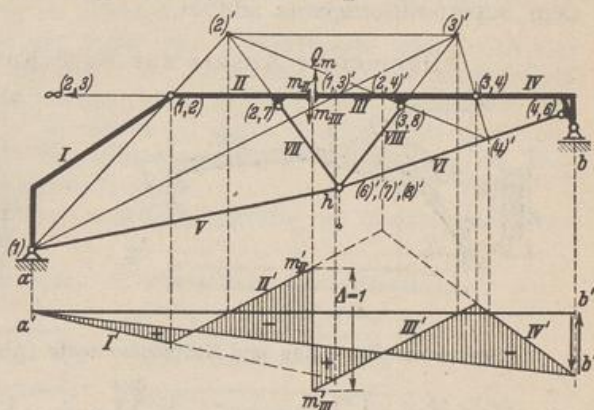


Abb. 59. Ableitung der Einflußlinie der Querkraft Q_m einer mehrgliedrigen Scheibenverbindung.

Land, R.: Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. Bd. 40 (1888) S. 11 u. 162. — Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 1. Leipzig 1905. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Saliger, R.: Praktische Statik 2. Aufl. Wien 1927. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Beyer, K.: Baustatik. Taschenb. f. Bauing. Bd. I S. 270. Berlin 1928. — Hertwig, A.: Statik der Baukonstruktionen. Handb. physik. u. techn. Mechan. Bd. 4. Leipzig 1929. — Kaufmann, W.: Statik der Tragwerke. Handbibl. f. Bauing. 2. Aufl. Berlin 1930.

14. Der einfache Balkenträger.

Ein Stab mit gerader, gebrochener oder gekrümmter Achse wird als Balkenträger bezeichnet, wenn eine senkrechte Belastung nur senkrechte Stützkkräfte hervorruft. Er wird an den Enden aufgelagert oder als Kragträger verwendet.

Ruhende Belastung. Eine allgemeine Belastung wird oft mit Vorteil aufgeteilt. Stütz- und Schnittkräfte werden getrennt für jeden Anteil angegeben und nach dem Superpositionsgesetz addiert.

Allgemeiner Ansatz zur Berechnung der Stützkkräfte.

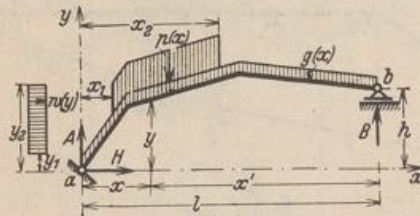


Abb. 60.

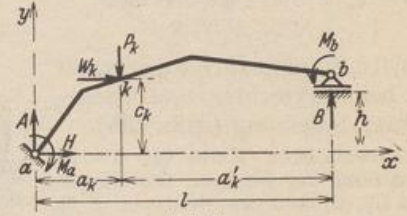


Abb. 61.

a) Senkrechte Belastung und Stützenmomente (Abb. 60 und 61):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_b - M_a}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x' dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a'_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x' dx, \\ B_1 &= \frac{M_a - M_b}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x dx. \end{aligned} \right\} H = 0 \quad (105)$$

b) Waagerechte Belastung (Abb. 60 und 61):

$$B_2 = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} W_k c_k + \frac{1}{l} \int_{y_1}^{y_2} w(y) y dy = -A_2, \quad H = - \left(\sum_{k=1}^{k=n} W_k + \int_{y_1}^{y_2} w(y) dy \right).$$

Allgemeiner Ansatz für die Berechnung der Schnittkräfte (Abb. 62).

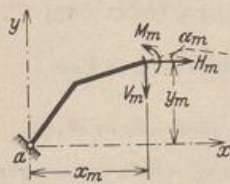


Abb. 62.

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + A_2, & B &= B_1 + B_2, \\ V_m &= A - \int_0^{x_m} g(x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k - \int_{x_1}^{x_m} p(x) dx; \\ H_m &= - \left(H + \sum_{k=1}^{k=s} W_k + \int_{y_1}^{y_m} w(y) dy \right); \\ Q_m &= H_m \sin \alpha_m + V_m \cos \alpha_m; \\ N_m &= H_m \cos \alpha_m - V_m \sin \alpha_m; \\ M_m &= A x_m - \int_0^{x_m} g(x) (x_m - x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k (x_m - a_k) - \int_{x_1}^{x_m} p(x) (x_m - x) dx \\ &\quad - H y_m - \sum_{k=1}^{k=s} W_k (y_m - c_k) - \int_{y_1}^{y_m} w(y) (y_m - y) dy + M_a. \end{aligned} \right\} (106)$$

Der Ansatz besitzt in dieser Form nur grundsätzliche Bedeutung. Die Schnittkräfte werden besser nach den Angaben auf S. 42 berechnet. Hierbei ergeben sich zunächst die Querkräfte Q_m und bei geneigter oder gekrümmter Stabachse deren Komponenten V_m und H_m . Damit können die Biegemomente M_m nach (86) oder (88) gebildet und unter Umständen durch die Momente M_r für die Anschlußquerschnitte der Zwischenkonstruktion nach (89) ergänzt werden. Sind die Streckenlasten $g(x)$, $p(x)$, $w(y)$ nicht einfach zu integrierende Funktionen, so wird die stetige Belastung nach S. 44 durch eine annähernd äquivalente Gruppe von Einzellasten ersetzt. Querkraft und Moment sind bei gerader Stabachse in den Abschnitten zwischen den Einzellasten nach (86) gerade Linien oder Parabelabschnitte. Der Größtwert des Momentes entsteht nach S. 42 in demjenigen Querschnitt, in welchem die Querkraft Null ist oder ihr Vorzeichen wechselt. Die Tabellen 6 und 7 geben die Schnittkräfte für zahlreiche Belastungsannahmen an.

Die Stütz- und Schnittkräfte können auch zeichnerisch mit Kraft- und Seileck bestimmt werden. Bei der Einfachheit der Aufgabe liegt jedoch kein Grund vor, die Rechnung durch die Zeichnung zu ersetzen.

Einflußlinien. Die Grenzwerte der Stütz- und Schnittkräfte setzen sich aus den Anteilen zusammen, die aus der ruhenden Belastung, also im wesentlichen durch Eigengewicht, und aus der ungünstigsten Stellung der beweglichen Belastung erhalten werden. Diese ist in der Regel durch Einflußlinien bestimmt, die nach Abschn. 13 als Funktion der Einflußgröße oder kinematisch als Verschiebungsplan des Lastgurtes entwickelt werden.

Einflußlinien der Stützenwiderstände und Schnittkräfte des einfachen Balkenträgers.

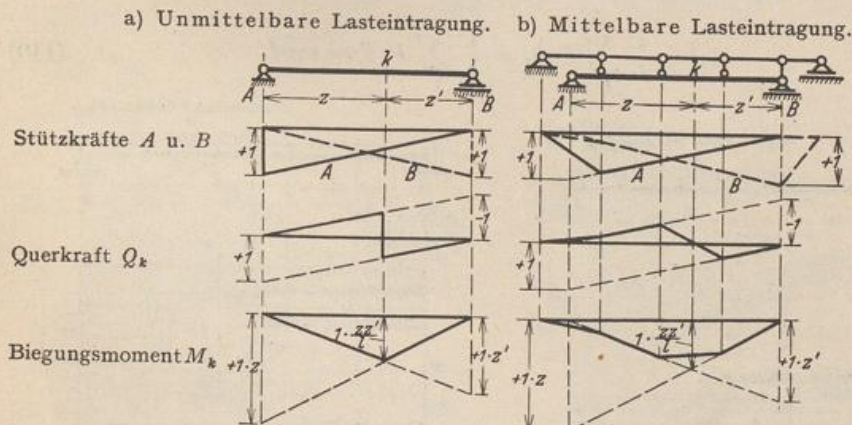


Abb. 63.

Die Grenzwerte der Querkraft. a) Gleichgroße, unmittelbare Streckenbelastung p . Durch Belastung des positiven oder negativen Bereichs der Einflußlinie wird (Abb. 64)

$$\left. \begin{aligned} \max Q_{mv} &= +p \frac{x'_m{}^2}{2l} = +\frac{pl}{2} \xi'^2, \\ \min Q_{mv} &= -p \frac{x_m^2}{2l} = -\frac{pl}{2} \xi^2. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

b) Gleichgroße mittelbare Streckenbelastung p (Abb. 65, 66).

$$\max Q_{mv} = +p \frac{x'_m e'_m}{2l}; \quad \min Q_{mv} = -p \frac{(x_m - c_m) e_m}{2l}. \quad (108)$$

Der Grenzwert der Querkraft ist nach der Einflußlinie für alle Schnitte zwischen

zwei Querträgern konstant. Lastscheide und Grenzwerte werden graphisch bestimmt.

$$\overline{m m'} = \frac{p l}{2} \frac{x'_m}{l}, \quad \overline{E_m E'_m} = \overline{m m'} \frac{e'_m}{l} = \max Q_{m p} \quad (\text{Abb. 65}).$$

Bei gleichem Abstand der Querträger nach Abb. 66 wird

$$e'_m = \frac{x'_m l}{l-c}, \quad \max Q_{m p} = + p \frac{x'_m{}^2}{2(l-c)} = \overline{m m'}, \quad \min Q_{m p} = - p \frac{(x_m - c)^2}{2(l-c)} = \overline{m m'}. \quad (109)$$

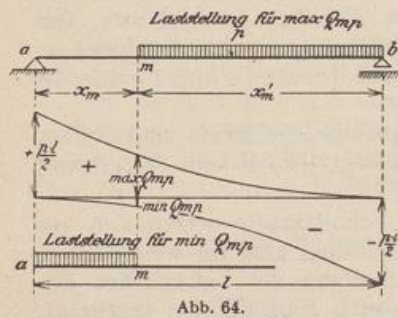


Abb. 64.

Die jedem Felde zugeordneten Grenzwerte der Querkraft sind Ordinaten einer Parabel mit dem ausgezeichneten Werte $p \frac{l-c}{2}$ für $x'_m = (l-c)$ (Abb. 66).

c) Unmittelbare Belastung durch einen Zug von Einzellasten.

Die größte Querkraft Q_m wird nach der Einflußlinie bei Grundstellung des Lastenzuges zum Querschnitt m für Linksfahrt erhalten (erste Last über dem Querschnitt m , Abb. 67b). Der negative Grenzwert ergibt sich ebenso bei Rechtsfahrt:

$$\max Q_m = A_m; \quad \min Q_m = -B_m.$$

Die Grenzwerte von $\max Q_m$ sind Ordinaten einer Schaulinie, in welcher der Stützdruck A_m für eine beliebige Stellung des Lastenzuges über dem Angriffspunkt der ersten Last P_1 aufgetragen wird (A_m -Polygon). Der Betrag

$$A_m = \frac{1}{l} \sum_1^m P_i b_i = \frac{1}{l} \sum_1^m P_i b'_i = \overline{m m'} \quad (110)$$

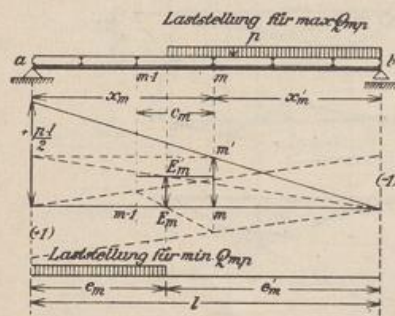


Abb. 65. Entfernung der Querträger beliebig.

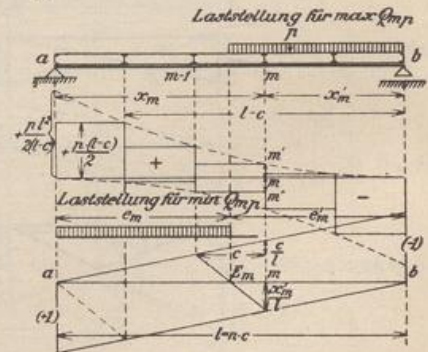


Abb. 66. Entfernung der Querträger konstant.

wird graphisch als Ordinate eines Seilecks zu dem in umgekehrter Fahrtrichtung stehenden Lastenzug (P_1 in b) bestimmt (Abb. 67c). Polweite H des Kräftecks ist dann eine Strecke gleich der Stützweite l des Trägers im Maßstab des Lageplans.

Ist das statische Moment der Lasten P_1, \dots, P_k in bezug auf die Last k $\sum_{i=1}^{i=k} P_i b_{ik} = \mathcal{E}_k$ durch Tabellen bekannt, so werden die Ordinaten

$$\overline{k k'} = A_k = \mathcal{E}_k / l. \quad (111)$$

d) Mittelbare Belastung durch einen Zug von Einzellasten (Abb. 68).

Die größte Querkraft Q_m entsteht nach der Einflußlinie (Abb. 65) entweder bei Grundstellung des Lastenzuges zum Querträger m oder nach Überschreitung der

Grundstellung bis zur zweiten, dritten oder rten Last über Querträger m . In der ungünstigsten Stellung ist nach (102)

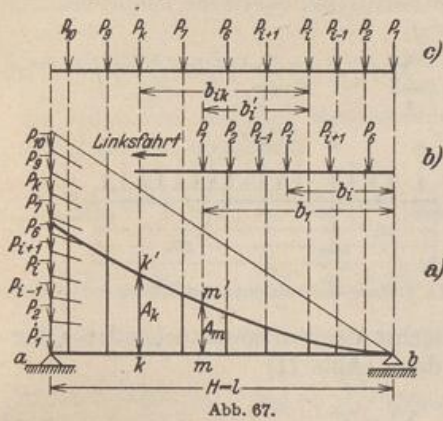


Abb. 67.

$$\left. \begin{aligned} & \mathfrak{P}_{r-1} < \frac{c_m}{l} \mathfrak{P}_n < \mathfrak{P}_r; \\ & \mathfrak{P}_n = \sum_1^n P_i, \quad \mathfrak{P}_r = \sum_1^r P_i, \end{aligned} \right\} (112)$$

$$\max Q_m = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i b_i - \frac{1}{c_m} \sum_1^r P_i b_{ir}. \quad (113)$$

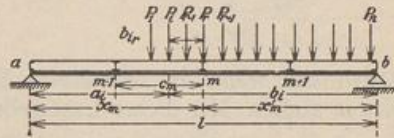


Abb. 68. Stellung des Lastenzuges zur Bildung von $\max Q_m$.

Der bis zur Last P_2 vorgezogene Lastenzug liefert also die größte Querkraft im Felde, wenn

$$\left. \begin{aligned} & \frac{l}{c_m} P_1 < \mathfrak{P}_n \quad \text{und} \quad \frac{l}{c_m} (P_1 + P_2) > \mathfrak{P}_n, \\ & \max Q_m = \frac{1}{l} \sum_1^n P_i b_i - \frac{1}{c_m} P_1 b_{12}. \end{aligned} \right\} (114)$$

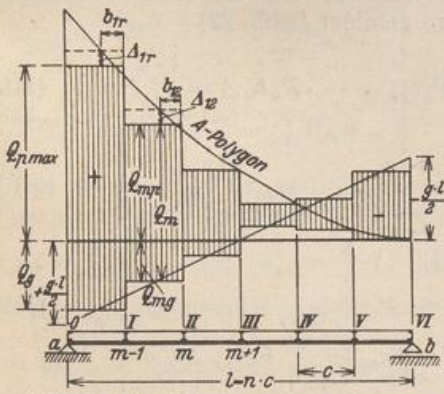


Abb. 69a. Schaulinie für $\max Q_m$ aus Eigengewicht und einem Lastenzug als Verkehrslast.

$$\max Q_m = Q_{mg} + A_p - \Delta_{1r}, \quad \Delta_{1r} = \sum_1^r \frac{P_i b_{ir}}{c_m}.$$

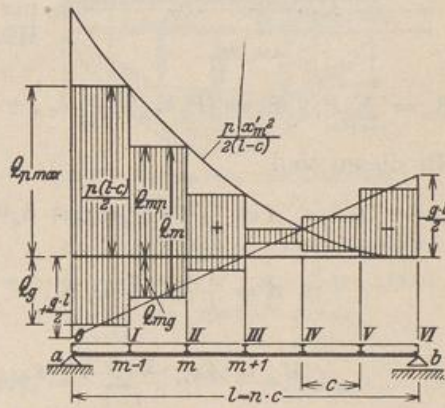


Abb. 69b. Schaulinie für $\max Q_m$ aus Eigengewicht und gleichförmig verteilter Nutzlast.

$$\max Q_m = Q_{mg} + \frac{p x_m^2}{2(l-c)}.$$

Die Grenzwerte der Biegemomente. Die Einflußlinie (Abb. 63) hat nur einen positiven Bereich, das Moment also nur einen positiven Grenzwert.

a) Gleichgroße Streckenbelastung p (Abb. 70).

Bei unmittelbarer Lasteintragung ist

$$\max M_{mp} = p \frac{x x'}{2} = \frac{p l^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) = \frac{p l^2}{2} \omega_R. \quad (115)$$

Bei mittelbarer Lasteintragung sind die Grenzwerte der Momente an den Anschlußquerschnitten durch die gleiche Funktion bestimmt. Dazwischen ist die Schaulinie für $\max M_{mp}$ geradlinig.

b) Lastenzug bei mittelbarer Eintragung (Abb. 71).

Die Einflußlinie des Moments an den Anschlußquerschnitten ist in der Regel ein Dreieck. Die ungünstigste Laststellung wird daher nach (102) durch die Ungleichungen

$$\sum_k^{r-1} P_i < \frac{x_m}{l} \sum_k^n P_i < \sum_k^r P_i \quad (116)$$

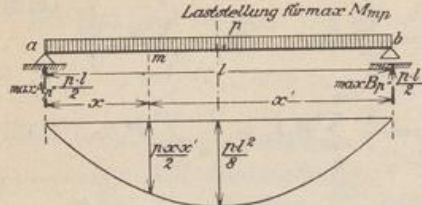


Abb. 70.

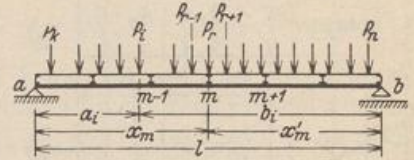


Abb. 71. Stellung des Lastenzuges zur Bildung von max M_m .

nachgewiesen, wenn die schwersten Lasten nächst dem zu untersuchenden Querschnitt m stehen. Mit dieser Laststellung ist dann (Abb. 71)

$$\max M_m = \frac{x_m}{l} \sum_k^n P_i b_i - \sum_k^r P_i (x_m - a_i). \quad (117)$$

Zwischen den Anschlußquerschnitten kann max M_m mit guter Annäherung geradlinig angenommen werden.

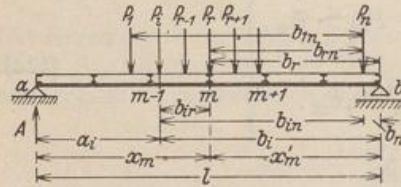


Abb. 72.

Um die Berechnung der Schnittkräfte für bekannte Lastenzüge zu erleichtern, deren erste Last P_1 bei Linksfahrt den linken Stützpunkt des Trägers nicht überschreitet, werden zwei nur von Achslast und Achsstand abhängige Hilfswerte gebildet (Abb. 72).

$$\mathfrak{P}_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_i, \quad \mathfrak{S}_n = (P_1 b_{1n} + P_2 b_{2n} + \dots + P_i b_{in} + \dots + P_n b_{nn}) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i b_{in}. \quad (118)$$

Mit diesen sind

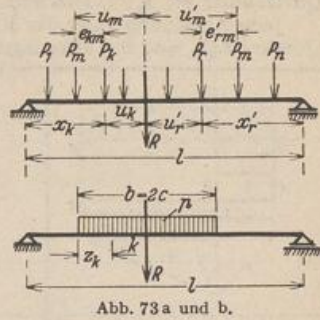
$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{i=n} P_i (b_{in} + b_n) = \frac{1}{l} \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i b_{in} + b_n \sum_{i=1}^{i=n} P_i \right), \\ A &= \frac{1}{l} (\mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n b_n), \\ M_m &= A x_m - \sum_{i=1}^{i=r} P_i (x_m - a_i) = A x_m - \sum_{i=1}^{i=r} P_i b_{ir}, \\ M_m &= \frac{x_m}{l} (\mathfrak{S}_n + \mathfrak{P}_n b_n) - \mathfrak{S}_r. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Die Funktionen \mathfrak{S}_n und \mathfrak{P}_n der Lastenzüge N , E und G der Reichsbahn sind in den Taschenbüchern enthalten. Sie lassen sich leicht auch für andere Lastenzüge zur Berechnung von Straßen- und Eisenbahnbrücken angeben. Nach den Reichsbahnvorschriften genügen aber bei einfachen Balkenbrücken bereits Näherungswerte für max M_p nach besonderer Anweisung.

c) Lastenzug bei unmittelbarer Eintragung (Abb. 73a).

Die größten Biegemomente können für beliebig viele Querschnitte ebenso wie für die Anschlußquerschnitte des Trägers bei mittelbarer Lasteintragung berechnet werden. Bleibt jedoch die Summe R' aller auf dem Träger ruhenden Lasten bei Verschiebung des Zuges unverändert, so läßt sich das vollständige Ergebnis einfacher angeben.

Zwei ausgezeichnete Querschnitte k und r links und rechts von der Resultierenden werden nach dem Index der ihnen zugeordneten Lasten P_k und P_r bezeichnet. Die Abstände der Lasten $P_1 \dots P_m \dots P_{k-1}$ von der Last P_k sind e_{km} , ihre Abstände von der Resultierenden u_m . Die Abstände der Lasten $P_n \dots P_m \dots P_{r+1}$ von der Last P_r werden e'_{rm} , die Abstände von der Resultierenden u'_m genannt. Außerdem ist abgekürzt



$$\left. \begin{aligned} \sum_1^k P_m &= \mathfrak{P}_k, & \sum_1^k P_m u_m &= \mathfrak{S}_k, \\ \sum_n^r P_m &= \mathfrak{P}'_r, & \sum_n^r P_m u'_m &= \mathfrak{S}'_r. \end{aligned} \right\} (120)$$

Die Momente M_k und M_r können dann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} M_k &= \frac{R x_k}{l} (l - u_k - x_k) - \sum_1^k P_m e_{km}, & M_r &= \frac{R x'_r}{l} (l - u'_r - x'_r) - \sum_n^r P_m e'_{rm}, \\ \text{oder} & & M_k &= \frac{R x_k (l - x_k)}{l} - \frac{R x_k}{l} u_k - \sum_1^k P_m e_{km}. \end{aligned} \right\} (121)$$

Das Moment ist nach (116) ein Grenzwert zwischen

$$x_{k1} = \frac{\mathfrak{P}_{k-1}}{R} l \quad \text{und} \quad x_{k2} = \frac{\mathfrak{P}_k}{R} l. \quad (122)$$

Für diese Querschnitte ist dann mit (122)

$$\left. \begin{aligned} M_{k1} &= \frac{R x_{k1} (l - x_{k1})}{l} - \sum_1^{k-1} P_m u_m, \\ M_{k2} &= \frac{R x_{k2} (l - x_{k2})}{l} - \sum_1^k P_m u_m. \end{aligned} \right\} (123)$$

Das Moment ist im rechten Bereiche nach (116) ein Grenzwert zwischen

$$x'_{r1} = \frac{\mathfrak{P}'_{r+1}}{R} l \quad \text{und} \quad x'_{r2} = \frac{\mathfrak{P}'_r}{R} l. \quad (124)$$

Für diese Querschnitte sind die Momente

$$M'_{r1} = \frac{R x'_{r1} (l - x'_{r1})}{l} - \sum_n^{r+1} P_m u'_m, \quad M'_{r2} = \frac{R x'_{r2} (l - x'_{r2})}{l} - \sum_n^r P_m u'_m. \quad (125)$$

Der erste Anteil ist die Ordinate einer Parabel mit $\frac{1}{4} R l$ als Pfeilhöhe. Der zweite Anteil ist ein Geradenzug, dessen Eckpunkte die Abszissen x_{k2} und x'_{r2} und die Ordinaten \mathfrak{S}_k und \mathfrak{S}'_k erhalten.

Das Ergebnis kann auch auf eine begrenzte, gleich große Streckenlast übertragen werden (Abb. 73b).

$$\left. \begin{aligned} R = p b = 2 p c; & \quad P = p d z, & x_k &= \frac{\mathfrak{P}_k}{R} l = \frac{z_k l}{b}, & \sum_1^k P_m u_m &= \frac{p b c x_k x'_k}{l^2}, \\ \max M_k &= \frac{p b}{l} x_k x'_k \left(1 - \frac{c}{l}\right) & &= 2 p c l \left(1 - \frac{c}{l}\right) \omega_R. \end{aligned} \right\} (126)$$

Das Diagramm der Grenzwerte ist eine Parabel für die Belastung $4 p \frac{c}{l} \left(1 - \frac{c}{l}\right)$.

Domke, O.: Theorie des Eisenbetons. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 1, 4. Aufl. S. 391. Berlin 1930. — Beyer, K.: Baustatik. Taschenb. f. Bauing. Bd. 1 S. 270. Berlin 1928.

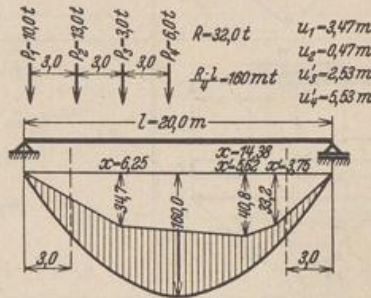


Abb. 74. Untersuchung einer Kranbrücke.

$$\begin{aligned} k=2: & \quad x_{21} = x_{12} = 6,25 \text{ m}, & x_{22} &= \frac{10 + 13}{32} 20 = 14,38 \text{ m}, \\ & \quad \mathfrak{S}_2 = 10 \cdot 3,47 + 13 \cdot 0,47 = 34,68 + 6,08 = 40,8 \text{ mt}, \\ r=3: & \quad x'_{31} = \frac{6}{32} 20 = 3,75 \text{ m}, & x'_{32} &= \frac{9}{32} 20 = 5,62 \text{ m}, \\ & \quad \mathfrak{S}'_3 = 3,0 \cdot 2,53 + 6,0 \cdot 5,53 = 40,8 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Tabelle 6. Balken auf zwei Stützen.

l : Stützweite, $\xi = x/l$, $\xi' = x'/l$; A, B : Stützkräfte; Q_m : Querkraft; M_m : Biegemoment im Querschnitt m ; x_0 : Querschnitt mit dem größten Biegemoment M_{\max} .

Jede Abbildung zeigt der Reihe nach die Art der Belastung und die Zustandslinien für die Querkraft Q_m und das Biegemoment M_m .

	$A = \frac{Pb}{l} \quad B = \frac{Pa}{l} \quad Q_1 = +\frac{Pb}{l} \quad Q_2 = -\frac{Pa}{l}$ $M_1 = Pb\xi \quad M_2 = Pa\xi'$ $x_0 = a \quad M_{\max} = \frac{Pab}{l}$
	$A = \frac{pl}{2} \quad B = \frac{pl}{2} \quad Q = \frac{pl}{2}(1 - 2\xi)$ $M = \frac{pl^2}{2}\omega_R$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = 0,125pl^2$
	$A = \frac{pc}{2l}(2n+c) \quad B = \frac{pc}{2l}(2m+c)$ $Q_1 = A \quad Q_2 = A - p(x-m) \quad Q_3 = -B$ $M_I = Am \quad M_{II} = Bn \quad M_1 = Ax$ $M_2 = M_I \frac{x}{m} - p \frac{(x-m)^2}{2} \quad M_3 = Bx'$ $x_0 = m + \frac{c}{2l}(2n+c) = m + \frac{A}{p} \quad M_{\max} = M_I + \frac{A^2}{2p}$
	$A = \frac{pc}{2l}(2n+c) \quad B = \frac{pc^2}{2l}$ $Q_1 = A - px \quad Q_2 = -B$ $M_I = Bn \quad M_1 = M_I \frac{x}{c} + \frac{pc^2}{2}\omega_R^{(c)}$ $M_2 = M_I \frac{x'}{n}$ $x_0 = \frac{A}{p} \quad M_{\max} = \frac{A^2}{2p}$
	$A = p_1c_1 - R \quad B = p_2c_2 + R \quad R = \frac{p_1c_1^2 - p_2c_2^2}{2l}$ $Q_1 = A - p_1x \quad Q_2 = -R \quad Q_3 = -B + p_2x'$ $M_I = \frac{p_1c_1^2}{2} - Rc_1 \quad M_{II} = \frac{p_2c_2^2}{2} + Rc_2$ $M_1 = M_I \frac{x}{c_1} + \frac{p_1c_1^2}{2}\omega_R^{(c_1)}; \quad M_2 = \frac{p_1c_1^2}{2} - Rx; \quad M_3 = M_{II} \frac{x'}{c_2} + \frac{p_2c_2^2}{2}\omega_R^{(c_2)}$ $\frac{p_1}{p_2} > \frac{c_2^2}{c_1^2}: \quad x_0 = \frac{A}{p_1} \quad M_{\max} = \frac{A^2}{2p_1}$ $\frac{p_1}{p_2} < \frac{c_2^2}{c_1^2}: \quad x'_0 = \frac{B}{p_2} \quad M'_{\max} = \frac{B^2}{2p_2}$

* $\omega_R^{(c)}$ und $\omega_D^{(c)}$ nach Tab. 22 für das Intervall $0 \leq \frac{x}{c} \leq 1$.

Tabelle 6 (Fortsetzung)

	$A = B = pc \quad Q_1 = A - px$ $M_I = \frac{pc^2}{2} \quad M_1 = M_I \frac{x}{c} + \frac{pc^2}{2} \omega_R^{(c)} \quad M_2 = M_I$ $c \leq x_0 \leq c + m \quad M_{\max} = M_I$
	$A = B = pc \quad Q_1 = A \quad Q_2 = A - p(x - n)$ $M_I = pcn \quad M_{II} = \frac{pc^2}{2} \left(1 + 2 \frac{n}{c}\right)$ $M_1 = pcx \quad M_2 = \frac{pc^2}{2} \left(\frac{n+x}{c} + \omega_R^{(c)}\right) \quad M_3 = M_{II}$ $n + c \leq x_0 \leq n + c + m \quad M_{\max} = M_{II}$
	$A = \frac{pl}{6} \quad B = \frac{pl}{3} \quad Q = -\frac{pl}{6} \omega_M$ $M = \frac{pl^2}{6} \omega_D$ $x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,5774l \quad M_{\max} = \frac{pl^2}{9\sqrt{3}} = 0,06415 pl^2$
	$A = \frac{2p_1 + p_2}{6} l \quad B = \frac{p_1 + 2p_2}{6} l$ $Q = A - \frac{p_1 + p_2}{2} l \xi - \frac{p_1 - p_2}{2} l \omega_R$ $M = \frac{l^2}{2} p_1 \omega_R - (p_1 - p_2) \frac{l^2}{6} \omega_D = \frac{p_1 l^2}{6} \left(\omega_D' + \frac{p_2}{p_1} \omega_D\right)$ $x_0 = \frac{1 - \nu}{1 - \mu} l \quad \nu = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2}{3 p_1^2}} \quad \mu = \frac{p_2}{p_1}$ $M_{\max} = \frac{p_1 l^2}{6} \cdot \frac{2\nu^3 - \mu(1 + \mu)}{(1 - \mu)^2}$
	$A = \frac{pc}{6} \left(3 - 2 \frac{c}{l}\right) \quad B = \frac{pc^2}{3l}$ $Q_1 = A - \frac{pc}{2} \frac{x^2}{c^2} \quad Q_2 = -\frac{pc^2}{3l}$ $M_I = \frac{pc^2}{3l} n \quad M_1 = M_I \frac{x}{c} + \frac{pc^2}{6} \omega_D^{(c)} \quad M_2 = M_I \frac{x'}{n}$ $x_0 = c \sqrt{\frac{A}{pc/2}} = c \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{c}{l}} \quad M_{\max} = \frac{2}{3} A x_0 = \frac{p x_0^3}{3c}$

Tabelle 6 (Fortsetzung).

	$A = \frac{p c^2}{6 l} \quad B = \frac{p c}{6} \left(3 - \frac{c}{l} \right)$ $Q_1 = \frac{p c^2}{6 l} \quad Q_2 = A - \frac{p c}{2} \left(\frac{x-m}{c} \right)^2$ $M_I = \frac{p c^2}{6 l} m \quad M_1 = M_I \frac{x}{m} \quad M_2 = M_I \frac{x'}{c} + \frac{p c^2}{6} \omega_D^{(c)}$ $x_0 = m + c \sqrt{\frac{c}{3 l}} \quad M_{\max} = \frac{p c^2}{6 l} \left(m + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{3 l}} \right) = A \left(x_0 - \frac{c}{3} \sqrt{\frac{c}{3 l}} \right)$
	$A = \frac{p c}{2} \frac{b}{l} \quad B = \frac{p c}{2} \frac{a}{l}$ $Q_1 = \frac{p c}{2} \frac{b}{l} \quad Q_2 = A - \frac{p(x-m)}{2} + \frac{p c}{2} \omega_D^{(c)} \quad Q_3 = -\frac{p c}{2} \frac{a}{l}$ $M_I = \frac{p c}{2} \frac{b}{l} m \quad M_{II} = \frac{p c}{2} \frac{a}{l} n$ $M_1 = M_I \frac{x}{m} \quad M_2 = A x - \frac{p c^2}{6} \left(\frac{x-m}{c} \right)^3 \quad M_3 = M_{II} \frac{x'}{n}$ $x_0 = m + c \sqrt{\frac{A}{p c / 2}} \quad M_{\max} = \frac{A}{3} (2 x_0 + m)$
	$A = \frac{p(l+c_2)}{6} \quad B = \frac{p(l+c_1)}{6}$ $Q_I = p \frac{c_2 - c_1}{3} \quad Q_1 = A - \frac{p c_1}{2} \frac{x^2}{c_1^2} \quad Q_2 = -B + \frac{p c_2}{2} \frac{x'^2}{c_2^2}$ $M_I = p \frac{c_1 c_2}{3} \quad M_1 = \frac{p c_2}{3} x + p \frac{c_1^2}{6} \omega_D^{(c_1)} \quad M_2 = \frac{p c_1}{3} x' + \frac{p c_2^2}{6} \omega_D^{(c_2)}$ $c_1 > c_2: \quad x_0 = c_1 \sqrt{\frac{A}{p c_1 / 2}} = \sqrt{\frac{c_1(l+c_2)}{3}} \quad M_{\max} = \frac{2}{3} A x_0$ $c_1 < c_2: \quad x'_0 = c_2 \sqrt{\frac{B}{p c_2 / 2}} = \sqrt{\frac{c_2(l+c_1)}{3}} \quad M'_{\max} = \frac{2}{3} B x'_0$
	$A = \frac{p l}{2} - \frac{\Delta M}{l} \quad B = \frac{p l}{2} + \frac{\Delta M}{l} \quad Q = \frac{p l}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) - \frac{\Delta M}{l}$ $M = \frac{p l^2}{2} \omega_R - \Delta M \frac{x}{l} - M_a \quad M_0 = \frac{p l^2}{8}$ $x_0 = \frac{l}{2} - \frac{\Delta M}{p l} \quad M = 0 \quad \text{für } x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - \frac{2 M_a}{p}}$ $M_{\max} = \frac{p x_0^2}{2} - M_a = \frac{p l^2}{8} - \frac{M_a + M_b}{2} + \frac{\Delta M^2}{2 p l^2}$
	$A = \frac{p l}{3} \quad B = \frac{p l}{3} \quad Q = \frac{p l}{3} (1 - 6 \xi^2 + 4 \xi^3)$ $M = \frac{p l^2}{3} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4) = \frac{p l^2}{3} \omega_p''$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = \frac{5}{48} p l^2 = 0.1042 p l^2$

Tabelle 6 (Fortsetzung).

	$A = \frac{pl}{12} \quad B = \frac{pl}{4} \quad Q = \frac{pl}{12}(1 - 4\xi^3)$ $M = \frac{pl^2}{12}\omega_P \quad \omega_P = \xi - \xi^4$ $x_0 = \frac{l}{2}\sqrt[3]{2} = 0,6300l \quad M_{\max} = \frac{pl}{16}x_0 = 0,03935pl^2$
	$A = B = \frac{p(a+c)}{2} \quad Q_I = \frac{pc}{2}$ $Q_1 = A - \frac{pa}{2} \frac{x^2}{a^2} \quad Q_2 = Q_I - p(x-a)$ $M_I = \frac{pl^2}{6} \frac{a}{l} \left(3 - 4 \frac{a}{l}\right) \quad M_{II} = \frac{pl^2}{24} \left(3 - 4 \frac{a^2}{l^2}\right)$ $M_1 = Ax - \frac{pa^2}{6} \left(\frac{x}{a}\right)^3 \quad M_2 = M_I + \frac{pc^2}{2} \omega_R^{(c)}$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = M_{II}$
	$A = B = \frac{pl}{4} \quad Q_I = \frac{pl}{6} \quad Q_{II} = \frac{pl}{12} \quad Q_1 = \frac{pl}{4}(1 - 12\xi^2)$ $Q_2 = \frac{pl}{12}[1 + 4(1 - 3\xi)^2] \quad Q_3 = \frac{pl}{12}[1 - 4(1 - 3\xi)^2]$ $M_I = \frac{pl^2}{27} \quad M_{II} = \frac{pl^2}{18} \quad M_{III} = \frac{7}{108}pl^2$ $M_1 = \frac{pl^2}{4}\xi(1 - 4\xi^2) \quad M_2 = \frac{pl^2}{108}[-1 + 9\xi(5 - 12\omega_R)]$ $M_3 = \frac{pl^2}{108}[7 - 27\xi(1 - 4\omega_R)] \quad x_0 = l/2 \quad M_{\max} = M_{III}$
	$A = B = \frac{pc}{2} \quad Q_1 = \frac{pc}{2} \quad Q_2 = A - \frac{pc}{2} \left(\frac{x-n}{c}\right)^2$ $M_I = \frac{pcn}{2} \quad M_{II} = \frac{pc^2}{12} \left(3 \frac{l}{c} - 2\right)$ $M_1 = \frac{pcx}{2} \quad M_2 = Ax - \frac{pc^2}{6} \left(\frac{x-n}{c}\right)^3$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = M_{II}$
	$A = B = \frac{pl}{4} \quad Q_I = \frac{pl}{8}$ $Q_1 = \frac{pl}{4}(1 - 8\xi^2) \quad Q_2 = \frac{pl}{2}(1 - 2\xi)^2$ $M_I = \frac{5}{96}pl^2 \quad M_{II} = \frac{pl^2}{16} \quad M_1 = \frac{pl^2}{2}(1 - 8\xi^2)\xi$ $M_2 = \frac{pl^2}{48}[3 - 4(1 - 2\xi)^2] \quad x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = M_{II}$

Tabelle 6 (Fortsetzung).

	$A = B = \frac{pl}{4} \quad Q_1 = \frac{pl}{8}$ $Q_1 = \frac{pl}{8} [1 + (1 - 4\xi)^2] \quad Q_2 = \frac{pl}{8} [1 - (1 - 4\xi)^2]$ $M_I = \frac{pl^2}{24} \quad M_{II} = \frac{pl^2}{16}$ $M_{\frac{1}{2}} = \frac{pl^2}{96} [4 - 3(1 - 4\xi) \mp (1 - 4\xi)^3]$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = M_{II}$
	$R = \frac{p_1 c_1^3 - p_2 c_2^3}{6l} = -Q_I \quad A = \frac{p_1 c_1}{2} - R \quad B = \frac{p_2 c_2}{2} + R$ $Q_1 = A - \frac{p_1 c_1}{2} \left(\frac{x}{c_1} + \omega_R^{(c_1)} \right) \quad Q_2 = -B + \frac{p_2 c_2}{2} \left(\frac{x'}{c_2} + \omega_R^{(c_2)} \right)$ $M_I = \frac{c_1 c_2}{6l} (p_1 c_1 + p_2 c_2); \quad M_I = M_I \frac{x}{c_1} + \frac{p_1 c_1^2}{6} \omega_D^{(c_1)}; \quad M_2 = M_I \frac{x'}{c_2} + \frac{p_2 c_2^2}{6} \omega_D^{(c_2)}$ $R > 0: \quad x_0 = c_1 - \sqrt{\frac{2Rc_1}{p_1}} \quad M_{\max} = M_I + \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{2Rc_1}{p_1}}$ $R < 0: \quad x'_0 = c_2 - \sqrt{\frac{-2Rc_2}{p_2}} \quad M'_{\max} = M_I - \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{-2Rc_2}{p_2}}$
	$A = B = \frac{pl}{4} \quad Q_1 = \frac{pl}{4} (1 - 2\xi)^2$ $M_I = \frac{pl^2}{24} \quad M_{II} = \frac{pl^2}{24} [1 - (1 - 2\xi)^3]$ $x_0 = \frac{l}{2} \quad M_{\max} = M_I$
	$A = B = \frac{pc}{2} \quad Q_1 = \frac{pc}{2} \left(\frac{c-x}{c} \right)^2$ $M_I = \frac{pc^2}{6} \quad M_{II} = \frac{pc^2}{6} \left(1 - \left(\frac{c-x}{c} \right)^3 \right)$ $c \leq x_0 \leq c + m \quad M_{\max} = M_I$
	$A = -\frac{M_a}{l} \quad B = +\frac{M_a}{l} \quad Q = -\frac{M_a}{l}$ $M = +M_a \xi'$ $x_0 = 0 \quad M_{\max} = +M_a$

Tabelle 6 (Fortsetzung).

	$A = -\frac{M_a + M_b}{l} \quad B = +\frac{M_a + M_b}{l} \quad Q = -\frac{M_a + M_b}{l}$ $M = M_a \xi' - M_b \xi$ $M_a > M_b: \quad x_0 = 0 \quad M_{\max} = +M_a$ $M_a < M_b: \quad x_0 = l \quad M'_{\max} = -M_b$
	$A = -\frac{M_c - M_d}{l} \quad B = +\frac{M_c - M_d}{l} \quad Q = -\frac{M_c - M_d}{l}$ $M_1 = -(M_c - M_d) \xi; \quad M_2 = +M_c \xi' + M_d \xi; \quad M_3 = +(M_c - M_d) \xi'$ $x_0 = m \text{ für } M_c > M_d$ $M_{\max} = -(M_c - M_d) \frac{m}{l} \quad \text{oder} \quad M_{\max} = M_c - (M_c - M_d) \frac{m}{l}$

Tabelle 7. Freitragler.

l: Länge, $\xi = x/l$; C: Stützkraft; M_c : Einspannmoment; Q_m : Querkraft; M_m : Biegemoment im Querschnitt m; x_0 : Querschnitt mit dem größten Biegemoment M_{\max} .

	$C = \sum_1^n P_k \quad M_c = + \sum_1^n P_k b_k$ $Q_m = - \sum_1^{m-1} P_k = Q_{m-1} - P_{m-1}$ $M_m = - \sum_1^{m-1} P_k (b_k - x'_m) = M_{m-1} + Q_m c_m$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -M_c$
	$C = pl \quad M_c = \frac{pl^2}{2} \quad Q = -px$ $M = -\frac{px^2}{2}$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pl^2}{2}$
	$C = pc \quad M_c = \frac{pc}{2}(l+n) \quad Q_1 = -px \quad Q_2 = -pc$ $M_1 = -\frac{px^2}{2} \quad M_I = -\frac{pc^2}{2} \quad M_2 = -\frac{pc^2}{2} \left(\frac{2x}{c} - 1\right)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pc}{2}(l+n)$

Tabelle 7 (Fortsetzung).

	$C = \frac{p l}{2} \quad M_c = \frac{p l^2}{6} \quad Q = -\frac{p l}{2} \xi^2$ $M = -\frac{p l^2}{6} \xi^3$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{p l^2}{6}$
	$C = \frac{p l}{2} \quad M_c = \frac{p l^2}{3} \quad Q = -\frac{p l}{2} (2 \xi - \xi^2)$ $M = -\frac{p l^2}{6} (3 \xi^2 - \xi^3)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{p l^2}{3}$
	$C = (p_1 + p_2) \frac{l}{2} \quad M_c = (2 p_1 + p_2) \frac{l^2}{6}$ $Q = -\frac{l}{2} [2 p_1 \xi + (p_2 - p_1) \xi^2]$ $M = -\frac{l^2}{6} [3 p_1 \xi^2 + (p_2 - p_1) \xi^3]$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -(2 p_1 + p_2) \frac{l^2}{6}$
	$C = \frac{p c}{2} \quad M_c = \frac{p c}{6} (l + 2 n)$ $Q_1 = -\frac{p}{2 c} x^2 \quad Q_2 = -\frac{p c}{2}$ $M_1 = -\frac{p}{6 c} x^3 \quad M_I = -\frac{p c^2}{6} \quad M_2 = +\frac{p c^2}{6} \left(2 - 3 \frac{x}{c}\right)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{p c}{6} (l + 2 n)$
	$C = \frac{p c}{2} \quad M_c = \frac{p c}{6} (2 l + n)$ $Q_1 = -\frac{p c}{2} \left(2 \frac{x}{c} - \frac{x^2}{c^2}\right) \quad Q_2 = -\frac{p c}{2}$ $M_1 = -\frac{p c^2}{6} \left(3 \frac{x^2}{c^2} - \frac{x^3}{c^3}\right)$ $M_I = -\frac{p c^2}{3} \quad M_2 = -\frac{p c^2}{6} \left(3 \frac{x}{c} - 1\right)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{p c}{6} (2 l + n)$

Tabelle 7 (Fortsetzung).

	$C = \frac{pl}{2} \quad M_c = \frac{pl^2}{4}$ $Q_1 = -\frac{pl}{4} \quad Q_1 = -pl\xi^2; \quad Q_2 = -\frac{pl}{4}(2\xi + \omega_R^{(c)})$ $M_1 = -\frac{pl^2}{3}\xi^3 \quad M_1 = -\frac{pl^2}{24} \quad M_2 = -\frac{pl^2}{24}(10\xi - 4 - \omega_D^{(c)})$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pl^2}{4}$
	$C = \frac{pl}{3} \quad M_c = \frac{pl^2}{12} \quad Q = -\frac{pl}{3}\xi^3$ $M = -\frac{pl^2}{12}\xi^4$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pl^2}{12}$
	$C = \frac{2}{3}pl \quad M_c = \frac{pl^2}{4} \quad Q = -\frac{pl}{3}(3\xi^2 - \xi^3)$ $M = -\frac{pl^2}{12}(4\xi^3 - \xi^4)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pl^2}{4}$
	$C = \frac{2}{3}pl \quad M_c = \frac{pl^2}{3} \quad Q = -\frac{2}{3}pl(3\xi^2 - 2\xi^3)$ $M = -\frac{pl^2}{3}(2\xi^3 - \xi^4)$ $x_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{pl^2}{3}$
	$C = 0 \quad M_c = M_d + M_e \quad Q = 0$ $M_1 = -M_d \quad M_2 = -(M_d + M_e)$ $x_0 = (l - n) \text{ bis } l \quad M_{\max} = -(M_d + M_e)$

15. Der Auslegeträger.

Der Stabzug ist bei jeder Anordnung kinematisch starr und darf keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Zur statisch bestimmten Ermittlung der äußeren Kräfte eines Auslegeträgers mit n Stützenbedingungen sind die vorhandenen drei

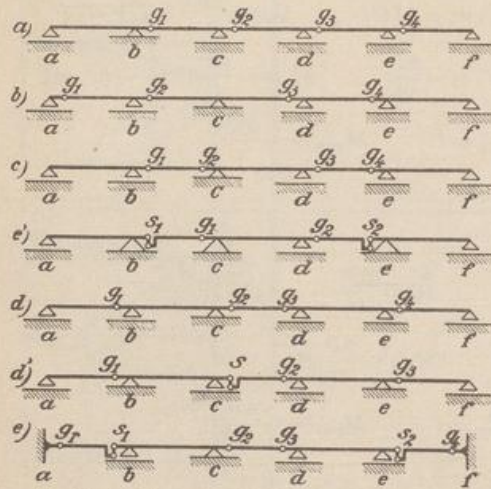


Abb. 75. Anordnung von Gelenken im Gerberträger.

Gleichgewichtsbedingungen durch $(n - 3)$ Bedingungsgleichungen zu ergänzen, die sich durch die ein- und zweiständigen Gelenke ergeben. Bei lotrechter Belastung sind die Stützkkräfte ebenfalls lotrecht. Dasselbe gilt bei der üblichen Verbindung der Teile des Stabzugs auch von den Gelenkkräften. Die Unterteilung durch Stützen und Gelenke (Abb. 75) ist von wirtschaftlichen Gesichtspunkten und von der Formänderung des Tragwerks insbesondere an den Gelenken abhängig. Negative Stützendrücke sollen mit Rücksicht auf die Kosten der Verankerung vermieden werden.

Zeichnerische Untersuchung. Die Bestimmung der Schnittkräfte kann durch Seilecke für die jedem einzelnen Felde zugeordneten senkrechten Lasten

vorbereitet werden. Die äußeren Seileckseiten sollen sich dabei auf den Wirkungslinien der Stützkkräfte schneiden (Abb. 76). Die einzelnen Kraftecke werden aus

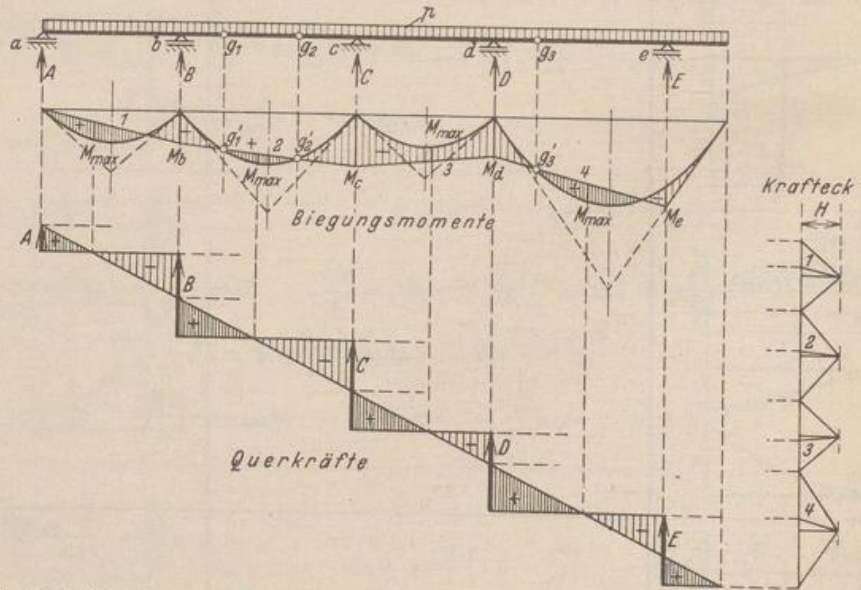


Abb. 76. Graphische Ermittlung der Momente und Querkräfte eines Auslegeträgers für ruhende Belastung p .

einem zusammenhängenden Kräftezug entwickelt. Sie erhalten gleiche Polweiten H . An Stelle der graphischen Darstellung können die Momente auch für die jedem Felde zugeordneten Lasten nach (86) gerechnet und aufgetragen werden. Mit der Lage der Gelenke sind die Nullpunkte g'_1, g'_2, g'_3 der Momente, die Stützenmomente und damit der Momentenverlauf bekannt, aus dem die Querkräfte abgeleitet werden.

Der Beweis ergibt sich aus den Beziehungen zwischen Kraft- und Seileck. Mittelbare Lastübertragung wird ebenso wie beim einfachen Balkenträger berücksichtigt.

Analytische Untersuchung. Zur Berechnung der Schnittkräfte werden in der Regel zunächst die Querkräfte an den Gelenken bestimmt. Die waagerechten Komponenten der Verbindungskräfte sind bei senkrechter Belastung Null. Damit sind die Stützkkräfte bekannt, so daß die Schnittkräfte im Krag- und Schwebeträger ebenso wie beim einfachen Balkenträger nach (86) und (87) erhalten werden. Zur Nachprüfung der Stützkkräfte können, abgesehen von den Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte für den ganzen Stabzug, auch diejenigen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an Teilen des Tragwerks gebildet werden. Für den Stabzug nach Abb. 76 ist das Moment der an dem Stabteil $\bar{a}g_1$ angreifenden äußeren Kräfte in bezug auf g_1 Null. Dasselbe gilt für die äußeren Kräfte von $\bar{a}g_2$ in bezug auf g_2 und für die äußeren Kräfte von $\bar{a}g_3$ in bezug auf g_3 . Damit sind 6 statische Bedingungen für die 6 Stützkkräfte vorhanden.

Einflußlinien und Grenzwerte. Die ungünstigsten Laststellungen zur Bildung der Grenzwerte der Stütz- und Schnittkräfte ergeben sich aus den Einflußlinien. Diese werden am einfachsten in Anlehnung an diejenigen des einfachen Trägers als Funktion der Einflußgröße aufgetragen. Sie lassen sich nach S. 49 auch kinematisch angeben (Abb. 77).

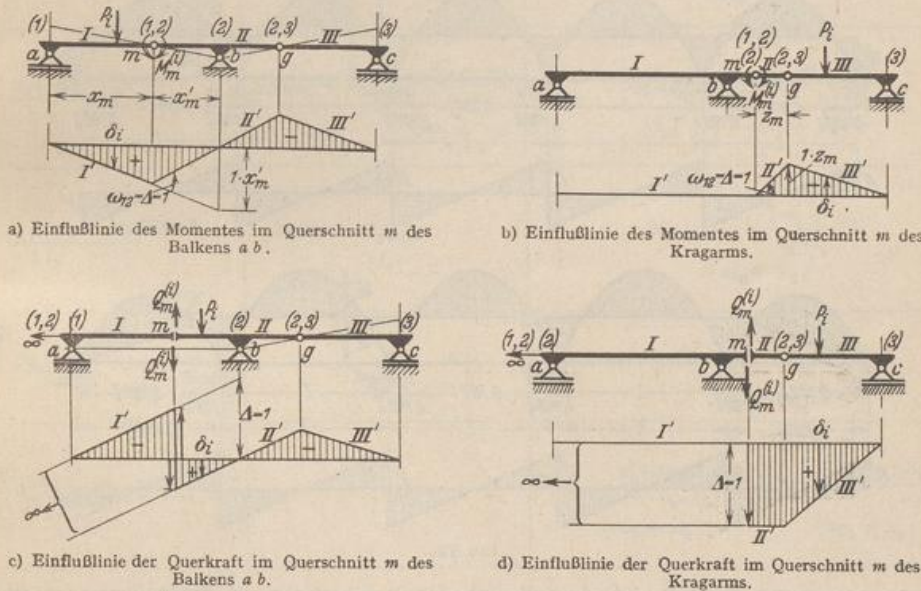


Abb. 77. Kinematische Darstellung der Einflußlinien eines Auslegeträgers.

Die Grenzwerte der Schnittkräfte können bei gleichmäßig verteilter Nutzlast mit den Einflußflächen bestimmt werden. Die Rechnung vereinfacht sich dadurch, daß oft dieselbe Laststellung die größten Schnittkräfte in den Querschnitten eines Stabteils hervorruft. Ist der eine Grenzwert einer Schnittkraft bekannt, so kann der andere leicht aus der Schnittkraft für volle Belastung des Trägers bestimmt werden, da z. B.

$$\max M_{m p} + \min M_{m p} = M_{m p}.$$

Die Schnittkräfte des Schwebeträgers werden nach Abschn. 14 berechnet.

Die Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte bestehen zum großen Teile aus einzelnen Dreiecken. Die ungünstigste Stellung eines Lastenzuges stimmt daher für jeden Bereich mit derjenigen überein, welche das größte Biegemoment eines Balkenträgers liefern würde. Die Grenzwerte der Schnittkräfte des Auslegeträgers

können daher im wesentlichen als die größten Biegemomente eines stellvertretenden Balkenträgers berechnet und darauf mit einem von der Unterteilung des Stabzugs abhängigen Beiwert erweitert werden. Diese Rechenvorschrift ist in Tabelle 8 enthalten.

Stützenstellung und Gelenklage. Stützenabstand und Gelenklage werden oft so gewählt, daß die Beträge der größten Momente über den Stützen und in den Feldern gleich groß werden. Der Eisenbetonträger ist jedoch in der Regel im Bereich des Feldes durch die mittragende Plattenbreite und im Bereich der Stützen durch

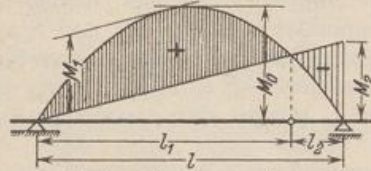


Abb. 78 a. Anordnung a (Außenfeld):

$$l_1 = 0,8284l, \quad l_2 = 0,1716l;$$

$$M_1 = M_2 = M = 0,0858ql^2 = 0,0863 \frac{ql^2}{8}.$$

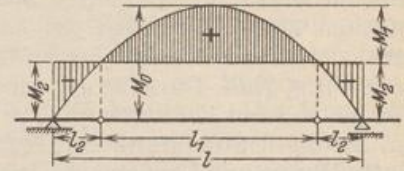


Abb. 78 b. Anordnung b (Mittelfeld):

$$l_1 = 0,707l; \quad l_2 = 0,146l;$$

$$M_1 = M_2 = M = 0,0625ql^2 = 0,5 \frac{ql^2}{8}.$$

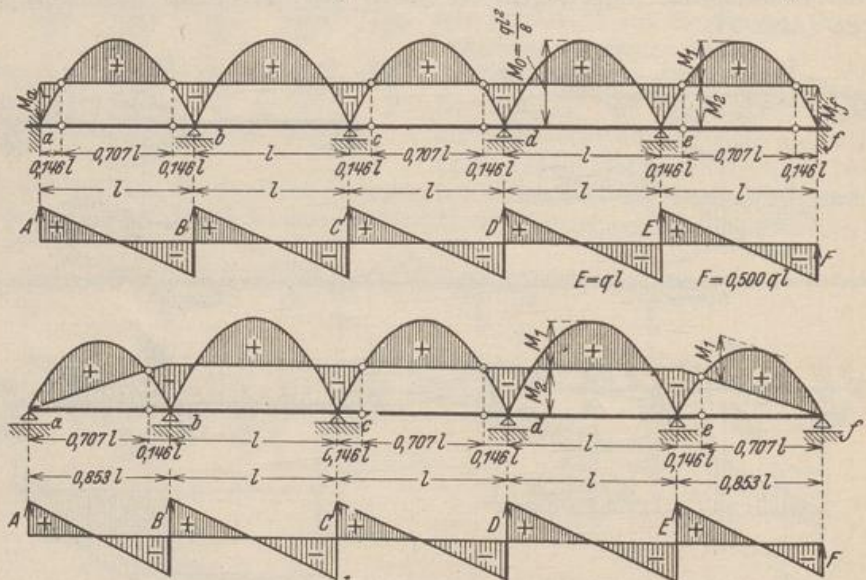


Abb. 79.

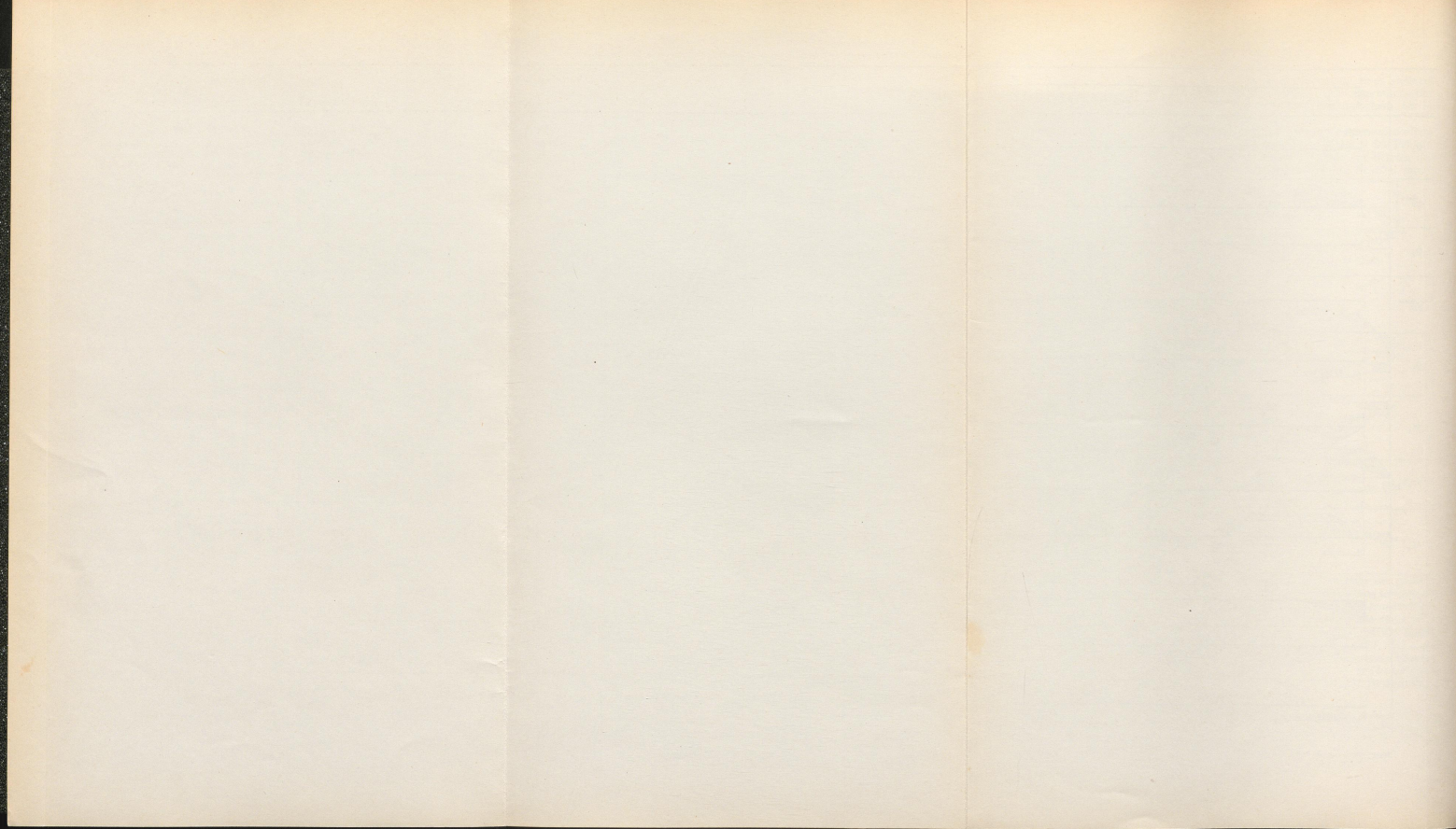
Vouten verstärkt, so daß sich das wirtschaftlich günstigste Verhältnis der größten Biegemomente ändert. Es kann in jedem Falle leicht durch Rechnung festgestellt werden. Oft sind bei der Aufteilung des Stabzugs auch örtliche und konstruktive Gesichtspunkte maßgebend. Als Grundlage lassen sich die Ergebnisse für gleichförmig verteilte Belastung nach Abb. 78, 79 verwenden. Danach ist die Länge des Schwebeträgers $l_1 = 0,707l$, die Länge des Kragarms $l_2 = 0,146l$. Bei einer größeren Anzahl von ausgeführten Brückenträgern mit Vouten ist die mittlere Länge l_1 des Schwebeträgers mit $0,4l$ bis $0,55l$, die Auskragung l_2 also mit $0,3l$ bis $0,225l$ ausgeführt worden. Sie beträgt, bezogen auf den anschließenden Balkenträger mit L als Stützweite, $0,3L$ bis $0,45L$.

Lossier, H.: Größere Balkenbrücken in Eisenbeton. Vorbericht zum Ersten Kongreß der intern. Ver. für Brücken- und Hochbau. S. 367. Zürich 1932. — Spangenberg, H.: Größere Eisenbetonbalkenbrücken in Deutschland. a. a. O. S. 385. — Gombos, M.: Balkenbrücken in Ungarn. a. a. O. S. 417.

Grenzwert	Lastenzug	
	positiver Grenzwert	negativer Grenzwert
$\frac{n_1(m_1 + n_2)}{2 l_1}$	$Q_{1 \max}$ eines einfachen Trägers von der Länge $ l_1 $	$\left[Q_{1 \min} + M_{a \max} \cdot \frac{m_1 + n_2}{n_2 \cdot l_1} \right]$ eines einfachen Trägers von der Länge $ l_1 $ eines einfachen Trägers von der Länge $ m_1 + n_2 $
$\frac{n_1(m_1 + n_2)}{2 l_1}$	—	$A_{I \min} + M_{a \max} \cdot \frac{m_1 + n_2}{n_2 \cdot l_1}$ $ l_1 $ $ m_1 + n_2 $
—	—	—
$\frac{(m_3 + n_4)}{2 l_3}$	$A_{II \max} + M_{b \max} \cdot \frac{m_2 + n_2}{n_2 \cdot l_3}$ $ l_3 $ $ m_2 + n_2 $	$M_{c \max} \cdot \frac{m_3 + n_4}{n_4 \cdot l_3}$ $ m_3 + n_4 $
$\frac{n_3(m_3 + n_4)}{2 l_3}$	$Q_{5 \max} + M_{b \max} \cdot \frac{m_2 + n_2}{n_2 \cdot l_3}$ $ l_3 $ $ m_2 + n_2 $	$Q_{5 \min} + M_{c \max} \cdot \frac{m_3 + n_4}{n_4 \cdot l_3}$ $ l_3 $ $ m_3 + n_4 $
$\frac{x_1 \cdot (m_1 + n_2)}{2 l_1}$	$M_{1 \max}$ $ l_1 $	$M_{a \max} \cdot \frac{x_1 \cdot (m_1 + n_2)}{n_2 \cdot l_1}$ $ m_1 + n_2 $
$\frac{(z_2 + n_2)}{2}$	—	$M_{a \max} \cdot \frac{z_2 + n_2}{n_2}$ $ z_2 + n_2 $
$\frac{x_4 + x_5 \cdot m_3 \cdot (m_3 + n_4)}{2 l_3}$	$M_{5 \max}$ $ l_3 $	$M_{b \max} \cdot \frac{x_5 \cdot (m_2 + n_2)}{n_2 \cdot l_3} + M_{c \max} \cdot \frac{x_5 \cdot (m_3 + n_4)}{n_4 \cdot l_3}$ $ m_2 + n_2 $ $ m_3 + n_4 $
$\frac{(m_1 + n_2)}{2 l_1}$	$A_{0 \max}$ $ l_1 $	$M_{a \max} \cdot \frac{m_1 + n_2}{n_2 \cdot l_1}$ $ m_1 + n_2 $
—	$M_{a \max} \cdot \frac{l_1 + m_1 + n_2}{n_2 \cdot l_1}$ $ l_1 + m_1 + n_2 $	—
$\frac{(m_3 + n_4)}{2 l_3}$	$M_{b \max} \cdot \frac{n_2 + m_2 + l_3}{n_2 \cdot l_3}$ $ n_2 + m_2 + l_3 $	$M_{c \max} \cdot \frac{m_3 + n_4}{n_4 \cdot l_3}$ $ m_3 + n_4 $

Tabelle 8. Grenzwerte der Stütz- und Schnittkräfte eines Gerberbalkens.

	Gleichmäßig verteilte Belastung g	Stetige Nutzlast p		Lastenzug		
		positiver Grenzwert	negativer Grenzwert	positiver Grenzwert	negativer Grenzwert	
Q_1		$-g \cdot \frac{x_1^2 + m_1(m_1 + n_1) - x_1^2}{2l_1}$	$+p \cdot \frac{x_1^2}{2l_1}$	$-p \cdot \frac{x_1^2 + m_1(m_1 + n_1)}{2l_1}$	$Q_{1\max}$ eines einfachen Trägers von der Länge $ l_1 $	$\left[Q_{1\min} + M_{0\max} \cdot \frac{m_1 + n_1}{n_2 \cdot l_1} \right]$ eines einfachen Trägers von der Länge $ m_1 + n_1 $
Q_1^{\max}		$-g \cdot \frac{l_1^2 + m_1(m_1 + n_1)}{2l_1}$	—	$-p \cdot \frac{l_1^2 + m_1(m_1 + n_1)}{2l_1}$	—	$A_{1\max} + M_{0\max} \cdot \frac{m_1 + n_1}{n_2 \cdot l_1}$ $ l_1 $
Q_2		$+g \cdot \left(l_2 + \frac{n_2}{2} \right)$	$+p \cdot \left(l_2 + \frac{n_2}{2} \right)$	—	—	—
Q_2^{\max}		$+g \cdot \frac{l_2^2 + m_2(m_2 + n_2) - m_3(m_3 + n_3)}{2l_2}$	$+p \cdot \frac{l_2^2 + m_2(m_2 + n_2)}{2l_2}$	$-p \cdot \frac{m_3(m_3 + n_3)}{2l_2}$	$A_{1\max} + M_{0\max} \cdot \frac{m_2 + n_2}{n_3 \cdot l_2}$ $ l_2 $	$M_{0\max} \cdot \frac{m_3 + n_3}{ m_3 + n_3 }$
Q_3		$+g \cdot \frac{x_3^2 + m_3(m_3 + n_3) - [x_2^2 + m_2(m_2 + n_2)]}{2l_3}$	$+p \cdot \frac{x_3^2 + m_3(m_3 + n_3)}{2l_3}$	$-p \cdot \frac{x_2^2 + m_2(m_2 + n_2)}{2l_3}$	$Q_{0\max} + M_{0\max} \cdot \frac{m_2 + n_2}{n_4 \cdot l_3}$ $ l_3 $	$Q_{0\min} + M_{0\max} \cdot \frac{m_2 + n_2}{n_4 \cdot l_3}$ $ l_3 $
M_1		$+g \cdot \left(\frac{x_1 \cdot x_1'}{2} - x_1 \cdot m_1 \cdot \frac{(m_1 + n_1)}{2l_1} \right)$	$+p \cdot \frac{x_1 \cdot x_1'}{2}$	$-p \cdot \frac{x_1 \cdot m_1 \cdot (m_1 + n_1)}{2l_1}$	$M_{1\max}$ $ l_1 $	$M_{0\max} \cdot \frac{x_1 \cdot (m_1 + n_1)}{n_2 \cdot l_1}$ $ m_1 + n_1 $
M_2		$-g \cdot \frac{x_2 \cdot (x_2 + n_2)}{2}$	—	$-p \cdot \frac{x_2 \cdot (x_2 + n_2)}{2}$	—	$M_{0\max} \cdot \frac{x_2 + n_2}{n_2}$ $ x_2 + n_2 $
M_3		$-g \cdot \left[\frac{x_3^2 \cdot m_3 \cdot (m_3 + n_3) + x_2 \cdot m_2 \cdot (m_2 + n_2) - x_2 \cdot x_2'}{2l_3} \right]$	$+p \cdot \frac{x_3 \cdot x_3'}{2}$	$-p \cdot \frac{x_2 \cdot m_2 \cdot (m_2 + n_2) + x_2 \cdot m_2 \cdot (m_2 + n_2)}{2l_3}$	$M_{0\max}$ $ l_3 $	$M_{0\max} \cdot \frac{x_2 \cdot (m_2 + n_2)}{n_3 \cdot l_2} + M_{0\max} \cdot \frac{x_2 \cdot (m_2 + n_2)}{n_4 \cdot l_2}$ $ m_2 + n_2 $
C_0		$+g \cdot \left[\frac{l_1}{2} \cdot \frac{m_1(m_1 + n_1)}{2l_1} \right]$	$+p \cdot \frac{l_1}{2}$	$-p \cdot \frac{m_1(m_1 + n_1)}{2l_1}$	$A_{0\max}$ $ l_1 $	$M_{0\max} \cdot \frac{m_1 + n_1}{n_2 \cdot l_1}$ $ m_1 + n_1 $
C_1		$+g \cdot \frac{(m_1 + l_1) \cdot (m_1 + l_1 + n_2)}{2l_1}$	$+p \cdot \frac{(m_1 + l_1) \cdot (m_1 + l_1 + n_2)}{2l_1}$	—	$M_{0\max} \cdot \frac{l_1 + m_1 + n_2}{n_2 \cdot l_1}$ $ l_1 + m_1 + n_2 $	—
C_{II}		$+g \cdot \frac{(m_2 + l_2)(m_2 + l_2 + n_3) - m_3(m_3 + n_3)}{2l_2}$	$+p \cdot \frac{(m_2 + l_2) \cdot (m_2 + l_2 + n_3)}{2l_2}$	$-p \cdot \frac{m_3(m_3 + n_3)}{2l_2}$	$M_{0\max} \cdot \frac{n_2 + m_2 + l_2}{n_3 \cdot l_2}$ $ n_2 + m_2 + l_2 $	$M_{0\max} \cdot \frac{m_3 + n_3}{n_4 \cdot l_2}$ $ m_3 + n_3 $



16. Stabwerke mit drei Gelenken.

Stabwerke mit drei Gelenken werden als Bogen- und Rahmenträger gebaut. Die wirtschaftlichen Vorteile der Bogenform zur Übertragung von Lasten ohne wesentliche Beanspruchung der Biegefestigkeit des Baustoffes sind bekannt. Sie gelten besonders für den Massivbau, da hier druckfeste Baustoffe mit geringer Zugfestigkeit verwendet werden. Zwei Gelenke liegen in der Regel an den Stützpunkten. Sie werden als Kämpfergelenke bezeichnet. Durch ihre Verschiebung gegen die Mitte des Stabzugs entsteht der Auslegebogenträger. Die Abb. 80 zeigen die allgemeine Anordnung eines Stabwerks mit drei Gelenken. Die Kämpfergelenke liegen in der Regel in gleicher Höhe. Die Rahmenform wird stets dem Zweck des Bauwerks angepaßt.

Um bei senkrechter Belastung waagerechte Stützkkräfte zu vermeiden, kann ein gerades oder gesprengtes Zugband vorgesehen werden (Abb. 81). Das Stabwerk bleibt trotzdem statisch bestimmt, wenn ein Stützpunkt längsbeweglich ist. Die Höhenlage und die allgemeine Anordnung des Zugbandes richten sich nach der Form des Rahmens und nach dem Bauvorhaben.

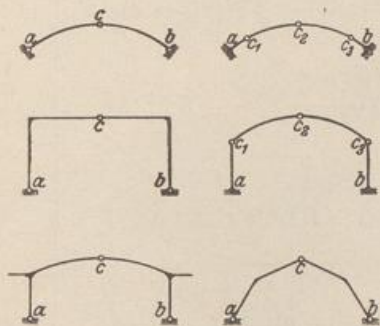


Abb. 80 a-f. Bauformen des Bogenträgers und Rahmens mit 3 Gelenken.

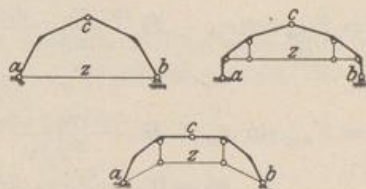


Abb. 81 a-c. Bauformen statisch bestimmter Bogenträger und Rahmen mit Zugband.

Analytische Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die Stützkkräfte K_l und K_r werden in je zwei Komponenten zerlegt, von denen A' und B' senkrecht sind, während H'_a und H'_b die Richtung der Verbindungsgeraden der Kämpfergelenke a, b erhalten (Abb. 82). Bei beliebiger Belastung sind $A' + B'$ und $H'_a - H'_b$ entgegengesetzt gleich der Projektion aller Lasten auf diese Richtungen. Senkrechte Belastung ergibt daher $H'_a = H'_b$. Bei beliebiger Belastung sind die Komponenten A', B' und $H'_a - H'_b$ ebenso groß wie die Stützwiderstände eines stellvertretenden Balkens von der Stützweite l . Sie erzeugen in diesem mit der Belastung die Schnittkräfte V_0, H'_0, Q_0, M_0 . Die Schnittkräfte des Bogen- oder Rahmenträgers werden daher aus diesen durch Superposition mit dem Anteil aus der Stützkraft H'_a oder H'_b erhalten. Mit $H'_{0b} = 0$ und M_{1m}, Q_{1m} für $H'_b = 1$ ist

$$\text{und } \left. \begin{aligned} M_m &= M_{0m} + M_{1m} H'_b, & Q_m &= Q_{0m} + Q_{1m} H'_b \\ K_l &= A' \uparrow H'_a = A \uparrow H_a, & K_r &= B' \uparrow H'_b = B \uparrow H_b. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Die Stützkkräfte $H'_a = H_a / \cos \alpha_0, H'_b = H_b / \cos \alpha_0$ werden aus dem Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einem Bogenschenkel berechnet. Ihr Moment in bezug auf das Mittengelenk c ist Null. Bei geradem Zugbande tritt an Stelle von H'_a oder H'_b dessen Längskraft Z . Ist das Zugband gesprengt (Abb. 81, b-c), so wird die Längskraft des Stabes unter dem Mittengelenk berechnet.

Die analytische Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte eignet sich am besten für senkrechte, unter Umständen auch für waagerechte Belastung. Dagegen verdient die zeichnerische Lösung den Vorzug bei beliebig gerichteten Lasten.

Im Bauwesen bildet der symmetrische Bogenträger mit gleichhoch liegenden Kämpfergelenken die Regel. Hierfür ist $\alpha_0 = 0$, $l_1/l = l_2/l = 1/2$.

Bei einer zusammenhängenden Untersuchung werden ebenso wie für den Balkenträger zunächst die Stützkkräfte A' und B' , hieraus die Schnittkräfte V_{0m} und nach (86) M_{0m} bestimmt. Aus $M_{0c} - Hf = 0$ folgt die Bogenkraft H , so daß nach (128) die Biegemomente M_m oder die Kernmomente $M'_{i,m}$, $M_{a',m}$ angegeben werden können. Die Querkraft wird nach (128) oder aus $Q_m s_m = M_m - M_{m-1}$ berechnet.

b) Waagerechte Lasten am linken Bogenschenkel (Abb. 82b).

$$\left. \begin{aligned} H_b - H_a = H_w &= \int_{y'_1}^{y'_2} w dy' + \sum_1^n W_k; & B' &= \frac{1}{l} \left(\int_{y'_1}^{y'_2} w y' dy' + \sum_1^n W_k c'_k \right), \\ A' = -B' + H_w \operatorname{tg} \alpha_0, & & H_b &= B' \frac{l_2}{l}, & H_a &= H_b - H_w; \\ A = -B = -B' \frac{h-d}{f} &= V_{0m}, & H_m &= - \left(H_a + \int_{y'_1}^{y'_m} w dy' + \sum_1^r W_k \right), \\ M_m = A' x_m - \int_{y'_1}^{y'_m} w (y'_m - y') dy' - \sum_1^r W_k (y'_m - c'_k) &- H_a y_m = M_{0m} - H_a y_m. \end{aligned} \right\} (130)$$

Schaulinien der Schnittkräfte. Um die Momente und Kernmomente in einfacher Weise zeichnerisch darzustellen, wird der Ansatz (128) umgeformt. Bei senkrechter Belastung ist mit $H_m^{(a)}$ nach Abb. 88

$$-H_m^{(a)} = H_a = H_b = H = \text{const}$$

$$M_m = M_{0m} - H y_m = H \left(\frac{M_{0m}}{H} - y_m \right) = H (\bar{y}_m - y_m) = H \bar{b}_m. \quad (131)$$

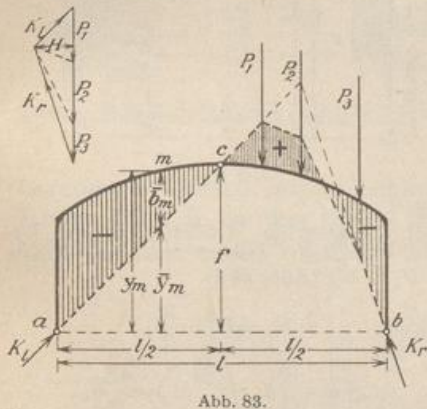


Abb. 83.

Das Biegemoment ist nach Abb. 83 proportional einer Strecke \bar{b}_m , die als Differenz zweier Strecken \bar{y}_m und y_m gefunden wird. y_m ist entweder Ordinate des Schwerpunktes oder eines der beiden Kernpunkte des Querschnitts m . $\bar{y}_m = M_{0m}/H$ ist proportional dem Biegemoment des stellvertretenden Balkens, das nach Abschnitt 13 berechnet und aufgezeichnet werden

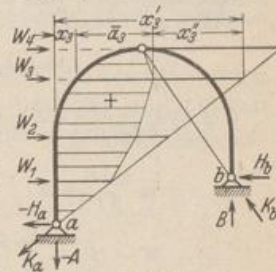


Abb. 84.

den kann. Das Vorzeichen der Differenz $\bar{b}_m = \bar{y}_m - y_m$ ist in Abb. 83 eingetragen.

Lösung bei senkrechter Belastung auf dem rechten Abschnitt des Rahmens Abb. 83:

$$H = \frac{M_{0c}}{f} = \frac{\sum P b_k}{2f}, \quad \bar{y}_m = \frac{M_{0m}}{H}, \quad M_m = H (\bar{y}_m - y_m) = H \bar{b}_m.$$

Das Biegemoment mit einer positiven Differenz \bar{b}_m erzeugt an der Innenseite des Stabes Zugspannungen.

Bei waagerechter Belastung ist die Komponente H_m der Schnittkraft veränderlich, dagegen $A = -B = V_{0m}$ konstant. Daher kann nunmehr die Stützkraft A in dem Ansatz des Biegemomentes als Multiplikator gewählt werden. Für einen

stellvertretenden Balken mit $H_{0a} = 0$ ist nach Abb. 84

$$M_m = M_{0m} - H_a y_m = -A \left(-\frac{M_{0m}}{A} + \frac{H_a}{A} y_m \right) = -A \left(+\frac{H_a}{A} y_m - x_m + \frac{\sum W_k (y_m - c_k)}{A} \right), \quad (132)$$

$$M_m = -A (+x'_m - x_m - x''_m) = -A \bar{a}_m = B \bar{a}_m.$$

Das Biegemoment ist in diesem Falle proportional einer horizontalen Strecke \bar{a}_m , die sich aus drei Anteilen zusammensetzt. Die Kräfte A und H_a sind nach (130) negativ. Das negative Vorzeichen ist in der Definition von x''_m enthalten. Die Strecke x'_m ist durch die Komponenten H_a und A bestimmt. Die Strecke x''_m wird bei Einzellasten für alle Punkte m berechnet und von der zugeordneten Strecke x'_m abgezogen. Diese punktweise Bestimmung kann bei einer gleichförmigen Belastung durch einfache geometrische Konstruktionen ersetzt werden (Abb. 84).

Zeichnerische Darstellung der Momente eines symmetrischen Dreigelenkrahmens.

a) Symmetrische Kranbelastung (Abb. 85 a).

$$P_1 = P_2 = P; \quad H = P \frac{c}{f}, \quad \bar{y}_m = \frac{M_{0m}}{H},$$

$$M_m = H(\bar{y}_m - y_m) = H \bar{b}_m, \quad M_{m'} = H \bar{b}_{m'},$$

$$M_{m''} = H \bar{b}_{m''}, \quad \bar{b}_{m''} = -y_{m''}.$$

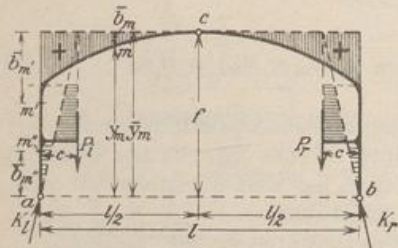


Abb. 85 a.

b) Einseitige Kranbelastung (Abb. 85 b).

$$H = \frac{Pc}{2f}, \quad \bar{y}_m = \frac{M_{0m}}{H}, \quad M_m = H(\bar{y}_m - y_m),$$

$$M_n = H \bar{b}_n, \quad M_{m'} = H \bar{b}_{m'}, \quad M_{m''} = H \bar{b}_{m''}.$$

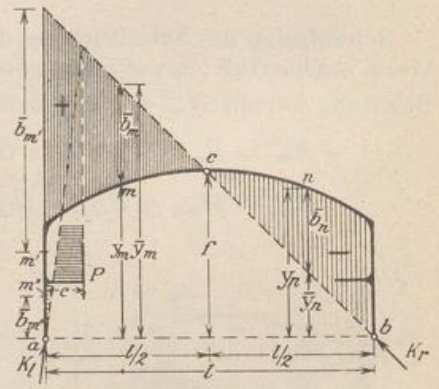


Abb. 85 b.

c) Waagerechte Windlast im Bereich des Pfostens (Abb. 85 c).

$$A = \frac{w h^2}{2l} = B; \quad H = \frac{w h^2}{4f};$$

$$W - H = \frac{w h}{4f} (4f - h).$$

Momente im Riegel und Pfosten b:

$$M_m = H(\bar{y}_m - y_m) = H \bar{b}_m; \quad M_{m'} = H \bar{b}_{m'}.$$

Momente im Pfosten a:

$$M_n = A \left[\frac{W - H}{A} y_n - \frac{w y_n^2}{2A} \right] = A \bar{a}_n.$$

d) Waagerechte Windlast auf die Laterne, angenähert ersetzt durch die Kräfte W . $U_1 = U_r$ (Abb. 85 d).

$$-H_a = H_b = \frac{W}{2},$$

$$M_m = -\frac{W}{2} \bar{b}_m; \quad M_n = \frac{W}{2} \bar{b}_n.$$

Im linken Bogenschenkel ist zur besseren Übersicht das Vorzeichen des Biegemomentes M_m an Stelle des Vorzeichens der Streckendifferenz \bar{b}_m eingetragen.

Zeichnerische Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte. Die Schnittkräfte N_m, M_m, Q_m eines jeden der beiden Ufer des Querschnitts m können zu einer resultierenden Kraft $R_m^{(l)}$ zusammengefaßt werden, die entgegengesetzt gleich zur Resultierenden $R_m^{(a)}$ der äußeren Kräfte ist, die am Stabe links oder rechts vom Querschnitt m angreifen. Sie ist in einer Mittelkraftlinie aus der Belastung und

den zugeordneten Stützkräften enthalten, deren Momente in bezug auf die Gelenke a, b, c Null sind. Die Mittelkraftlinie wird mit Kraft- und Seileck gezeichnet. Sie ist durch die drei Punkte a, b, c bestimmt.

Die Stützkräfte K_l, K_r setzen sich aus den Anteilen A', A'' und B', B'' der Be-

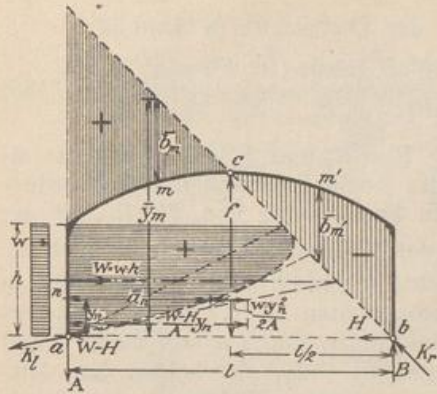


Abb. 85c.

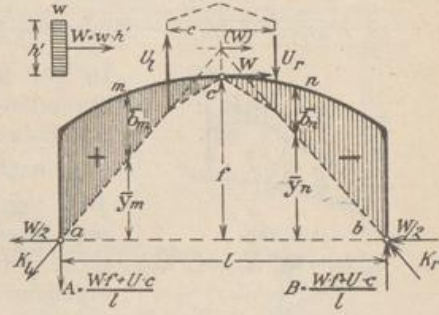


Abb. 85d.

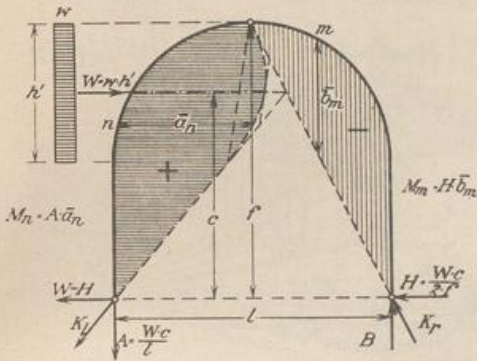


Abb. 86 a. Waagerechte Belastung im Bereich des Riegels.

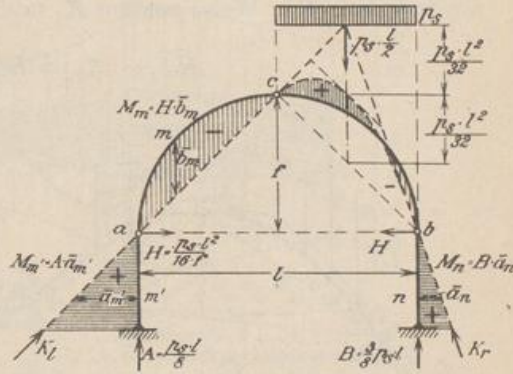


Abb. 86 b. Biegemomente eines Dreigelenkrahmens mit hochgerückten Kämpfergelenken für einseitige Schneelast.

lastung eines jeden Bogenschenkels zusammen. Daher werden die resultierenden Kräfte R_I, R_{II} zu den beiden Teilbelastungen gezeichnet und bei ungünstigen Schnittpunkten durch 2 Komponenten ersetzt, die nach den benachbarten Ge-

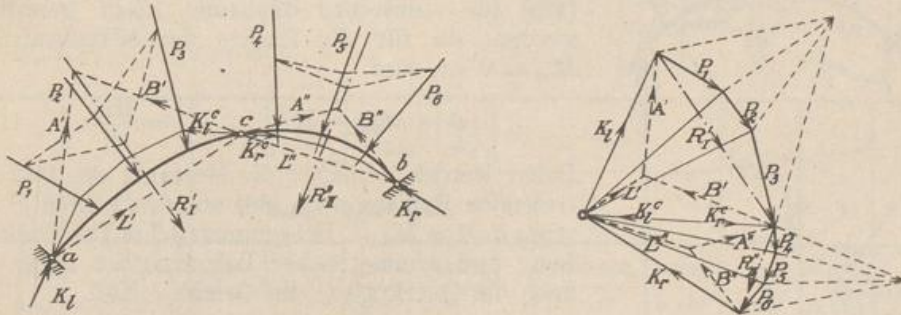


Abb. 87. Mittelkraftlinie eines Dreigelenkbogens für beliebig gerichtete Einzellasten.

lenken a, c und c, b gerichtet sind. Die dem Mittengelenk zugeordneten Teilkräfte werden wieder in 2 Komponenten nach $c \div a$ und $c \div b$ zerlegt (Abb. 87). Damit ist die Mittelkraftlinie bestimmt, aus der die Momente oder Kernmomente nach

Abb. 88 berechnet werden. Längs- und Querkraft N_m, Q_m sind in dem Kräfteck enthalten. Die zeichnerische Untersuchung führt bei einer beliebig gerichteten Belastung schneller zum Ziele als die Rechnung.

Graphostatische Beziehungen zur Bildung der Stützkkräfte in Abb. 87:

$$\left. \begin{aligned} (P_1, \dots, P_n) &\equiv (R'_I, R''_{II}); (R'_I, A', B') \equiv 0, (R''_{II}, A'', B'') \equiv 0; (B', A'') \equiv (L', L''), \\ K_I &\equiv A' \uparrow L', \quad K_r = B'' \uparrow L'', \quad (P_1, \dots, P_n, K_I, K_r) \equiv 0. \end{aligned} \right\} (133)$$

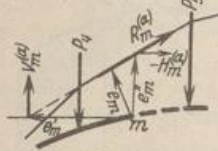


Abb. 88.

$$M_m = R_m^{(a)} e_m = H_m^{(a)} e'_m = V_m^{(a)} e''_m.$$

In Abb. 89 sind $\Sigma'P = R'_I$ und $\Sigma''P = R''_{II}$ die resultierenden Kräfte der jedem Bogenschenkel zugeordneten Belastung. Die Bestimmung von R'_I, R''_{II} ist der Lage nach durch das Kräfteck \bar{O} vorbereitet worden. Jede von ihnen wird graphisch mit \bar{L}' und \bar{L}'' durch zwei parallele Komponenten A'_I, C'_I und C''_{II}, B''_{II} ersetzt, deren Wirkungslinien durch a und c oder c und b gehen. Die Summe $(C'_I + C''_{II})$ der beiden dem Mittengelenk zugeordneten Komponenten ist dann nach L' und L'' zerlegt und mit den in a und b anfallenden senkrechten Komponenten A'_I und B''_{II} zusammengesetzt worden. Auf diese Weise werden K_I und K_r gefunden.

$$\bar{H} \bar{b}_c = M_{0c} = H f; \quad H = \frac{\bar{b}_c}{f} \bar{H}. \quad (134)$$

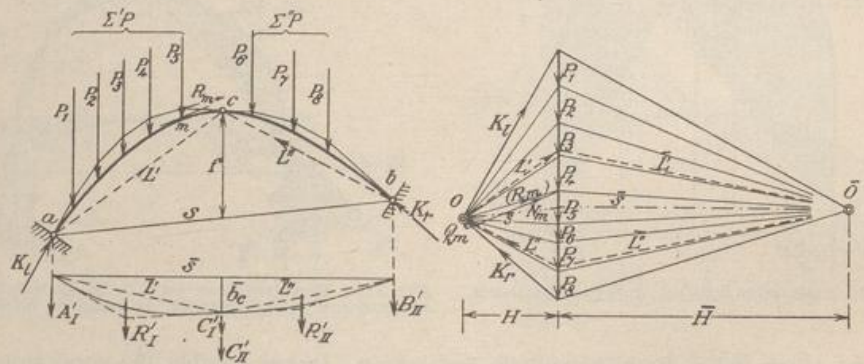
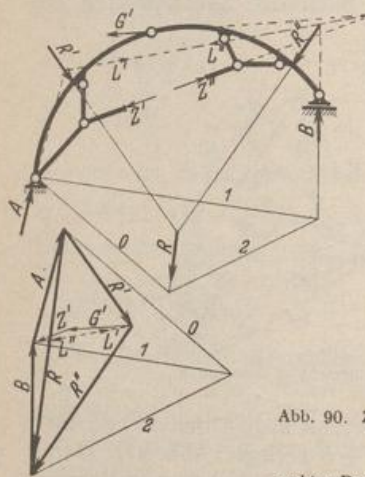


Abb. 89. Mittelkraftlinie eines Dreigelenkbogens für senkrechte Lasten.



Die Ordinaten der Mittelkraftlinie \bar{b}_m können nach (128) für senkrechte Belastung leicht gerechnet werden, da für die Punkte der Mittelkraftlinie $M_m = 0$ ist, also

$$0 = M_{0m} - H \bar{b}_m; \quad \bar{b}_m = \frac{M_{0m}}{H}. \quad (135)$$

Daher werden zunächst die Momente des stellvertretenden Balkens nach (86) aus den Lasten P bestimmt. $H = M_{0c}/f$. Bei symmetrischer Trägeranordnung und symmetrischer Belastung ist außer M_c auch die Querkraft Q_c im Gelenk c Null.

Abb. 90. Zeichnerische Ermittlung der Stütz- und Verbindungskräfte eines Bogenträgers mit Zugband.

$$\begin{aligned} R' \uparrow R'' &= R, & (R, A, B) &= 0, \\ \text{rechter Bogenschenkel } (B \uparrow R'', Z'', G'') &= 0, & G' \uparrow G'' &= 0, \\ \text{linker Bogenschenkel } (A \uparrow R', Z', G') &= 0, & Z' \uparrow Z'' &= 0. \end{aligned}$$

Berechnung der Mittelkraftlinie einer Dreigelenkbogenbrücke.

1. Lasten: a) Eigengewicht: $G_m = G'_m + P_{mg}$; Abb. 91a.

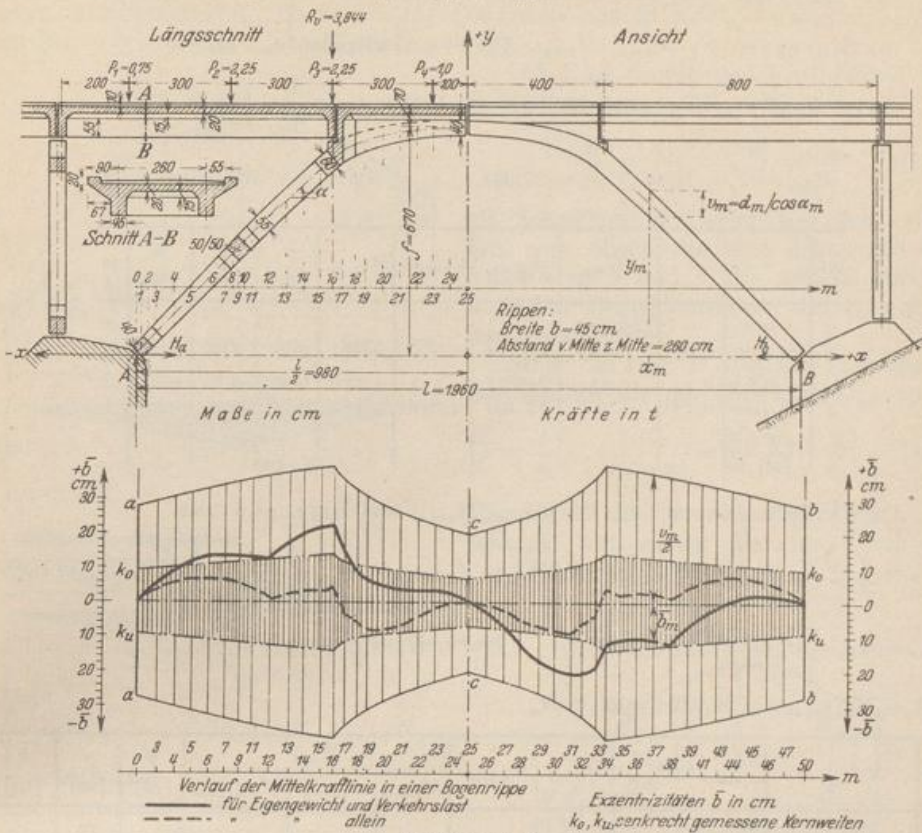


Abb. 91a und b.

G'_m : Einzellasten aus dem Gewicht g t/m einer Bogenrippe nach (91) in t.

P_{mg} : Einzellasten aus dem Gewicht der Querriegel und der Schleppträger in t (s. Tabelle).
Längen in m.

$$G'_m = \frac{c_m}{6} (g_{m-1} + 2g_m) + \frac{c_{m+1}}{6} (2g_m + g_{m+1}) = G'_{m,1} + G'_{m,2}$$

$$c_m = c_{m+1} : G'_m = \frac{c_m}{6} (g_{m-1} + 4g_m + g_{m+1})$$

$$g_m = v_m b_m \gamma ; \quad \gamma = 2,4 \text{ t/m}^3$$

m	d_m	$\cos \alpha_m$	v_m	b_m	g_m
0-2	0,40	0,70	0,57	0,80	1,09
3	0,41	0,70	0,58	0,45	0,63
4	0,43	0,70	0,61	0,45	0,66
.
.

m	x_m	c_m	g_m	g_{m-1}	$\frac{c_m}{6}$	$2g_m$	$\frac{c_{m+1}}{6}$	$G'_{m,1}$	$G'_{m,2}$	G'_m	P_{mg}	G_m	$G_m x_m$
				$g_{m-1} + 4g_m + g_{m+1}$				$\frac{c_m}{6}$					
0	-9,80	-	1,09	-	-	3,282	0,028	-	0,093	0,093	-	0,093	-0,911
1	-9,63	0,17	1,09	6,564				0,028		0,186	0,348	0,534	-5,142
2	-9,46	0,17	1,09	3,282	0,028	2,814	0,042	0,093	0,117	0,210	-	0,210	-1,987
3	-9,21	0,25	0,63	2,346	0,042	1,911	0,083	0,098	0,159	0,257	-	0,257	-2,367
.

b) Verkehrslasten $P_{m,e}$: $P_{10,e} = R_v = 3,844 \text{ t}$; $P_{23,e} = P_4 = 1,0 \text{ t}$.

2. Ordinaten $\bar{y} = M_{0m}H$ und Exzentrizitäten $\bar{b} = \bar{y} - y$ der Mittelkraftlinie:

V_{0m}, M_{0m} : Querkraft und Moment des stellvertretenden Balkens (a, b) nach (86).

a) Eigengewicht (V_{0mg}, M_{0mg}). Aus Symmetriegründen: $V_{0cg} = 0$.

$$H_{ag} = H_{bg} = H_g = M_{0cg}/l = 24,638 \text{ t}; \quad \text{Probe: } H_g = \frac{1}{2f} (l \sum_a^c G_m - 2 \sum_a^c G_m x_m),$$

$$V_{0ag} = A_g = B_g = \sum_a^c G_m = 27,924 \text{ t}, \quad \sum_a^c G_m x_m = -108,579 \text{ mt.}$$

m	x	c	G_m	V_{0mg}	$V_{0mg}c$	M_{0mg}	\bar{y} [m]	y [m]	\bar{b} [m]	m
a	-9,80	-	(27,924)							a
0	-9,80	0,00	0,093	27,924	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0
1	-9,63	0,17	0,534	27,831	4,731	4,731	0,19	0,18	0,01	1
2	-9,46	0,17	0,210	27,297	4,640	9,372	0,38	0,36	0,02	2
.
.

b) Verkehrslasten ($A_p, B_p, V_{0mp}, M_{0mp}$) und Eigengewicht:

$$A_p = \frac{1}{2} \sum_a^b P_{mv} + \frac{1}{l} \sum_a^b P_{mv} x_m = 3,258 \text{ t} = V_{0ap}; \quad B_p = \frac{1}{2} \sum_a^b P_{mv} - \frac{1}{l} \sum_a^b P_{mv} x_m = 1,586 \text{ t},$$

$$H_{ap} = H_{bp} = H_p = M_{0cp}/l = 2,321 \text{ t}; \quad \text{Probe: } H_p = \frac{1}{2f} (l A_p - 2 \sum_a^c P_{mv} x_m),$$

$$H_{p+g} = M_{0c(p+g)}/l = 26,959 \text{ t} = H_p + H_g.$$

m	x	c	P_{mv}	$P_{mv}x$	V_{0mp}	$V_{0mp}c$	M_{0m}			\bar{y} [m]	y [m]	\bar{b} [m]	m
							M_{0mp}	M_{0mg}	$M_{0m(p+g)}$				
a	-9,80	-	(3,258)									a	
0	-9,80	0,00	-	-	3,258	0,0000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0
1	-9,63	0,17	-	-	3,258	0,5538	0,554	4,731	5,285	0,20	0,18	0,02	1
2	-9,46	0,17	-	-	3,258	0,5538	1,107	9,372	10,479	0,39	0,36	0,03	2
3	-9,21	0,25	-	-	3,258	0,8144	1,922	16,144	18,066	0,67	0,62	0,05	3
.
.

Exzentrizitäten: $\bar{b}_m = \bar{y}_m - y_m$. Abb. 91b.

Einflußlinien der Schnittkräfte. Die Grenzwerte der Randspannungen σ und der Schubspannungen τ werden aus den Einflußlinien der Kernmomente und der Querkraft bestimmt. Die Einflußlinie der Bogenkraft ist nach $H = M_{0c}/l$ die Einflußlinie des Moments eines stellvertretenden Balkens mit der Stützweite l und den ausgezeichneten Ordinaten l_1/f und l_2/f (Abb. 92b). Die Einflußlinien der Schnittkräfte können nach (128) als Unterschied der Einflußlinien für N_0, M_0, Q_0 , also für die Schnittkräfte eines Balkenträgers von der Stützweite l und der mit N_1, M_1, Q_1 erweiterten Einflußlinie der Bogenkraft H gebildet werden. Auf diese Weise entstehen Einflußlinien mit den Lastscheiden E in den Abständen e, e' .

Die Einflußlinien der Schnittkräfte des Dreigelenkbogens lassen sich in einfacher Weise aufzeichnen, da deren Ordinaten an den Stützpunkten denjenigen eines Balkenträgers von der Stützweite e entsprechen. Daher werden zunächst die Einflußlinien der Schnittkräfte des stellvertretenden Balkenträgers mit der Stützweite e aufgezeichnet und daraus diejenigen des Bogenträgers entwickelt.

Die Stellung der beweglichen Lasteinheit über einer Lastscheide des linken Bogenschenkels liefert zwei Bedingungen. Die erste bestimmt das Verhältnis der Komponenten der Stützkraft K_b , da $B'l_2 = Hf$. Die zweite besteht in $M_m = 0 = A'x_m - Hy_m$ oder $Q_m = 0 = A' \cos \alpha_m - H' \sin (\alpha_m - \alpha_0)$.

Die Lastscheide der Einflußlinie des Biegemoments M_m wird mit

$$\frac{B'}{H} = \frac{f}{l_2}, \quad \frac{A'}{H} = \frac{y_m}{x_m} \quad (136)$$

als Schnittpunkt zweier Geraden erhalten, von denen die eine durch die Gelenkmitten b und c , die andere durch a und den Bezugspunkt m des Biegemoments festliegt.

Steht die Last P über der Lastscheide der Einflußlinie der Querkraft Q_m , so ist

$$\frac{B'}{H} = \frac{f}{l_2}, \quad \frac{A'}{H/\cos \alpha_0} = \frac{\sin (\alpha_m - \alpha_0)}{\sin (90 - \alpha_m)} \quad (137)$$

Hierdurch sind zwei gerade Linien bestimmt, von denen die eine durch die

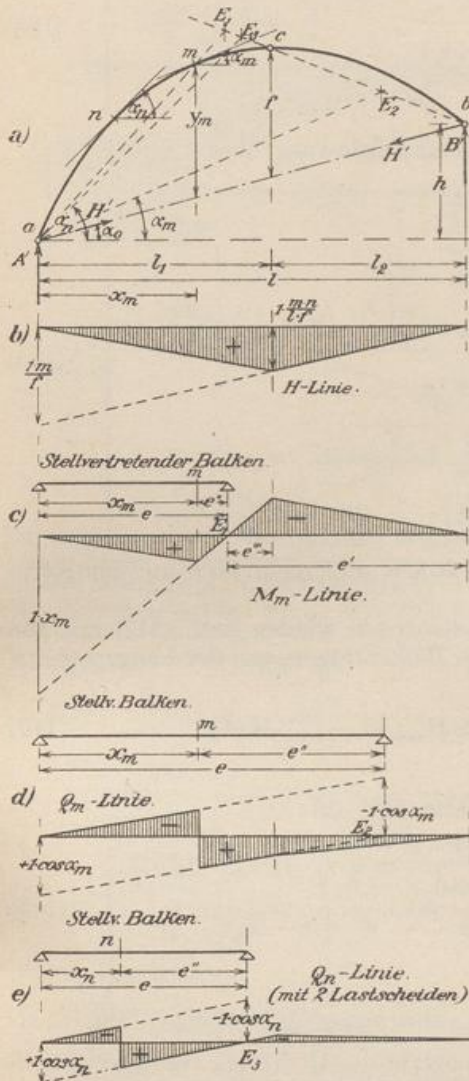


Abb. 92. Die Einflußlinien des Dreigelenkbogens.

In Abb. 92 b ist $1 \cdot \frac{m \cdot n}{l \cdot f}$ durch $1 \cdot \frac{l_1 l_2}{l f}$ und $1 \cdot \frac{m}{f}$ durch $1 \cdot \frac{l_1}{f}$ zu ersetzen.

den. Mit $\Delta = 1$, dem Wege der gesuchten Schnittkraft, entsteht ein Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsplan der Stabkette, aus dem die Einflußlinien für die senkrecht und waagrecht gerichtete Einzellast abgeleitet werden. Die zugeordneten Elemente der beiden Linienzüge stehen aufeinander senkrecht. Die Schnittkraft wird nach (104) mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen bestimmt (Abb. 58).

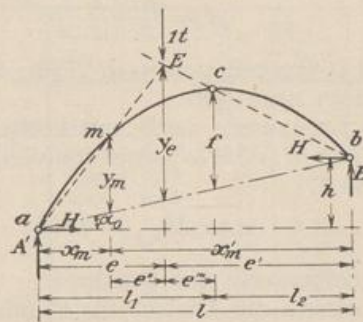


Abb. 93.

Punkte b und c , die andere durch a parallel zur Tangente an die Bogenachse in m verläuft.

Die Einflußlinien lassen sich nach S. 49 ebenso einfach aus der Momentanbewegung einer zwangläufigen Stabkette entwickeln, welche daraus entsteht, daß die gesuchte Schnittkraft M , M_a , M_b , Q oder N als äußere Kraft eingeführt wird. Jeder Stabkette ist eine Polfigur zugeordnet, nach welcher die Lastscheiden und Eckpunkte der Einflußlinie festgelegt werden.

Grenzwerte der Schnittkräfte. a) Grenzwerte der Momente oder Kernmomente. Abszisse e der Lastscheide E (Abb. 93):

$$\left. \begin{aligned} M_m = M_{0m} - H y_m = 0 &= \frac{l-e}{l} x_m - \frac{e l_2}{l f} y_m, \\ e = \frac{l}{\frac{l_2}{l} \frac{l}{x_m} \frac{y_m}{f} + 1}; & \quad e' = \frac{l}{\frac{l_2}{l} \frac{x_m}{l} \frac{f}{y_m} + 1}; & \quad \frac{e'}{e} = \frac{l_2}{l} \frac{l}{x_m} \frac{y_m}{f}; \\ e + e' = l; & \quad e'' = e - x_m; & \quad e''' = l_1 - e. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Grenzwerte $\max M_{mp}$ und $\min M_{mp}$ bei Streckenbelastung über e und e' :

$$\left. \begin{aligned} \max M_{mp} &= \frac{p l^2 x_m}{2} \frac{1 - \frac{x_m}{l} - \frac{l_2}{l} \frac{y_m}{f}}{1 + \frac{l_2}{l} \frac{l}{x_m} \frac{y_m}{f}}; \\ H &= \frac{p l}{2} \left(\frac{e}{l} \right)^2 \frac{l_2}{f}; & \quad V_{0m} &= \frac{p l}{2} \left[\frac{e}{l} \left(2 - \frac{e}{l} \right) - \frac{2 x_m}{l} \right]; \\ \min M_{mp} &= + \frac{p l^2}{2} \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \frac{\frac{l}{l_1} \frac{x_m}{l} - \frac{y_m}{f}}{\frac{l_2}{l} \frac{l}{x_m} \frac{f}{y_m} + 1}; \\ H &= \frac{p l}{2} \left[\frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \frac{l}{f} - \left(\frac{e}{l} \right)^2 \frac{l_2}{f} \right]; & \quad V_{0m} &= \frac{p e'^2}{2 l}. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

N und Q ergeben sich nach (128), die Längskräfte außerdem auch aus den Kernmomenten nach (52).

Die Grenzwerte der Schnittkräfte aus Lastenzügen werden nach (117) mit den Momenten $M(e)$, $M(e')$ eines stellvertretenden Balkenträgers von der Länge e und e' entwickelt.

$$\max M_{mp} = M(e), \quad \min M_{mp} = - \frac{y_m}{f} M(e'). \quad (140)$$

b) Grenzwerte der Querkraft.

Abszisse e der Lastscheide E_2 oder E_3 (Abb. 92d-e):

$$\left. \begin{aligned} Q_m = V_{0m} \cos \alpha_m - H \frac{\sin(\alpha_m - \alpha_0)}{\cos \alpha_0} = 0 &= \frac{l-e}{l} - \frac{e}{l} \frac{l_2}{f} (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_0), \\ e = \frac{l}{1 + (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_0) \frac{l_2}{f}}; & \quad e' = l - e, & \quad e'' = e - x_m. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Die Lastscheide ist reell, solange $e \leq l_1$, also $\operatorname{tg} \alpha_m \geq \frac{f}{l_1} + \operatorname{tg} \alpha_0$. Die Lastscheide ist imaginär, wenn $e > l_1$. Die Grenzwerte der Querkraft aus einer gleichförmigen Nutzlast p müssen daher für zwei Fälle angegeben werden.

1. Reelle Lastscheide E_3 nach Abb. 92e:

$$\max Q_{np} = \frac{p l}{2} \left(\frac{e''}{l} \right)^2 \frac{l}{e} \cos \alpha_n; \quad \min Q_{np} = Q_{np} - \max Q_{np}. \quad (142a)$$

2. Imaginäre Lastscheide E_2 nach Abb. 92d:

$$\max Q_{mp} = Q_{mp} - \min Q_{mp}; \quad \min Q_{mp} = - \frac{p l}{2} \left(\frac{x_m}{l} \right)^2 \frac{l}{e} \cos \alpha_m. \quad (142b)$$

Q_{mp} entsteht durch volle Belastung des Bogenträgers l . Die Grenzwerte der Querkräfte aus Lastenzügen werden am einfachsten nach (78) mit den Ordinaten der Einflußlinien angegeben.

Die übrigen Ergebnisse aus a und b lassen sich nach den Ansätzen des folgenden Beispiels in Form einer Tabelle mit den Leitwerten einer Gruppe ausgezeichneter Querschnitte berechnen.

Berechnung der Schnittkräfte der Dreigelenkbogenbrücke¹ Abb. 94.

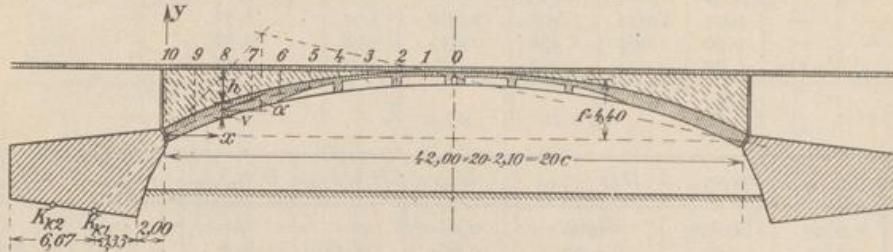


Abb. 94 a. Form des Tragwerks.



Abb. 94 b. Einflußlinie für das Kernmoment K_{k1} der Bodenfuge.

1. Geometrische Grundlagen. $y_m, y_{a',m}, y_{i',m}$ sind die Abstände des Schwerpunktes und der Kernpunkte in den angegebenen Schnitten y_m , bezogen auf eine durch die Mitte des Kämpfergelenks verlaufende Koordinatenachse. $w_{a',m}, w_{i',m}$ sind die senkrecht gemessenen Kernweiten.

$l = 42,00 \text{ m}, \quad f = 4,40 \text{ m}, \quad c = 2,10 \text{ m},$
 $\frac{l}{f} = 9,55, \quad \frac{l}{4f} = 2,39, \quad h = \left(\frac{v_2}{2} + f\right) - \left(\frac{v}{2} + y\right).$

2. Belastung:

- a) Eigengewicht, bezogen auf 1,05 m Tiefe als Rippenabstand. Gewölbe:
 Schnitt 0 bis 5: $g_v = 0,376 + 0,72 v$.
 Schnitt 6 bis 10: $g_v = 2,52 v$.
 Aufschüttung: $g_u = 1,89 h$. Versteinerung: $g_p = 0,409 \text{ t/m}$.
- b) Gleichmäßig verteilte Last: $p = 0,500 \cdot 1,05 = 0,525 \text{ t/m}$.
- c) Lastenzug E .

m	$w_{i',m}$ [m]	$w_{a',m}$ [m]	y_m [m]	$y_{i',m}$ [m]	$y_{a',m}$ [m]
0	—	—	4,40	—	—
1	0,15	0,20	4,35	4,50	4,15
2	0,16	0,21	4,25	4,41	4,04
3	0,20	0,28	4,09	4,29	3,81
4	0,21	0,28	3,87	4,08	3,59
5	0,22	0,28	3,57	3,79	3,29
6	0,17	0,17	3,20	3,37	3,03
7	0,17	0,17	2,67	2,84	2,50
8	0,16	0,16	2,01	2,17	1,85
9	0,16	0,16	1,13	1,29	0,97
10	—	—	0,00	—	—

3. Schnittkräfte:

a) Momente aus Eigengewicht $g = g_p + g_u + g_v$ oder $G_m = (g_{m-1} + g_m) \frac{c}{2}$;

$M_m = M_{0m} + H(f - y_m); \quad M_{a',m} = M_m + H w_{a',m}; \quad M_{i',m} = M_m - H w_{i',m}.$

M_{0m} bedeutet das Biegemoment eines stellvertretenden Freitragers $0 \div 10$.

$M_{0m} = M_{0(m-1)} - \left(V_{m-1} + \frac{G_m}{2}\right) c$ und $M_{00} = 0, \quad V_0 = 0. \quad V_{m-2} = \sum_1^{m-2} G_k,$ also

$\left(V_{m-1} + \frac{G_m}{2}\right) = \left(V_{m-2} + \frac{G_{m-1}}{2}\right) + \frac{G_{m-1} + G_m}{2} = \frac{G_1}{2} = \sum_1^m \frac{G_{k-1} + G_k}{2},$

$H = -\frac{M_{0,10}}{f} = \frac{532,5}{4,40} = 121,0 \text{ t};$ Ordinaten der Mittelkraftlinie nach (135): $\bar{y}_m = f - \frac{M_{0m}}{H}.$

¹ Die vollständige Lösung ist in der I. Aufl. S. 56 angegeben.

Die Beziehungen bilden die folgende Rechenvorschrift:

m	h_m	g_a	v_m	g_v	g_m	$g_{m-1}+g_m$	G_m	$(V_{m-1} + \frac{G_m}{2})$	$(V_{m-1} + \frac{G_m}{2}) \cdot c$
0	—	—	0,90	1,024	1,433	—	—	0,00	0,00
1	—	—	0,94	1,054	1,463	2,896	3,04	1,52	3,19
2	—	—	0,96	1,067	1,476	2,939	3,08	4,58	9,62
3	0,06	0,113	0,97	1,074	1,596	3,072	3,22	7,73	16,23
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

m	$M_{0,m}$	$f - y_m$	$H(f - y_m)$	M_m	$H w_{t',m}$	$H w_{a',m}$	$M_{t',m}$	$M_{a',m}$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	—	—	0,00	0,00
1	3,19	0,05	6,05	2,86	18,14	24,2	- 15,28	+ 27,1
2	12,81	0,15	18,15	5,34	19,35	25,4	- 14,01	+ 30,7
3	29,04	0,31	37,50	8,46	24,2	33,9	- 15,74	+ 42,4
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·

b) Grenzwerte der Momente und Querkräfte aus gleichmäßig verteilter Last p : Mit Hilfe der Ausdrücke (138)

$$e = \frac{2l}{\frac{l}{f} \cdot \frac{y}{x} + 2}; \quad e' = \frac{l}{1 + 2 \frac{f}{l} \cdot \frac{x}{y}}; \quad e'' = e - x; \quad e''' = e' - \frac{l}{2}$$

wird nach Abb. 92c $\max M_p = p \cdot \frac{x e''}{2}$; $\min M_p = \frac{-p \cdot l}{4f} e''' \cdot y$.

m	x	y	$y : x$	$x : y$	e	e'	e''	e'''	$\frac{x \cdot e''}{2}$	$\frac{l}{4f} y$	$\max M_p$	$\min M_p$
-----	-----	-----	---------	---------	-----	------	-------	--------	-------------------------	------------------	------------	------------

Obere Kernpunkte i'

1	18,90	4,50	0,238	4,20	19,66	22,33	0,76	1,33	7,18	14,30	+ 3,77	- 7,51
2	16,80	4,41	0,263	3,81	18,62	23,35	1,82	2,35	15,28	24,75	+ 8,02	- 12,99
3	14,70	4,29	0,292	3,43	17,55	24,45	2,85	3,45	20,93	35,33	+ 10,98	- 18,53
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Untere Kernpunkte a'

1	18,90	4,15	0,219	4,56	20,50	21,47	1,60	0,47	15,12	4,66	+ 7,94	- 2,45
2	16,80	4,04	0,240	4,16	19,55	22,45	2,75	1,45	23,50	13,99	+ 12,33	- 7,35
3	14,70	3,81	0,259	3,86	18,77	23,23	4,07	2,23	29,90	20,30	+ 15,70	- 10,65
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Die Grenzwerte der Querkräfte ergeben sich nach (142a), (142b) aus:

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{y_{m-1} - y_{m+1}}{x_{m-1} - x_{m+1}} = \frac{y_{m-1} - y_{m+1}}{4,20}; \quad e = \frac{l}{1 + \frac{l}{2f} \operatorname{tg} \alpha}; \quad \frac{l}{2f} = 4,775$$

$$Q_p = \frac{p}{2} \left((l - 2x) - \frac{l^2}{4f} \operatorname{tg} \alpha \right) \cos \alpha; \quad \frac{p}{2} = 0,26 \text{ t/m}; \quad \frac{l^2}{4f} = 100,2 \text{ m.}$$

Für $e > \frac{1}{2} l$ (eine Lastscheide):

$$\min Q_p = -\frac{p}{2} \frac{x^2}{e} \cos \alpha; \quad \max Q_p = Q_p - \min Q_p.$$

Für $e < \frac{1}{2} l$ (zwei Lastscheiden):

$$e'' = e - x; \quad \max Q_p = \frac{p}{2} \frac{e''^2}{e} \cos \alpha; \quad \min Q_p = Q_p - \max Q_p.$$

m	y	$\operatorname{tg} \alpha$	$\cos \alpha$	$\frac{l}{2f} \cdot \operatorname{tg} \alpha$	e	x	$l - 2x$	$\frac{l^2}{4f} \operatorname{tg} \alpha$	$l - 2x - \frac{l^2}{4f} \operatorname{tg} \alpha$	Q_p
0	4,40	0,0000	1,000	0,000	42,0	21,00	0,00	0,00	0,00	0,000
1	4,35	0,0357	0,999	0,170	35,9	18,90	4,20	3,58	+ 0,62	+ 0,163
2	4,25	0,0619	0,998	0,295	32,4	16,80	8,40	6,21	+ 2,19	+ 0,574
.
.

m	e	x	e''	$\frac{p}{2e} \cos \alpha$	$\min Q_p$	Q_p	$\max Q_p$
0	42,0	21,00	—	0,00625	- 2,755	0,000	+ 2,755
1	35,9	18,90	—	0,00730	- 2,605	+ 0,163	+ 2,768
2	32,4	16,80	—	0,00808	- 2,280	+ 0,571	+ 2,854
.
.

c) Rechenvorschrift für Lastenzüge (140). α Ungünstigste Laststellung (Abb. 92c).
 Größtmomente für Rechtsfahrt, Belastungsbereich = e
 Kleinstmomente für Linksfahrt, Belastungsbereich = e' .

Bedingung für die ungünstigste Laststellung (102): $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r < e : e'' < \mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1} \\ \text{oder} \quad \mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r < e' : e''' < \mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1} \end{array} \right.$

Für $\max M_{l',m}$, $\max M_{a',m}$. (Lastenzug E.)

m	e	e''	$e : e''$	n	r	$r - 1$	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{P}_r	\mathfrak{P}_{r-1}	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1}$
Obere Kernpunkte i'											
1	19,66	0,76	25,87	9	1	0	165	20	0	8,25	∞
2	18,62	1,82	10,23	8	1	0	145	20	0	7,25	∞
3	17,55	2,85	6,16	8	2	1	145	40	20	3,63	7,25
.
.

m	e	e''	$e : e''$	n	r	$r - 1$	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{P}_r	\mathfrak{P}_{r-1}	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1}$
Untere Kernpunkte a'											
1	20,50	1,60	12,82	9	1	0	165	20	0	8,25	∞
2	19,55	2,75	7,11	9	2	1	165	40	20	4,12	8,25
3	18,77	4,07	4,61	8	2	1	145	40	20	3,63	7,25
.
.

Für $\min M_{l',m}$, $\min M_{a',m}$.

m	e'	e'''	$e' : e'''$	n	r	$r - 1$	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{P}_r	\mathfrak{P}_{r-1}	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1}$
Obere Kernpunkte i'											
1	22,33	1,33	16,78	11	1	0	205	20	0	10,25	∞
2	23,35	2,35	9,94	12	2	1	225	40	20	5,63	11,25
3	24,45	3,45	7,09	12	2	1	225	40	20	5,63	11,25
.
.

m	e'	e'''	$e' : e'''$	n	r	$r - 1$	\mathfrak{P}_n	\mathfrak{P}_r	\mathfrak{P}_{r-1}	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_r$	$\mathfrak{P}_n : \mathfrak{P}_{r-1}$
Untere Kernpunkte a'											
1	21,47	0,47	45,7	11	1	0	205	20	0	10,25	∞
2	22,45	1,45	15,46	11	1	0	205	20	0	10,25	∞
3	23,23	2,23	10,41	12	2	1	225	40	20	5,63	11,25
.
.

β) Grenzwerte der Momente (119), (140) und Abb. 92c:

$$\max M_p = + \frac{e''}{e} (\mathfrak{C}_n + \mathfrak{P}_n b_n) - \mathfrak{C}_r; \quad \min M_p = - \frac{y}{f} \left[\frac{e'''}{e'} (\mathfrak{C}_n + \mathfrak{P}_n b_n) - \mathfrak{C}_r \right];$$

$\max M_{i',m}, \max M_{a',m}$.

m	e	e''	n	r	b_n	\mathbb{P}_n	$\mathbb{P}_n b_n$	\mathbb{E}_n	$\mathbb{E}_n + \mathbb{P}_n b_n$	$\frac{e''}{e} (\mathbb{E}_n + \mathbb{P}_n b_n)$	\mathbb{E}_r	$\max M_p$
Obere Kernpunkte i												
1	19,66	0,76	9	1	0,9	165	148	1770	1918	74,1	0	74,1
2	18,62	1,82	8	1	3,3	145	479	1118	1597	150,0	0	150,0
3	17,55	2,85	8	2	2,7	145	392	1118	1510	245	30	215
.
.
Untere Kernpunkte a'												
1	20,50	1,60	9	1	0,9	165	148	1770	1918	149,7	0	149,7
2	19,55	2,75	9	2	0,3	165	49	1770	1819	256	30	226
3	18,77	4,07	8	2	2,7	145	392	1118	1510	328	30	298
.
.

$\min M_{i',m}, \min M_{a',m}$.

m	e'	e'''	n	r	b_n	\mathbb{P}_n	$\mathbb{P}_n b_n$	\mathbb{E}_n	$\mathbb{E}_n + \mathbb{P}_n b_n$	$\frac{e'''}{e'} (\mathbb{E}_n + \mathbb{P}_n b_n)$	\mathbb{E}_r	$-\frac{f}{y}$	y	$\min M_p$
Obere Kernpunkte i'														
1	22,33	1,33	11	1	0,0	205	0	2295	2295	136,7	0	136,7	4,50	-139,7
2	23,35	2,35	12	2	0,0	225	0	2602	2602	262	30	232	4,41	-262,5
3	24,45	3,45	12	2	0,0	225	0	2602	2602	367	30	337	4,29	-328
.
.
Untere Kernpunkte a'														
1	21,47	0,47	11	1	0,0	205	0	2295	2295	39,6	0	39,6	4,15	-37,4
2	22,45	1,45	11	1	0,0	205	0	2295	2295	148,4	0	148,4	4,04	-136,3
3	23,23	2,23	12	2	0,0	225	0	2602	2602	250	30	220	3,81	-190,5
.
.

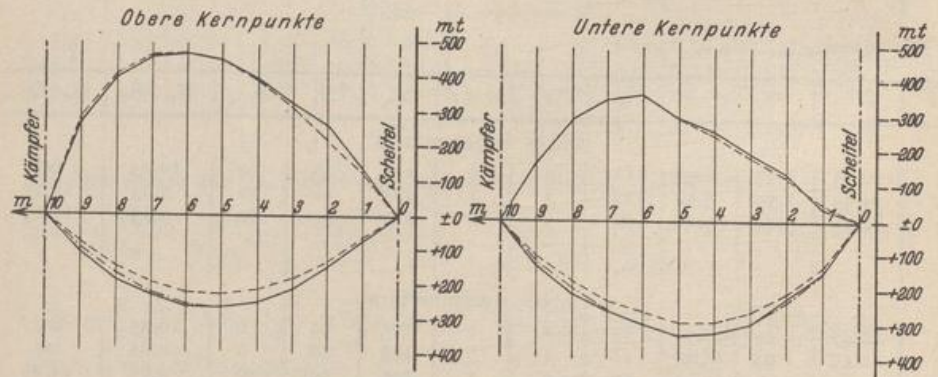


Abb. 95. Kernmomente aus Lastenzug E.

— Kernmomente aus Lastenzug E der Reichsbahn.
 - - - Kernmomente aus der Ersatzlast $p_E = 8,89 \text{ t/m}$ der (BE) für Lastenzug E.
 - · - · Positive Kernmomente aus $p_0 = 10,35$ (obere Kernpunkte) und $p_0 = 9,97$ (untere Kernpunkte).
 p_0 ist diejenige Ersatzlast, die sich mit (139) dem Ergebnis aus Einzellasten am besten anschmiegt.

Tabelle 9. Schnittkräfte am symmetrischen Dreigelenkbogen.

$$\frac{x}{l} = \xi, \quad \frac{x'}{l} = \xi', \quad \xi - \xi^2 = \omega_R, \quad \xi - \xi^3 = \omega_D, \quad \frac{y}{l} = \eta, \quad \frac{y'}{l} = \eta'.$$

Belastung*	Auflagerdruck	Biegemoment
	$A = B = \frac{pl}{2}$ $H_a = H_b = \frac{pl^2}{8f}$	$M_m = \frac{pl^2}{8}(4\omega_R - \eta)$ Für Parabelbogen: $M_m = 0$
	$A = \frac{3}{8}pl$ $B = \frac{1}{8}pl$ $H_a = H_b = \frac{pl^2}{16f}$	$M_m = \frac{pl^2}{16}(8\omega_{R1} - 2\xi_1 - \eta_1)$ $M_k = \frac{pl^2}{16}(2\xi'_2 - \eta_2)$
	$A = \frac{pca'}{l}$ $B = \frac{pca}{l}$ $H_a = H_b = \frac{pca}{2f}$	$M_n = \frac{pca}{2}\left(2\frac{a'}{a}\xi_1 - \eta_1\right)$ $M_m = \frac{pca}{2}\left(2\frac{a'}{a}\xi_2 - \eta_2 - \frac{(x_2 - b_1)^2}{ac}\right)$ $M_k = \frac{pca}{2}(2\xi'_3 - \eta_3)$ auch gültig für $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$
	$A = -\frac{wf^2}{2l}$ $B = \frac{wf^2}{2l}$ $H_a = -\frac{3}{4}wf$ $H_b = \frac{1}{4}wf$	$M_m = -\frac{wf^2}{2}\left(\xi_1 - \frac{3}{2}\eta_1 + \eta_1^2\right)$ $M_k = \frac{wf^2}{4}(2\xi'_2 - \eta_2)$
	$A = P\frac{a'}{l}$ $B = P\frac{a}{l}$ $H_a = H_b = P\frac{a}{2f}$	$M_m = P\frac{a}{2}\left(2\frac{a'}{a}\xi_1 - \eta_1\right)$ $M_k = P\frac{a}{2}(2\xi'_2 - \eta_2)$
Sonderfall $a = \frac{l}{2}$	$A = B = \frac{P}{2}$ $H_a = H_b = \frac{Pl}{4f}$	$M_m = P\frac{l}{4}(2\xi_1 - \eta_1)$

* Die Momente sind dargestellt durch $\bar{b} = \frac{M}{H_b}$, $\bar{a} = \frac{M}{B}$.

Tabelle 9 (Fortsetzung).

Belastung	Auflagerdruck	Biegemoment
	$A = -W \frac{a}{l}$ $B = W \frac{a}{l}$ $H_a = -W \frac{a' + f}{2f}$ $H_b = W \frac{a}{2f}$	$M_n = -W \frac{a}{2} \left(2 \xi_1 - \frac{a' + f}{a} \eta_1 \right)$ $M_m = -W \frac{a}{2} \left(2 \xi_2 - \frac{a' + f}{a} \eta_2 + 2 \frac{y_2 - a}{a} \right)$ $M_k = W \frac{a}{2} (2 \xi_3 - \eta_3)$
Sonderfall $a = f$	$A = -B = -W \frac{f}{l}$ $H_a = -H_b = -\frac{W}{2}$	$M_n = -W \frac{f}{2} (2 \xi_1 - \eta_1)$
	$A = -\frac{M}{l}$ $B = \frac{M}{l}$ $H_a = H_b = \frac{M}{2f}$	$M_n = -\frac{M}{2} (2 \xi_1 + \eta_1)$ $M_k = \frac{M}{2} (2 \xi_2 - \eta_1)$ <p>auch gültig für $a = 0$ oder $a = \frac{l}{2}$</p>
	$A = B = 0$ $H_a = H_b = -\frac{M}{f}$	$M_m = M \eta$
<p>$p_x = p_0 1 - 2 \xi$</p>	$A = B = \frac{p_0 l}{4}$ $H_a = H_b = \frac{p_0 l^2}{24 f}$	$M_m = \frac{p_0 l^2}{24} [2 \xi + 4 (\omega'_D - \omega_D) - \eta]$
<p>$p_x = p_0 (1 - 4 \omega_R)$</p>	$A = B = \frac{p_0 l}{6}$ $H_a = H_b = \frac{p_0 l^2}{48 f}$	$M_m = \frac{p_0 l^2}{48} [8 \omega_R (1 - 2 \omega_R) - \eta]$
<p>$p_x = p_0 [\text{Co} \alpha (2 \xi - 1) - 1]$, $\alpha = \text{Ar Co} \alpha^2 = 1,3169$.</p>	$A = B = \frac{p_0 l}{2} \left(\frac{\text{Si} \alpha}{\alpha} - 1 \right)$ $= \frac{1}{6,3452} p_0 l$ $H_a = H_b = \frac{p_0 l^2}{4 f} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \right)$ $= \frac{1}{52,1989} \frac{p_0 l^2}{f}$	$M_m = \frac{p_0 l^2}{4} \left[\frac{2}{\alpha^2} - 2 \omega_R - \frac{1}{\alpha^2} \text{Co} \alpha (2 \xi - 1) - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \right) \eta \right]$

Tabelle 9 (Fortsetzung).

Belastung	Auflagerdruck	Biegemoment
	$A = \frac{5}{24} p l$ $B = \frac{1}{24} p l$ $H_a = H_b = \frac{p l^2}{48 f}$	$M_m = \frac{p l^2}{48} [2 \xi_1 + 8 (\omega'_{D_1} - \omega_{D_1}) - \eta_1]$ $M_k = \frac{p l^2}{48} (2 \xi'_2 - \eta_2)$
	$A = -\frac{w_0 f^2}{6 l}$ $B = \frac{w_0 f^2}{6 l}$ $H_a = -\frac{5}{12} w_0 f$ $H_b = \frac{1}{12} w_0 f$	$M_m = \frac{w_0 f^2}{12} [2 (\eta'_1 - \eta_1) + \eta_1 - 2 \xi_1]$ $M_k = \frac{w_0 f^2}{12} (2 \xi'_2 - \eta_2)$

Die angegebenen Formeln gelten für jede symmetrische Bogenform $y = f(x)$. Sie sind daher auch auf beliebige symmetrische Dreigelenkrahmen anwendbar. Haben diese senkrechte Pfosten, so bedeutet y sinngemäß die Ordinate des betrachteten Querschnitts. Ein Beispiel sei hierfür angegeben:

	$A = P \frac{a'}{l}$ $B = P \frac{a}{l}$ $H_a = H_b = P \frac{a}{2 f}$	$M_n = -P \frac{a}{2} \eta_n$ $M_m = P \frac{a}{2} \left(2 \frac{a'}{a} \xi_1 - \eta_1 \right)$ $M_k = P \frac{a}{2} (2 \xi'_2 - \eta_2)$ $M_t = -P \frac{a}{2} \eta_t$
	$A = -W \frac{a}{l}$ $B = W \frac{a}{l}$ $H_a = -W \frac{a' + f}{2 f}$ $H_b = W \frac{a}{2 f}$	$M_n = W \frac{a' + f}{2} \eta_n$ $M_m = -W \frac{a}{2} \left(2 \xi_1 - \frac{a' + f}{a} \eta_1 + 2 \frac{y_1 - a}{a} \right)$ $M_k = W \frac{a}{2} (2 \xi'_2 - \eta_2)$ $M_t = -W \frac{a}{2} \eta_t$
	$A = -\frac{M}{l}$ $B = \frac{M}{l}$ $H_a = H_b = \frac{M}{2 f}$	$M_n = -\frac{M}{2} \eta_n$ $M_t = \frac{M}{2} (2 - \eta_t)$ $M_m = \frac{M}{2} (2 \xi'_1 - \eta_1)$ $M_k = \frac{M}{2} (2 \xi'_2 - \eta_2)$

Tabelle 10. Schnittkräfte am symmetrischen Dreigelenkbogen.

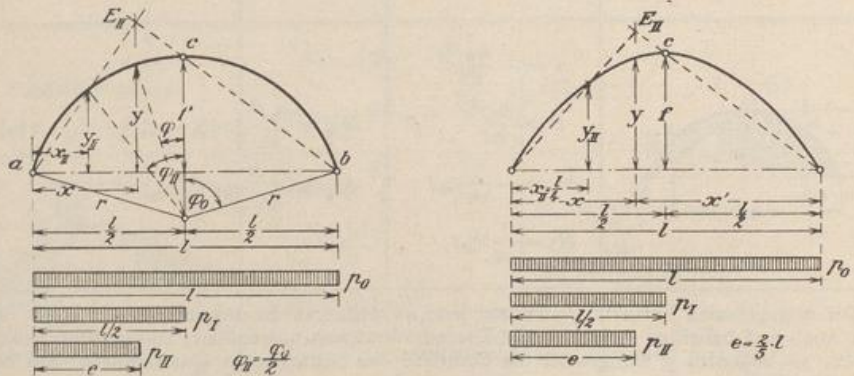
Gleichung der Bogenmittellinie:

Parabelbogen: $y = \frac{4f}{l^2} \cdot (lx - x^2) = 4f \omega_R$.

Kreisbogen: $x = \frac{l}{2} - r \cdot \sin \varphi$; $y = f - (1 - \cos \varphi) r$.

Belastungen:

- p_0 = volle gleichförmige Belastung.
- p_I = halbseitige gleichförmige Belastung.
- p_{II} = Streckenlast über dem Abschnitt e der Einflußlinie des Biegemomentes in $x_{II} = l/4$ beim Parabelbogen und in $\varphi_{II} = \varphi_0/2$ beim Kreisbogen.



f/l	Kreis					Multiplikator	Parabel, angenähert für Kreise mit $f/l = \psi \leq 1/10$
	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$		
x_{II}	0,1465	0,1995	0,2205	0,2365	0,2423	l	$l/4 = 0,2500 l$
y_{II}	0,7071	0,7272	0,7360	0,7434	0,7466	f	$\frac{3}{4} f = 0,7500 f$
e	0,2929	0,3543	0,3750	0,3890	0,3939	l	$\frac{2}{3} l = 0,4000 l$
A_0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	pl	$pl/2 = 0,5000 pl$
A_I	0,3750	0,3750	0,3750	0,3750	0,3750	pl	$\frac{3}{8} pl = 0,3750 pl$
A_{II}	0,2500	0,2915	0,3047	0,3133	0,3163	pl	$\frac{5}{8} pl = 0,3200 pl$
B_0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	pl	$pl/2 = 0,5000 pl$
B_I	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	pl	$\frac{1}{8} pl = 0,1250 pl$
B_{II}	0,0429	0,0628	0,0703	0,0757	0,0776	pl	$\frac{3}{20} pl = 0,0800 pl$
H_0	0,2500	0,3750	0,5000	0,7500	1,000	pl	$0,1250 pl/\psi$
H_I	0,1250	0,1775	0,2500	0,3750	0,500	pl	$0,0625 pl/\psi$
H_{II}	0,0429	0,0942	0,1406	0,2271	0,3104	pl	$0,0400 pl/\psi$
M_0	-0,0259	-0,0110	-0,0061	-0,0027	-0,0015	pl^2	0
M_I	0	+0,0094	+0,0124	+0,0142	+0,0149	pl^2	$+\frac{1}{84} pl^2 = +0,0156 pl^2$
M_{II}	+0,0107	+0,0154	+0,0170	+0,0182	+0,0185	pl^2	$+\frac{1}{88} pl^2 = +0,01875 pl^2$
Q_0	+0,0732	+0,0420	+0,0264	+0,0128	+0,0075	pl	0
Q_I	+0,0732	+0,0420	+0,0264	+0,0128	+0,0075	pl	0
Q_{II}	+0,0429	+0,0243	+0,0124	+0,0011	-0,0035	pl	$-0,0100 pl/\sqrt{1 + (2\psi)^2}$
N_0	-0,4268	-0,4787	-0,5722	-0,7948	-1,0326	pl	$-0,2500 pl \sqrt{1 + 1/(2\psi)^2}$
N_I	-0,2500	-0,2534	-0,2927	-0,3996	-0,5173	pl	$-0,1250 pl \sqrt{1 + 1/(2\psi)^2}$
N_{II}	-0,1036	-0,1294	-0,1634	-0,2397	-0,3191	pl	$-0,1600 \psi pl [0,8750 + 1/(2\psi)^2] / \sqrt{1 + (2\psi)^2}$