



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

13. Allgemeine Bemerkungen über Schnittkräfte, Zustands- u.  
Einflußlinien

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Z. VDI 1900 S. 1524. — Derselbe: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik S. 187. Berlin 1906. — Kármán, Th. v.: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Mitt. über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 118 und Z. VDI 1911 S. 1751. — Honegger, E., Zürich: Das Verhalten mechanisch beanspruchter Metalle. Eisenbau 1921 S. 47. — Sandel, G. D.: Über die Festigkeitsbedingungen. Leipzig 1925. — Schleicher: Der Spannungszustand an der Fließgrenze. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 199. — Derselbe: Über die Sicherheit gegen Überschreiten der Fließgrenze. Bauing. 1928 S. 253. — Náđai, A.: Plastizität und Erddruck. Handb. Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928. — Gehler, W.: Sicherheitsgrad und Beanspruchung. Bericht über die 2. Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau S. 176. Wien 1929. — Griffith, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philos. Trans. Roy. Soc. A. vol. 221 (1921) S. 163; Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924 S. 55. — Smekal, A.: Naturwiss. Bd. 10 (1922) S. 799; Handb. der Physikalischen und Technischen Mechanik Bd. 4. 2. Hälfte. Leipzig 1931. Abschn. Kohäsion der Festkörper.

## II. Das statisch bestimmte Stabwerk.

### 13. Allgemeine Bemerkungen über Schnittkräfte, Zustands- und Einflußlinien.

Die Beurteilung der Sicherheit eines Stabwerks ist mit der Feststellung des Spannungszustandes auf die Berechnung der Schnittkräfte zurückgeführt. Diese werden für eine vorgegebene Belastung, für die ungünstigste Stellung einer beweglichen Lastengruppe oder auch für die einem jeden Querschnitt zugeordnete ungünstigste Zusammenfassung aller möglichen Belastungen angegeben.

Die Schnittkräfte aus einer vorgegebenen Belastung bilden, als die Ordinaten von Schaulinien nach einer ausgezeichneten Richtung zur Stabachse aufgetragen, drei Zustandslinien, die je nach der Art der Schnittkraft als Längskraft-, Querkraft- und Momentenlinie bezeichnet werden.

Die anderen beiden Aufgaben setzen die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes voraus, nach dem eine beliebige Kraftwirkung  $W_h$ , also Stützenwiderstand, Schnittkraft oder Formänderung, als lineare Funktion der einzelnen Lasten oder Lastengruppen

$$W_h = \sum_{m=1}^{m=n} W_{hm} P_m \quad (77)$$

angegeben werden kann. Diese Voraussetzung ist nach S. 19 für alle kinematisch starren Tragwerke erfüllt, deren elastische Eigenschaften im Belastungsbereich durch das Hookesche Gesetz beschrieben werden. Das Superpositionsgesetz gilt daher nicht für Stabwerke mit veränderlicher Gliederung.

Die Grenzwerte einer Schnittkraft aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter, gebundener Einzellasten  $P_m$  oder einer stetigen, gleichgerichteten Streckenbelastung  $p(x)$  werden mit der Einflußlinie der Schnittkraft bestimmt. Ihre Ordinaten sind die graphische Darstellung der Schnittkraft  $W_{hm}$ , welche durch die verschiebbliche, jedoch in ihrer Richtung unveränderliche Last  $P_m = 1\text{ t}$  in allen möglichen Stellungen hervorgerufen wird. Die Ordinate  $W_{hm} = \eta_m$  wird von einer Bezugsgeraden im Schnittpunkt  $m'$  der Wirkungslinie von  $P_m$  in deren Richtung aufgetragen. Man unterscheidet daher Einflußlinien für senkrechte, waagerechte oder schräge Belastung des Stabzugs. Ihre Ordinaten sind im allgemeinen positiv oder negativ.

Die Einflußlinie dient zur Ermittlung der beiden ungünstigsten Stellungen der beweglichen Belastung mit

$$W_h = \sum W_{hm} P_m + \int p(x) W_{hm} dx = \max_{\min} W_{hp} \quad (78)$$

als positivem oder negativem Grenzwert. Diese können darnach auch selbst bestimmt

werden, indem die  $W_{hm} = \eta_m$  mit den zugeordneten Lasten  $P_m$  multipliziert und die Produkte addiert werden. Bei  $p(x) = \text{const}$  ist

$$W_h = p \int \eta dx = p F_\eta. \quad (79)$$

Der Begriff der Einflußlinie läßt sich auch auf eine in ihrer Richtung veränderliche Einzelkraft sowie auf ein wanderndes Kräftepaar von 1 mt anwenden und zum Einflußfeld erweitern, das die Größe einer Schnittkraft für die in bezug auf Angriffspunkt und Richtung beliebige Einzellast angibt.

Werden die beiden Grenzwerte ( $\max W_{hp}$ ,  $\min W_{hp}$ ) aus der beweglichen Belastung in Verbindung mit den positiven oder negativen Werten der Schnittkraft aus den anderen Belastungen wiederum als Ordinaten aufgetragen, so entstehen die Schaulinien der absoluten Grenzwerte  $\max W_h$ ,  $\min W_h$ . Sie liefern die ungünstigsten Spannungen des Querschnitts und damit die Unterlagen für die Bemessung des Tragwerks.

**Die Beschreibung des Tragwerks.** Die Berechnung der Schnittkräfte wird auf die ebenen Stabzüge und Stabverbindungen mit gerader, gekrümmter oder beliebig gebrochener Stabachse und mit gemeinsamer Symmetrieebene beschränkt, die in die Ebene der äußeren Kräfte fällt. Der Spannungszustand wird dann in jedem Querschnitt durch die drei Schnittkräfte  $N$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$  oder  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$  beschrieben. Diese sind Funktionen der Lasten, Stützkräfte und unter Umständen auch von statisch

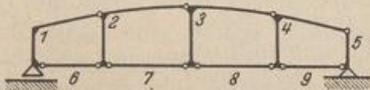


Abb. 36.  $n = 9$ ;  $t = 3$ ;  $v = 2 \cdot 12$ ;  
 $t + v = 27 = 3n$ ,  
daher statisch bestimmt.

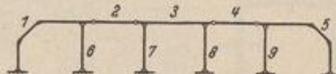


Abb. 37.  $n = 9$ ;  $t = 2 \cdot 6$ ;  $v = 2 \cdot 8$ ;  
 $t + v = 28 = 3n + 1$ ,  
daher einfach statisch unbestimmt.

unbestimmten Größen. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte zur Berechnung der Stützkräfte, so spricht man von äußerer statischer Bestimmtheit des Stabwerks. Gilt das gleiche von den Schnittkräften, so ist auch innere statische Bestimmtheit vorhanden. Die Untersuchung bleibt zunächst auf diese Tragwerke beschränkt.

Das einfachste Tragwerk ist der beliebig gestützte offene Stabzug. Zusammengesetzte Stabwerke entstehen durch die Verbindung einzelner biegesteifer Stäbe und Scheiben allein oder im Zusammenhang mit Stabzügen, deren Elemente nur Längskräfte erhalten. Beispiele der ersten Gruppe sind der Auslegeträger und Dreigelenkbogen, Hänge- und Sprengwerke gehören als versteifte Stabbogen der zweiten an. Die Scheiben werden kinematisch entweder starr oder beweglich durch reibungslose Gelenke, Führungen und Stäbe miteinander verbunden. Man spricht in diesem Zusammenhang von starrer und beweglicher Einspannung, von Gelenken und beweglicher Lagerung und idealisiert sie durch eine kinematisch gleichwertige Anordnung von Stützen- und Verbindungsstäben. Auf diese Weise entstehen drei-, zwei- und einstäbige Verbindungen mit null, ein und zwei Freiheitsgraden der Relativbewegung.

Die Kräfte, die an den Stützpunkten und in den Scheibenverbindungen durch die Belastung hervorgerufen werden, können statisch bestimmt, also mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte in der Ebene eindeutig angegeben werden, wenn die Anzahl der für jede Scheibe (Anzahl  $n$ ) und jeden freien Knoten (Anzahl  $k$ ) verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen gleich der Anzahl der Stützenbedingungen  $t$ , vermehrt um die Anzahl der Verbindungsstäbe  $v$  und die Anzahl der Systemstäbe  $s$  ist, die nur Längskräfte übertragen. Die notwendige Bedingung zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Verbindungskräfte ist daher

$$3n + 2k = t + v + s. \quad (80)$$

Sie ist auch hinreichend, wenn die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen von Null verschieden ist.

Unter dieser Voraussetzung können auch die Lasten, Stütz- oder Verbindungskräfte links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt äquivalent in  $N^{(a)}$ ,  $M^{(a)}$ ,  $Q^{(a)}$  zusammengefaßt und für den Schwerpunkt des Querschnitts oder die Kernpunkte  $i'$ ,  $a'$  der Kraftlinie angegeben werden.

**Hilfsmittel der Mechanik zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte.** Die statischen Bedingungen für die unbekanntes äußeren Kräfte einer Scheibe  $i$ , die mit einer Gruppe von gegebenen Kräften im Gleichgewicht stehen, können stets nach einem der folgenden beiden Ansätze angeschrieben werden (Abb. 38):

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \sum_i X_k = 0, \quad \sum_i Y_k = 0, \quad \sum_i M_{k,a} = 0. \\ 2. \quad \sum_i M_{k,a} = 0, \quad \sum_i M_{k,b} = 0, \quad \sum_i M_{k,c} = 0. \end{array} \right\} \quad (81)$$

Hierbei bedeuten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  drei zur Auflösung der Gleichungen geeignete Bezugspunkte für die Momente der Kräfte.

Die Aufgabe kann auch zeichnerisch gelöst werden, indem zuerst die Resultierende  $R$  aus der gegebenen Belastung durch eine Mittelkraftlinie oder durch Kraft- und Seileck bestimmt und je nach der Aufgabe in 2 oder 3 Komponenten derart zerlegt wird, daß die Gleichgewichtsbedingungen graphisch erfüllt sind. Die äußeren Kräfte einer unbelasteten, mit drei Stützen- oder Verbindungsstäben angeschlossenen Scheibe sind daher Null. Bei vier Komponenten ist die geometrische Summe von zweien in diesem Falle entgegengesetzt gleich der Summe der beiden anderen.

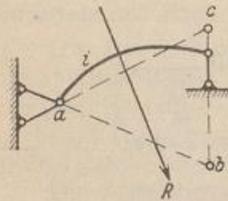


Abb. 38.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer beweglichen Scheibe oder Scheibenverbindung werden in allgemeiner Form durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgesprochen. Nach diesem ist die Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte bei Gleichgewicht der Scheibe oder Scheibenverbindung während einer virtuellen, d. h. verschwindend kleinen, mit den kinematischen Eigenschaften des Systems verträglichen Bewegung Null.

$$\left. \begin{array}{l} \delta A = \sum \mathfrak{P}_m \delta \bar{s}_m = \sum [X_m \delta x_m + Y_m \delta y_m] = 0 \\ \mathfrak{P}_m = X_m \hat{+} Y_m, \quad \delta \bar{s}_m = \delta x_m \hat{+} \delta y_m. \end{array} \right\} \quad (82)$$

Dieser Ansatz enthält ebenso viele statische Bedingungen als das System Freiheitsgrade. Die virtuellen Verschiebungen  $\delta x_m$ ,  $\delta y_m$  sind verschwindend kleine Änderungen der Koordinaten  $x_m$ ,  $y_m$  des Angriffspunktes der Kraft  $P_m$ , so daß nach S. 21

$$\delta A = \delta \sum [X_m x_m + Y_m y_m] = -\delta \Pi = 0 \quad (83)$$

und daher die potentielle Energie  $\Pi$  der äußeren Kräfte bei Gleichgewicht des Systems zum Minimum wird.

Um die konkrete Schwierigkeit des unendlich kleinen Weges  $\delta \bar{s}$  zu vermeiden, können die Verschiebungen auf die hierzu erforderliche Zeit bezogen werden. Man geht mit der auf diese Weise entstehenden mittleren Geschwindigkeit zur Grenze über und erhält aus (82) das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \sum [X_m \dot{x}_m + Y_m \dot{y}_m] = 0. \quad (84)$$

An die Stelle der unendlich kleinen Verschiebungen sind die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_m$ ,  $\dot{y}_m$  der Momentanbewegung getreten, die zeichnerisch dargestellt werden können. Sie lassen sich hier als Wege in der Zeiteinheit ansehen, um mit der Einführung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten keine begrifflichen Änderungen gegen (82) herbeizuführen.

Nach diesem Ansatz kann jede einzelne Stütz- und Schnittkraft des Stabwerks unabhängig von den unbekanntem äußeren Kräften angegeben werden, während diese bei einer Lösung nach (81) stets bekannt sein müssen, bevor sich die Schnittkräfte berechnen lassen.

**Allgemeine Ansätze zur analytischen Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte.** Die Berechnung der Stützkräfte einer einzelnen statisch bestimmt gestützten Scheibe nach (81) gilt als bekannt. Dieselben Ansätze liefern bei einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung aus  $n$  Scheiben  $3n$  lineare Gleichungen, aus denen  $t+v$  unbekanntem Stütz- und Verbindungskräfte angegeben werden können. Diese sind unendlich groß, wenn die Nennerdeterminante Null ist. Das Stabwerk besitzt dann unendlich kleine Beweglichkeit.

Die Lösung ist in der Regel einfacher, wenn die Berechnung zunächst auf die Stützenwiderstände beschränkt wird. In diesem Falle stehen die drei statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der freien, also von der Stützung gelösten Scheibenkette zur Verfügung. Hierzu treten  $3(n-1)-v$  statische Bedingungen für die äußeren Kräfte an einzelnen Scheiben oder Teilen der Scheibenverbindung, da auch relative Drehungen oder Verschiebungen der Scheiben bei Gleichgewicht ausgeschlossen sind. Daher werden  $3n-v$  lineare Gleichungen zur Bestimmung der  $t$  Stützenwiderstände verwendet. Die Lösung ist bei statisch bestimmten Stabwerken, abgesehen vom Ausnahmefall der unendlich kleinen Be-

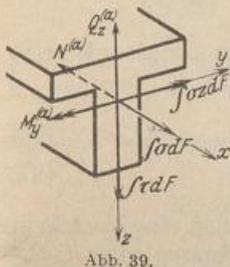


Abb. 39.

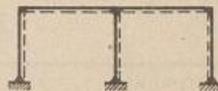


Abb. 40.

weglichkeit, eindeutig. Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, zunächst die Verbindungskräfte an den Gelenken zu bestimmen und dann erst mit diesen und den Lasten die Stützkräfte jeder einzelnen Scheibe anzugeben.

Mit den Stütz- und Gelenkkraften können die Schnittkräfte  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  oder  $M_y$ ,  $M_{y'}$ ,  $Q$  für den Stabquerschnitt abgeleitet werden. Der positive Richtungssinn ergibt sich aus der positiven Definition der Koordinaten in Abb. 17. Die Längskraft ist positiv als Zugkraft. Der Zuwachs der Normalspannung  $d\sigma_x$  beim Fortschreiten in der  $z$ -Richtung bestimmt das positive Biegemoment  $M_y$  und bedeutet eine hohle Krümmung des Stabes gegen die negative  $z$ -Achse. Mit der positiven Definition von  $\partial\tau_{xz}/\partial x \cdot dx$  und damit auch von  $dQ_z$  nach Lage und Richtung der Bezugsachsen nimmt das positive Moment bei positiver Querkraft zu. Das positive Vorzeichen von  $N_x^{(a)}$ ,  $M_y^{(a)}$ ,  $Q_z^{(a)}$  ist dann durch (44) bestimmt (Abb. 39). Umgekehrt sind mit der Dehnung und der Krümmung des Stabes durch ein positives Biegemoment auch die positiven Bezugsachsen  $x$ ,  $z$  gegeben. Bei mehrteiligen Stabzügen werden oft die Stabkanten, an denen positive Momente Zugspannungen erzeugen, zeichnerisch nach Abb. 40 hervorgehoben. Sie bezeichnen den positiven Bereich von  $z$ . Die Darstellung ist überflüssig, wenn die positiven Biegemomente stets nach Vereinbarung an der gezogenen Stabfaser aufgetragen werden.

Die Schnittkräfte  $V_a$ ,  $H_a$ ,  $M_a$  des Querschnitts  $a$  (Abb. 41) sind Stütz- oder Anschlußkräfte und daher bekannt. Die Belastung des Stabes durch Einzellasten  $\dots P_{m-1}$ ,  $P_m \dots$ , deren Wirkungslinien die Stabachse in den Punkten  $\dots (m-1)$ ,  $m \dots$  schneiden und dort nach  $P_{xm}$ ,  $P_{ym}$  zerlegt werden, liefert im Querschnitt  $k$  mit  $V_a$ ,  $H_a$ ,  $M_a$  die folgenden Schnittkräfte (Abb. 41 und 42):

$$\left. \begin{aligned} H_k &= -H_a - \sum_k P_{xm}, & V_k &= V_a - \sum_k P_{ym}, \\ M_k &= M_a + V_a x_k - H_a y_k - \sum_k P_{ym} (x_k - a_m) - \sum_k P_{xm} (y_k - c_m), \\ N_k &= -V_k \sin \alpha_k + H_k \cos \alpha_k, & Q_k &= V_k \cos \alpha_k + H_k \sin \alpha_k. \end{aligned} \right\} (85)$$

Ihr Verlauf kann durch die Differentialbeziehungen unter (48) nachgeprüft werden. Das Biegemoment wird in denjenigen Querschnitten zum Grenzwert, in denen die Querkraft Null ist oder an einer Unstetigkeitsstelle das Vorzeichen wechselt. Die positive Querkraft bedeutet zunehmende Biegemomente  $M_y$ , die konstante Querkraft den linearen Verlauf des Biegemoments.

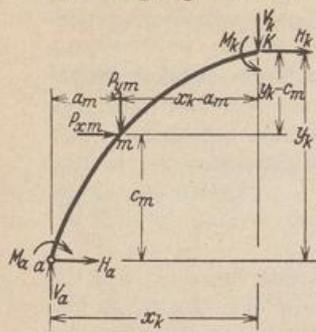


Abb. 41.

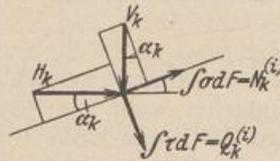


Abb. 42.

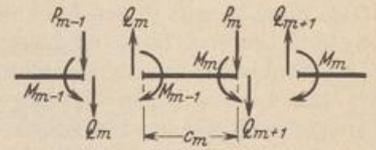


Abb. 43.

Bei Einzelbelastung winkelrecht zu einem geraden Stabe ist für den Bereich  $(m-1)$  bis  $m$  nach Abb. 43

$$\frac{dM}{dx} = Q_m = \text{const}, \text{ daher } M_m - M_{m-1} = Q_m c_m, \quad M_m = M_{m-1} + Q_m c_m. \quad (86)$$

$$P_m + Q_{m+1} - Q_m = 0, \quad Q_{m+1} = Q_m - P_m. \quad (87)$$

Lastpunkt Querschnitt	$c_m$	$P_m$	$Q_m$	$Q_m c_m$	$M_m$
0	—	$V_0$	—	—	$M_0$
1	$c_1$	$P_1$	$Q_1$	$Q_1 c_1$	$M_1$
2	$c_2$	$P_2$	$Q_2$	$Q_2 c_2$	$M_2$
3	$c_3$	$P_3$	$Q_3$	$Q_3 c_3$	$M_3$
·	·	·	·	·	·

Die Beziehungen bilden eine Vorschrift zur einfachen Berechnung aller Querkraften und Biegemomente eines statisch bestimmten Stabzugs (s. nebenstehende Tabelle).

Hierbei sind  $c, P$  gegeben, die Randwerte  $V_0, M_0$  anderweit berechnet und bekannt. Demnach ist  $Q_1 = V_0 - P_1$  usw.,  $M_1 = M_0 + Q_1 c_1$  usw.

Bei einem geraden, unter  $\alpha_m$  geneigten Stabe mit beliebig gerichteten Einzellasten  $P_m = P_{xm} \hat{+} P_{ym}$  wird

$$N_m = H_m \cos \alpha_m - V_m \sin \alpha_m, \quad Q_m = H_m \sin \alpha_m + V_m \cos \alpha_m.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Abschnitt  $c_m$  ergibt sich nach Abb. 44

$$\left. \begin{aligned} V_{m+1} - V_m + P_{ym} &= 0, & H_{m+1} - H_m + P_{xm} &= 0, & M_m - M_{m-1} &= Q_m s_m, \\ V_{m+1} &= V_m - P_{ym}, & H_{m+1} &= H_m - P_{xm}; \\ M_m &= M_{m-1} + Q_m s_m = M_{m-1} + V_m c_m + H_m e_m. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

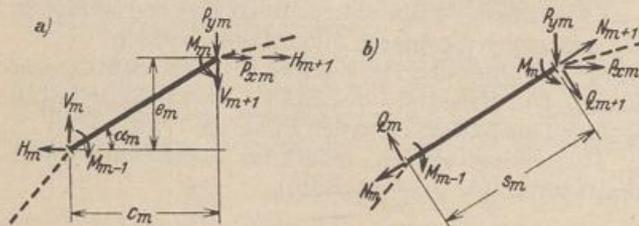


Abb. 44.

Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, die Einzellasten in zwei Komponenten, nach der Stabachse und senkrecht zu ihr zu zerlegen.

In allen Fällen ist zunächst die unmittelbare Eintragung der Lasten angenommen worden. Geschieht dies

jedoch nur in Abständen  $u_r$  in Verbindung mit Querkonstruktionen, die stets als Balken auf zwei Stützen angesehen werden, so wird die vorgelegte Belastung an den Querträgern durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten  $\dots F_{r-1}, F_r, \dots$

ersetzt (Abb. 45). Die Querkraft ist zwischen zwei Querträgern konstant, das Moment an deren Anschlußstellen ebenso groß wie bei unmittelbarer Belastung und im Bereiche von  $u_r$  linear. Demnach werden die Momente unter Einschaltung der Querschnitte  $(r-1), r$  nach (86) berechnet und die Querkräfte  $Q_r$  eines Feldes rückwärts aus

$$Q_r = \frac{M_r - M_{r-1}}{u_r} \quad (89)$$

bestimmt (Rechenvorschrift S. 44).

Bei einer stetigen Belastung  $p(x)$  des Stabzuges werden die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht eines infinitesimalen Abschnitts angeschrieben. Man unterscheidet dabei gekrümmte Stäbe ( $ds$ )

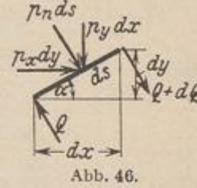


Abb. 46.

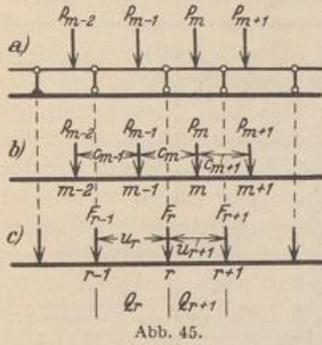


Abb. 45.

(Abb. 46) und gerade Stäbe ( $dx$ ) mit waagerechter Achse und vernachlässigt kleine Größen zweiter Ordnung.

$$\left. \begin{aligned} dQ &= -p_n(s) ds = -[p_x(s) \sin^2 \alpha + p_y(s) \cos^2 \alpha] ds; & \frac{d^2 M}{ds^2} &= -p_n(s), \\ dQ &= -p(x) dx; & \frac{dQ}{dx} &= \frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Die zweimalige Integration der Belastungsfunktion  $p$  liefert daher die Schnittkräfte  $Q$  und  $M$ , sobald die Integrationskonstanten durch die statisch bestimmte Stützung des Stabzuges bekannt sind.

Rechenvorschrift.

a) Unmittelbare Belastung (Abb. 47a):

Stützkraft  $C$  aus Momentengleichung für den Schleppträger um den Gelenkpunkt:

$$C \cdot 8,0 = P_9 \cdot 0,5 + P_{10} \cdot 3,5 + P_{11} \cdot 5,0, \quad C = 22,5 \text{ t.}$$

Stützkraft  $B$  aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt  $a$ , Stützkraft  $A$  aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt  $b$ .

$m$	$P_m$	$a_m$	$a'_m$	$P_m a_m$	$P_m a'_m$	$c_m$	$Q_m$ [t]	$Q_m c_m$	$M_m$ [mt]
$a$	(- 41,875)	0,0	+ 16,0	-	(- 670)	-	-	-	0,0
1	+ 18,0	+ 4,0	+ 12,0	+ 72	+ 216	4,0	+ 41,875	+ 167,500	+ 167,500
2	+ 18,0	+ 5,5	+ 10,5	+ 99	+ 189	1,5	+ 23,875	+ 35,813	+ 203,313
3	+ 18,0	+ 7,0	+ 9,0	+ 126	+ 162	1,5	+ 5,875	+ 8,812	+ 212,125
4	+ 18,0	+ 8,5	+ 7,5	+ 153	+ 135	1,5	- 12,125	- 18,188	+ 193,937
5	+ 18,0	+ 10,0	+ 6,0	+ 180	+ 108	1,5	- 30,125	- 45,187	+ 148,750
6	+ 20,0	+ 13,5	+ 2,5	+ 270	+ 50	3,5	- 48,125	- 168,438	- 19,688
7	+ 20,0	+ 15,0	+ 1,0	+ 300	+ 20	1,5	- 68,125	- 102,187	- 121,875
$b$	(- 145,625)	+ 16,0	$\pm$ 0,0	(- 2330)	-	1,0	- 88,125	- 88,125	- 210,000
8	+ 20,0	+ 19,0	- 3,0	+ 380	- 60	3,0	+ 57,500	+ 172,500	- 37,500
$d$	-	+ 20,0	- 4,0	-	-	1,0	+ 37,500	+ 37,500	0,000
9	+ 20,0	+ 20,5	- 4,5	+ 410	- 90	0,5	+ 37,500	+ 18,750	+ 18,750
10	+ 20,0	+ 23,5	- 7,5	+ 470	- 150	3,0	+ 17,500	+ 52,500	+ 71,250
11	+ 20,0	+ 25,0	- 9,0	+ 500	- 180	1,5	- 2,500	- 3,750	+ 67,500
$c$	- 22,5	+ 28,0	- 12,0	- 630	+ 270	3,0	- 22,500	- 67,500	+ 0,000
	$\Sigma = 0$			$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0$				

In der Regel rechnet man mit abgerundeten Werten für Stütz- und Querkräfte und gleicht die Momente nachträglich aus.

b) Mittelbare Belastung (Abb. 47b).  
Stützkkräfte wie bei unmittelbarer Belastung:

r	m	$P_m$	$c_m$	$Q_m$	$Q_m c_m$	$M_r$ [mt]	$M_r - M_{r-1}$	$u_r$	$Q_r$ [t]
	a	- 41,875	-	-	-	0,00			
I		+ 18,000	4,0	+ 41,875	+ 167,50	+ 167,50	+ 167,50	4,0	+ 41,875
	2	+ 18,000	1,5	+ 23,875	+ 35,81	+ 203,31			
	3	+ 18,000	1,5	+ 5,875	+ 8,81	+ 212,12			
II		-	1,0	- 12,125	- 12,12	+ 200,00	+ 32,50	4,0	+ 8,13
	4	+ 18,000	0,5	- 12,125	- 6,06	+ 193,94			
	5	+ 18,000	1,5	- 30,125	- 45,19	+ 148,75			
III		-	2,0	- 48,125	- 96,25	+ 52,50	- 147,50	4,0	- 36,87
	6	+ 20,000	1,5	- 48,125	- 72,19	- 19,69			
	7	+ 20,000	1,5	- 68,125	- 102,19	- 121,88			
IV	b	- 145,625	1,0	- 88,125	- 88,12	- 210,00	- 262,50	4,0	- 65,62
	8	+ 20,000	3,0	+ 57,500	+ 172,50	- 37,50			
V	d	-	1,0	+ 37,500	+ 37,50	0,00	+ 210,00	4,0	+ 52,50
	9	+ 20,000	0,5	+ 37,500	+ 18,75	+ 18,75			
	10	+ 20,000	3,0	+ 17,500	+ 52,50	+ 71,25			
VI		-	0,5	- 2,500	- 1,25	+ 70,00	+ 70,00	4,0	+ 17,50
	11	+ 20,000	1,0	- 2,500	- 2,50	+ 67,50			
VII	c	- 22,500	3,0	- 22,500	- 67,50	0,00	- 70,00	4,0	- 17,50

In der Regel wird für die Rechnung eine Differenzenbeziehung an Stelle der Differentialbeziehung (90) verwendet, der Bereich der Belastungsfunktion dabei in eine Anzahl gleich großer Intervalle unterteilt und diese selbst in jeder Stufe durch eine Gerade (1) oder einen Parabelabschnitt (2) ersetzt.

Die stetige Belastung  $p(x)$  wird in eine äquivalente Gruppe von Einzellasten  $P_m$  zerlegt, deren

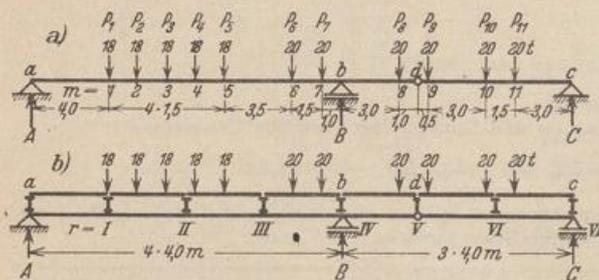


Abb. 47.

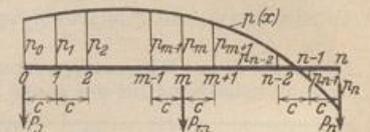


Abb. 48.

Moment in den Teilpunkten  $m, (m+1)$  mit denjenigen von  $p(x)$  übereinstimmt (Abb. 48). Die Querkräfte  $Q_m$  und die Biegemomente  $M_m$  werden dann nach den Angaben unter (86), (87) berechnet. Die Schaulinie des Biegemomentes  $M$  verläuft durch die Endpunkte der Ordinaten  $M_m$ . Sie ist daher bei geeigneter Teilung genügend genau bestimmt.

1. Die Funktion  $p(x)$  wird durch einen Geradenzug ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{6}(2p_0 + p_1), \dots, P_m = \frac{c}{6}(p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}), \dots, P_n = \frac{c}{6}(p_{n-1} + 2p_n). \quad (91)$$

2. Die Funktion  $p(x)$  wird durch Parabelabschnitte ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{2} \frac{7p_0 + 6p_1 - p_2}{12}, \dots, P_m = c \frac{p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}}{12}, \dots, P_n = \frac{c}{2} \frac{7p_n + 6p_{n-1} - p_{n-2}}{12}. \quad (92)$$

**Graphische Methoden zur Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte.** Um die Stützkkräfte einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung zeichnerisch anzugeben, werden diese zunächst für die resultierende Kraft aus der Belastung jeder einzelnen Scheibe bestimmt und dann durch Superposition zusammengefaßt. Dieses Ergebnis wird unmittelbar erhalten, wenn die Resultierende der Lasten



so daß beide Kräfte in die Richtung  $b-c$  fallen. — Aufzeichnung der Mittelkraftlinie aus  $(C_a, P_1, P_2, P_3) \equiv C_e$ . Die waagerechte Komponente von  $R_k$  im Bereiche  $a$  bis  $2$ :  $H_m = H_a$ , im Bereiche von  $2$  über  $c$  bis  $b$ :  $H_k = H_a + P_2 = -H_b$ . Im Bereiche von  $a$  bis  $d$  ist das Moment  $M_n = A \cdot a_n$ , im Bereiche von  $d$  bis  $2$  ist  $M_m = H_a \bar{b}_m$ , im Bereiche von  $2$  über  $c$  bis  $b$  ist  $M_k = H_b \bar{b}_k$ . Das Vorzeichen für  $\bar{b}$  ergibt sich aus der Abb. 50, es ist so gewählt, daß positive Momente auf der Stabinnenseite Zug erzeugen.

**Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen.** Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten setzt zur Berechnung statisch bestimmter Stütz- und Schnittkräfte einfache oder mehrfache Beweglichkeit des Stabwerks voraus. Da dieses jedoch als starr vorgeschrieben ist, werden einzelne der inneren Schnittkräfte oder Stützkräfte

$$N_r^{(i)} = \int \sigma dF, \quad M_r^{(i)} = \int \sigma z dF, \quad Q_r^{(i)} = \int \tau dF, \quad C_e \quad (95)$$

als äußere Doppelkräfte einer Stabkette verwendet, deren Elemente durch Gelenke oder Führungen verbunden sind. Die mechanisch äquivalenten Verbindungen sind in Abb. 51 wiedergegeben. Um eine Stützkraft  $C_e$  oder eine Schnittkraft  $K_r$  der Gruppe (95) unabhängig von allen übrigen zu berechnen, wird diese allein

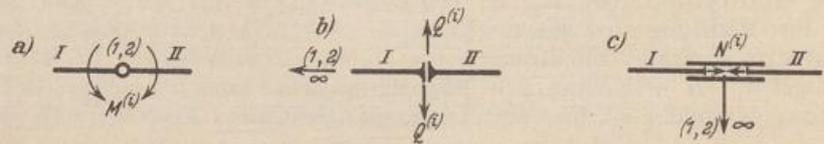


Abb. 51.

zur äußeren Doppelkraft einer Stabkette. Dabei wird die Stützenbedingung ( $e$ ) oder die zugeordnete materielle Verbindung der benachbarten beiden Querschnitte ( $r$ ) ausgeschaltet, so daß die Stabkette einen Freiheitsgrad erhält und daher zwangsläufig ist. Die unbekannte äußere Kraft  $K_r$  der Stabkette wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen so bestimmt, daß diese durch die Belastung  $\mathfrak{P}$  und  $K_r$  im Gleichgewicht ist. Die virtuelle Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Doppelkraft oder die relative Winkelgeschwindigkeit der Angriffseraden des Doppelmomentes wird mit  $\Delta_r$ , die Projektion der Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Einzellasten  $P_m$  und Stützenwiderstände  $C_e$  auf deren Richtung mit  $\delta_m$  und  $\delta_e$  bezeichnet, so daß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgender Ansatz angeschrieben werden kann:

$$K_r^{(i)} \Delta_r + \sum P_m \delta_m + \sum C_e \delta_e = 0. \quad (96)$$

Er besteht aus einer Summe von inneren Produkten, deren Vorzeichen durch den Winkel zwischen Kraft- und Geschwindigkeitsvektor bestimmt wird.

Größe und Richtung der virtuellen Geschwindigkeiten  $\Delta_r$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_e$  ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsplan der zwangsläufigen Stabkette mit  $K_r^{(i)} = 0$ , deren Momentanbewegung in der Regel durch die Geschwindigkeit  $\Delta_r = 1$  als frei wählbaren Parameter bestimmt ist. Dabei werden die Stützenbedingungen der Stabkette eingehalten, so daß deren Stützenwiderstände keine Arbeit leisten ( $\sum C_e \delta_e = 0$ ), wenn nicht bei der Momentanbewegung auch über die Geschwindigkeit anderer Punkte verfügt wird.

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m. \quad (97)$$

Die Bewegung eines Stabes  $s_k$  der Kette gegen die ruhende Ebene ist eine Drehung um ein Momentanzentrum  $O_k$ , den Hauptpol ( $k$ ) der Bewegung des Stabes  $s_k$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$  der Momentanbewegung wird im Sinne des Uhrzeigers positiv gerechnet. Der Punkt  $m$  des Stabes  $s_k$  mit dem Abstand  $r_m$  vom Momentanzentrum (Abb. 52) erhält die senkrecht zum Fahrstrahl  $r_m$  gerichtete Geschwindigkeit  $\omega_k r_m$ , so daß die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der in  $m$  an-

greifenden äußeren Kraft  $P_m$  folgenden Betrag erhält:

$$P_m \delta_m = P_m \omega_k r_m \cos \varphi_m = P_m \omega_k \varrho_m = \Theta_m \omega_k. \quad (98)$$

Hierbei ist  $\Theta_m = P_m \varrho_m$  das Moment der Kraft  $P_m$  bezogen auf den Hauptpol ( $h$ ), so daß die Arbeit der äußeren Kräfte als Produkt des Momentes  $\Theta_m$  der Kraft  $P_m$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$  der zugeordneten Scheibe gebildet wird. Daher wird die Stütz- oder Schnittkraft  $K_r^{(k)}$  eines Stabwerks mit  $n$  Scheiben oder Stäben nach (98) berechnet.

$$K_r^{(k)} = -\frac{1}{A_r} \sum_k [\omega_k \sum_u \Theta_u], \quad k = 1, \dots, n. \quad (99)$$

Die Bewegung einer Scheibe  $h$  relativ zu einer anderen Scheibe  $k$  ist ebenfalls eine Drehung um ein reelles oder imaginäres Gelenk, das Momentanzentrum der Relativbewegung, das hier als Nebenpol ( $h, k$ ) bezeichnet wird. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Scheiben ist  $\omega_{kh} = \omega_k - \omega_h$ . Die Haupt- und Nebenpole der zwangsläufigen Stabkette bilden die Polfigur. Sie bestimmt in Verbindung mit einem der Größe nach frei wählbaren Parameter, der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_k$  einer Scheibe oder der Relativgeschwindigkeit  $\omega_{kh}$ , die Winkelgeschwindigkeit aller übrigen Scheiben und damit die Geschwindigkeit aller Punkte der Stabkette. Daher ist mit der Polfigur auch der Geschwindigkeitsplan der Stabkette gefunden. Zu ihrer Aufzeichnung werden die drei folgenden Sätze aus der Kinematik der ebenen Bewegung verwendet.

1. Der Pol der Relativbewegung ( $a, b$ ) zweier Scheiben  $a$  und  $b$  gehört beiden Scheiben an. Seine Geschwindigkeit ist eindeutig, so daß die Hauptpole ( $a$ ) und ( $b$ ) mit ( $a, b$ ) auf einer Geraden liegen. Nach Abb. (53) ist  $r'_{ab} \omega_a = r'_{ab} \omega_b$ .

2. Die Nebenpole ( $a, b$ ), ( $b, c$ ), ( $a, c$ ) dreier Scheiben mit den Hauptpolen ( $a$ )  $\equiv$   $A$ , ( $b$ )  $\equiv$   $B$ , ( $c$ )  $\equiv$   $C$  liegen auf einer Geraden, da nach

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{CJ}} = \frac{r'_{ab}}{r'_{bc}} = \frac{r'_{ab} r''_{bc}}{r''_{ab} r'_{bc}} = \frac{\omega_b \omega_c}{\omega_a \omega_b} = \frac{\omega_c}{\omega_a},$$

$$\overline{AJ} \omega_a = \overline{CJ} \omega_c \quad \text{also} \quad J \equiv (a, c).$$

Die Polfigur ist die Grundlage für den Geschwindigkeitsplan der Scheibenkette, wenn die um  $90^\circ$  im Sinne des Uhrzeigers gedrehten Geschwindigkeiten aufgetragen werden. Aus der Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten zweier beliebiger Punkte  $m$  und  $n$  einer starren Scheibe

$$v_m : v_n = r_m \omega : r_n \omega = r_m : r_n \quad (100)$$

folgt ein dritter Satz:

3. Die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten einer starren Scheibe  $F$  bilden eine ähnliche und zum Momentanzentrum ähnlich liegende Figur  $F'$ .

Der Geschwindigkeitsplan soll die Stützenbedingungen der Stabkette in der Regel erfüllen, um die virtuelle Arbeit der Stützenkräfte in (96) auszuschließen. Ist jedoch in einem ersten Verschiebungsplan  $\sum C_e \delta_e \neq 0$ , so kann damit ein zweiter Verschiebungsplan derart verbunden werden, daß die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der Stützpunkte aus den beiden Momentanbewegungen Null ist. Die zweite von ihnen ist in der Regel eine Drehung der Stabkette ohne Relativbewegung der einzelnen Scheiben ( $\omega_{ik} = 0$ ).

Der Geschwindigkeitsplan einer Stabkette kann auch ohne Polfigur entwickelt werden. Dabei wird stets die Geschwindigkeit des Punktes  $c$  eines Stabzweiecks ( $l_1, l_2$ ) aus den bekannten Geschwindigkeiten der Endpunkte  $a$  und  $b$  bestimmt.

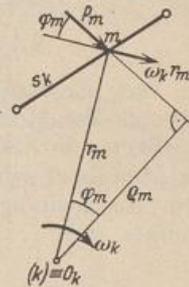


Abb. 52.

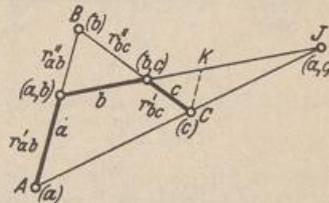


Abb. 53.

In Abb. 54 sind die gedrehten Geschwindigkeiten  $\vec{a'a'}$ ,  $\vec{b'b'}$  gegeben und die gedrehte Geschwindigkeit  $\vec{c'c'}$ , die Hauptpole (1), (2) und die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  gesucht.

Punkt  $c'$  wird nach dem dritten Satze mit  $a'c' = l_1' \parallel l_1$ ,  $b'c' = l_2' \parallel l_2$  bestimmt. Die Hauptpole (1) und (2) sind die Schnittpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Scheiben  $l_1$  und  $l_2$ . Da sich diese nicht immer aufzeichnen lassen, werden die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  aus dem Geschwindigkeitsplan abgeleitet.

$$\omega_1 = \frac{\vec{a'a'}}{r_a} = \frac{v'_a}{s'_1} = \frac{v'_c}{s'_2} = \frac{v'_a + v'_c}{s'_1 + s'_2} = \frac{l_1 - l'_1}{l_1}$$

Mit den gedrehten Geschwindigkeiten  $\vec{m'm'}$  der Angriffspunkte  $m$  der äußeren Kräfte kann der Ansatz (82) in der folgenden Form verwendet werden (Abb. 55):

$$\delta A = \sum P_m v_m \cos(P_m, v_m) = \sum P_m h_m = \sum [P_m \vec{m'm'}]. \quad (101)$$

Das Ergebnis (101) erscheint dann als Summe der Momente der äußeren Kräfte der Stabkette in bezug auf die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Die Geschwindigkeiten  $v_a, v_b, \dots$  der Gelenkpunkte  $a, b, \dots$  können auch von einem Ur-

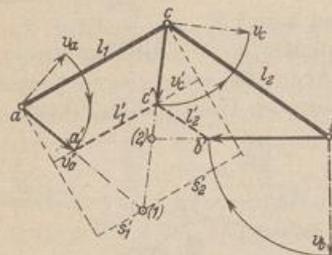


Abb. 54.

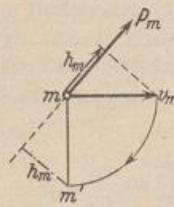


Abb. 55.

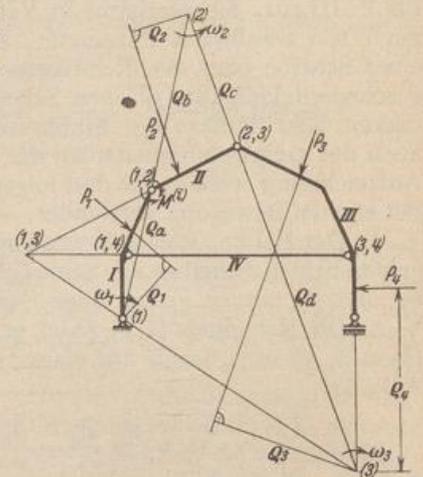


Abb. 56.

sprung  $O$  aufgetragen und der Reihe nach ebenso wie bei einem Verschiebungsplan nach Williot für  $\Delta l = 0$  aufgezeichnet werden.

Dreigelenkbogen mit Zugband unter ruhender Belastung. Bestimmung des Biegemomentes aus einem Polplan. (Abb. 56).

$$\omega_1 \varrho_a = \omega_2 \varrho_b, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{\varrho_a}{\varrho_b},$$

$$\omega_2 \varrho_c = \omega_3 \varrho_d, \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{\varrho_c}{\varrho_d} = \omega_1 \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \cdot \frac{\varrho_c}{\varrho_d},$$

$$P_1 \varrho_1 \omega_1 + P_2 \varrho_2 \omega_2 - (P_3 \varrho_3 + P_4 \varrho_4) \omega_3 - M^{(1)} (\omega_1 + \omega_2) = 0,$$

$$P_1 \varrho_1 \omega_1 + P_2 \varrho_2 \cdot \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \omega_1 - (P_3 \varrho_3 + P_4 \varrho_4) \frac{\varrho_a}{\varrho_b} \cdot \frac{\varrho_c}{\varrho_d} \omega_1 - M^{(1)} \left(1 + \frac{\varrho_a}{\varrho_b}\right) \omega_1 = 0.$$

**Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte.** Die Grenzwerte von Stütz- oder Schnittkräften aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter Einzellasten  $P_m$  oder einer stetigen gleichgerichteten Flächenbelastung  $p$  werden mit Einflußlinien berechnet (77). Diese dienen zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellung und unter Umständen nach (78) auch zur Berechnung der Grenzwerte, die jedoch oft schneller und sicherer für eine in der ungünstigsten Laststellung vorhandene ruhende Kräftegruppe angegeben werden.

Ist die Einflußlinie oder einer ihrer Teile ein Dreieck, so ist die ungünstigste Stellung eines Lastzuges in dem Bereich  $l = x + x'$  bei Linksfahrt erreicht, wenn die Ungleichungen

$$\frac{x}{l} < \frac{\sum_1^r P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_n}, \quad \frac{x}{l} > \frac{\sum_1^{r-1} P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_{r-1}}{\mathfrak{P}_n} \quad (102)$$

erfüllt sind und die schwersten Lasten in der Nähe der Spitze des Dreiecks liegen. Dabei ist  $P_1$  die erste,  $P_n$  die letzte Last im Belastungsbereich  $l$ , während  $P_r$  über der Spitze steht. Die Nachprüfung der Ungleichungen setzt eine Annahme über die Stellung des Zuges voraus, mit der  $P_1, P_r, P_n$  und damit auch die Summen  $\mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_n$  der Ungleichungen (102) gegeben sind.

Die Einflußlinien  $W_h$  werden dadurch gewonnen, daß die Einflußgröße  $W_{hm}$  als Funktion der Abszisse des Angriffspunktes  $m$  der wandernden Last  $P=1t$  analytisch ermittelt und von einer Nulllinie aus im Lastpunkt  $m$  als Ordinate  $W_{hm}$  aufgezeichnet wird. Die Richtung ist durch das Vorzeichen der beiden Halbebenen bestimmt.

Jede statisch bestimmte Stütz- oder Schnittkraft kann mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (97) als äußere Kraft einer zwangsläufigen Stabverbindung berechnet werden. Um Einflußlinien zu zeichnen, wird

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m = -\frac{1_m \delta_m}{\Delta_r} \quad (103)$$

mit  $P_m = 1t$ , der beweglichen, am Lastgurt angreifenden Einzellast von gleichbleibender senkrechter, waagerechter oder schräger Richtung. Daher sind die Wege  $\delta_m$  die Projektionen der wirklichen Verschiebungen ( $\delta_{xm} \hat{+} \delta_{ym}$ ) auf die Krafrichtung. Sie sind in einem Verschiebungsplan des Lastgurtes enthalten, der aus der Momentanbewegung der Stabkette ( $K_r^{(i)} = 0$ ) abgeleitet wird. Für die äußeren Kräfte in der Form von Momenten oder Kräftepaaren ist  $\delta_m$  die Verdrehung desjenigen Elementes der Stabkette, an welchem diese angreifen. Die Geschwindigkeit  $\Delta_r$  kann als der frei verfügbare Parameter der Bewegung angesehen werden, so daß die Geschwindigkeiten  $\delta_m$  der Punkte  $m$  des Lastgurtes Funktionen von  $\Delta_r$  sind und in der Richtung mit derjenigen der wandernden Last übereinstimmen. Sie werden also mit senkrechtem, waagerechtem oder schräg gerichtetem Vektor aufgetragen. Danach ist der Geschwindigkeitsplan der Stabkette bei geeignetem Maßstab das Einflußfeld der Schnittkraft, aus dem deren Einflußlinie für beliebig gerichtete Lastgruppen abgeleitet werden.

Während der Momentanbewegung der Stabkette beschreibt jedes Element  $s_k$  eine Drehung um den zugeordneten Hauptpol ( $h$ ), so daß sich die Geschwindigkeiten der Punkte des Lastgurtes linear mit der Entfernung vom Hauptpol ändern. Daher ist jedem Element der Stabkette eine Gerade der Einflußlinie zugeordnet. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Hauptpol liefert im Schnitt mit dem Lastgurt einen durch  $\delta_m = 0$  ausgezeichneten Punkt. Er bildet die dem Element zugeordnete Lastscheide. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Nebenpol ( $h, k$ ) trifft denjenigen Punkt auf dem Lastgurt, dessen Verschiebung  $\delta_m$  als Punkt der Scheibe  $h$  ebenso groß ist wie als Punkt der Scheibe  $k$ . Jeder Nebenpol bestimmt damit eine

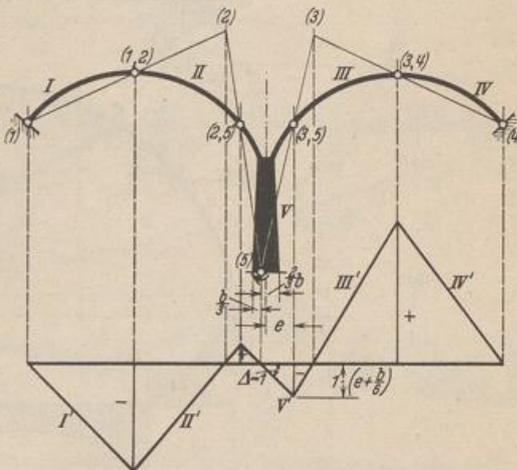


Abb. 57. Einflußlinie des Kernmomentes in der Sohle eines Gewölbepfeilers.

Ecke der Einflußlinie. Die Polfigur der Stabkette liefert also für jede Krafrichtung die Form der Einflußlinie. Der frei verfügbare Parameter  $\Delta_r$  wird so gewählt, daß

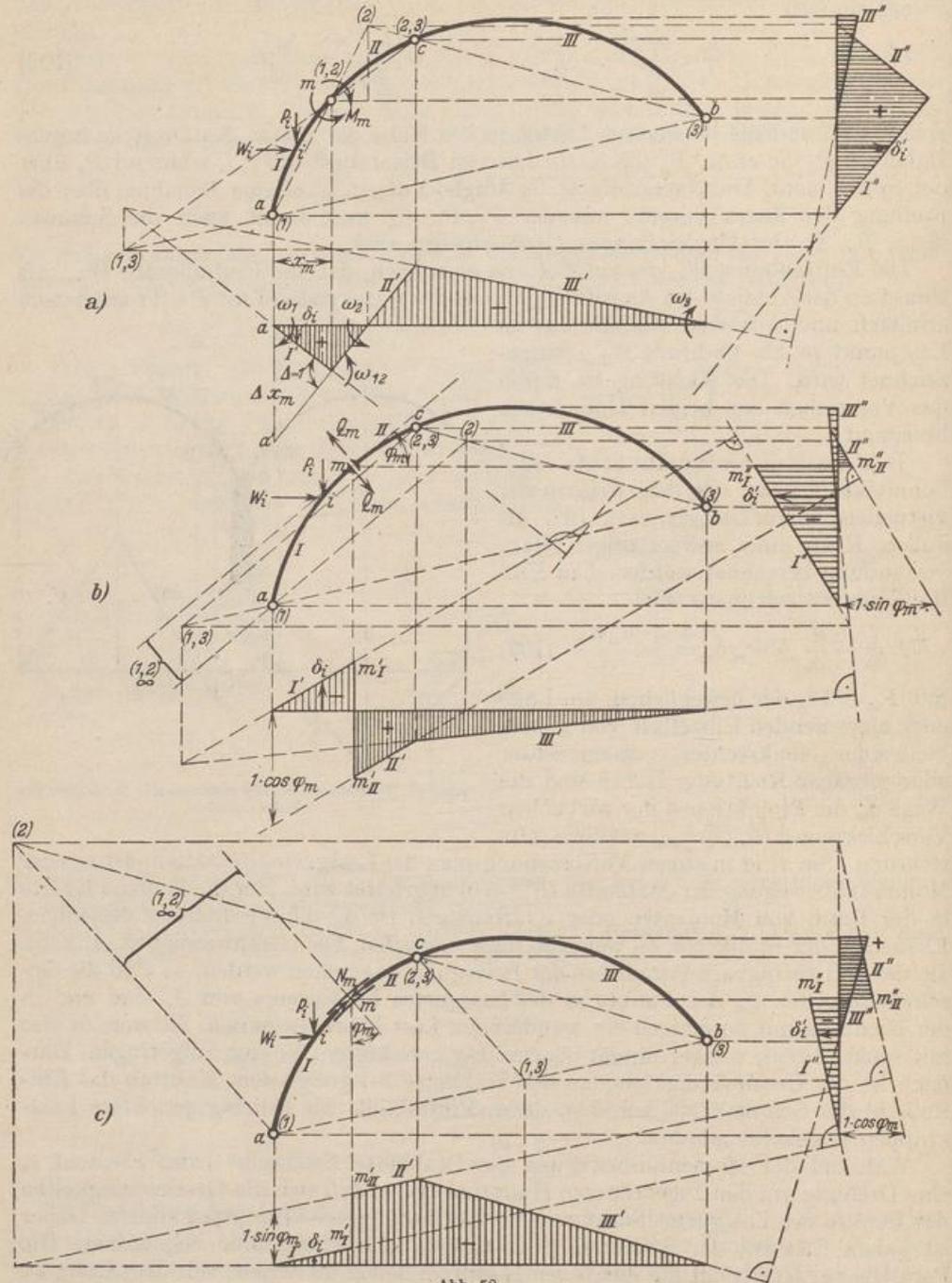


Abb. 58.

$K_r^{(i)} \Delta_r = -K_r^{(i)} \cdot 1_r$ , also  $|\Delta_r| = 1$  und daher bei starrer Stützung ( $\delta_e = 0$ )

$$1_r \cdot K_r^{(i)} = \sum P_m \delta_m. \quad (104)$$

Damit ist auch der Maßstab der Einflußlinie bestimmt (Abb. 57).

Die Ordinaten  $\delta_m$  der Einflußlinie sind durch die Ableitung aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ebenso wie  $\Delta_r$  Geschwindigkeiten. Daher ist auch das Vorzeichen der Einflußlinie durch das Vorzeichen der virtuellen Arbeiten  $P_m \delta_m, M_m \omega_k$  bestimmt.

Einflußlinien der Schnittkräfte eines Dreigelenkbogens (Abb. 58):

a) Einflußlinie für das Biegemoment im Querschnitt  $m$  bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58a).

Kinematische Kette für  $M_m = 0$ : Stäbe  $I, II, III$ . Hauptpole:  $(1) \equiv a, (3) \equiv b$ . Nebenpole  $(1, 2), (2, 3)$ . Hieraus ergeben sich  $(2)$  mit  $(1), (1, 2)$  und  $(3), (2, 3)$ , ferner der Nebenpol  $(1, 3)$  mit  $(1), (3)$  und  $(1, 2), (2, 3)$ . Die Lastscheiden liegen auf Parallelen zur Belastungsrichtung durch die Hauptpole  $(1), (2), (3)$ , die Eckpunkte der Einflußlinie auf Parallelen durch die Nebenpole  $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ . Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = 0 = -M_m \omega_1 - M_m \omega_2 + P_i \delta_i; \quad M_m \cdot (\omega_1 + \omega_2) = M_m \Delta = P_i \delta_i; \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

$\Delta = 1$  bedeutet bei Gleichsetzung von Sehne und Bogen  $\bar{a} \bar{a}' = x_m$ . Die Einheit kann auch aus der Relativbewegung des Stabes  $II$  gegen  $I$  bestimmt werden:

$$-M \omega_{21} + P_i \delta_i = 0; \quad \omega_{21} = \Delta = 1, \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

Die Grenzlinien der waagerechten Einflußlinie sind zu den zugeordneten Geraden der senkrechten Einflußlinie winkelrecht. Daher gilt ebenfalls

$$+M \omega_{21} = W_i \delta_i.$$

b) Einflußlinie für die Querkraft  $Q_m$  bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58b).

Kinematische Kette für  $Q = 0$ . Ermittlung der Polfigur. Die Hauptpole  $(1), (3)$  und der Nebenpol  $(2, 3)$  sind gegeben. Der Nebenpol  $(1, 2)$  liegt, da  $II$  sich gegen  $I$  parallel verschiebt, auf der Tangente des Bogens im Unendlichen. Der Hauptpol  $(2)$  wird durch  $I, (1, 2)$  und  $3, (2, 3)$  gefunden. Damit sind auch die Lastscheiden und Eckpunkte der senkrechten und waagerechten Einflußlinie gegeben. Zur Bestimmung der Einheit der Einflußlinie wird die Relativbewegung der Stäbe  $I$  und  $II$  betrachtet. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen  $\delta A = 0$  ergibt bei der senkrechten Einzellast

$$-Q_m \frac{m'_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } Q_m = P_i \delta_i.$$

Um daher den Verschiebungsplan der Kette als Einflußlinie zu verwenden, wird der Parameter  $m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m$  gewählt. In diesem Falle ist die gegenseitige Verschiebung  $\Delta$  der Querschnitte  $m_I$  und  $m_{II}$  in Richtung von  $Q_m$  gleich der Einheit. Für eine waagerechte Einzellast  $W_i$  ist

$$-Q_m \frac{m''_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } Q_m = W_i \delta'_i.$$

c) Die Ansätze für die Einflußlinien der Längskraft lauten (Abb. 58c):

$$-N_m \frac{m'_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } N_m = P_i \delta_i;$$

$$-N_m \frac{m''_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } N_m = W_i \delta'_i.$$

Die Abb. 59 zeigt die Einflußlinie der Querkraft  $Q_m$  eines unterspannten Balkenträgers. Sie ist aus dem Pol- und Verschiebungsplan der kinematischen Kette  $Q_m = 0$  mit der Annahme  $v_b = 0$  entwickelt worden. Damit ergeben sich die Hauptpole  $(2)', (3)', (4)'$  und die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit  $b' b''$  des Stützpunktes  $b$ . Um hier die Stützenbedingung nachträglich zu erfüllen, wird nach S. 47 ein zweiter Verschiebungsplan gezeichnet, der durch den Weg  $\overrightarrow{b' b''}$  und  $\omega_{12} = 0$  bestimmt ist. Damit wird  $a' b''$  zur Achse der Einflußlinie.  $m'_I m''_{II} = \Delta = 1$  ist Einheit der Einflußlinie.

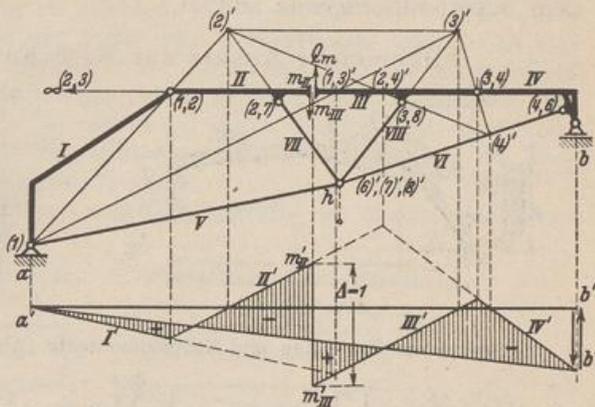


Abb. 59. Ableitung der Einflußlinie der Querkraft  $Q_m$  einer mehrgliedrigen Scheibenverbindung.

Land, R.: Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. Bd. 40 (1888) S. 11 u. 162. — Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 1. Leipzig 1905. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Saliger, R.: Praktische Statik 2. Aufl. Wien 1927. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Beyer, K.: Baustatik. Taschenb. f. Bauing. Bd. I S. 270. Berlin 1928. — Hertwig, A.: Statik der Baukonstruktionen. Handb. physik. u. techn. Mechan. Bd. 4. Leipzig 1929. — Kaufmann, W.: Statik der Tragwerke. Handbibl. f. Bauing. 2. Aufl. Berlin 1930.

### 14. Der einfache Balkenträger.

Ein Stab mit gerader, gebrochener oder gekrümmter Achse wird als Balkenträger bezeichnet, wenn eine senkrechte Belastung nur senkrechte Stützkkräfte hervorruft. Er wird an den Enden aufgelagert oder als Kragträger verwendet.

**Ruhende Belastung.** Eine allgemeine Belastung wird oft mit Vorteil aufgeteilt. Stütz- und Schnittkräfte werden getrennt für jeden Anteil angegeben und nach dem Superpositionsgesetz addiert.

Allgemeiner Ansatz zur Berechnung der Stützkkräfte.

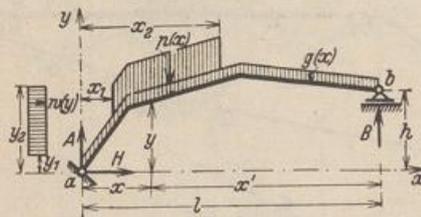


Abb. 60.

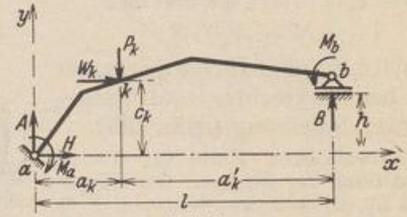


Abb. 61.

a) Senkrechte Belastung und Stützenmomente (Abb. 60 und 61):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_b - M_a}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x' dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a'_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x' dx, \\ B_1 &= \frac{M_a - M_b}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x dx. \end{aligned} \right\} H = 0 \quad (105)$$

b) Waagerechte Belastung (Abb. 60 und 61):

$$B_2 = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} W_k c_k + \frac{1}{l} \int_{y_1}^{y_2} w(y) y dy = -A_2, \quad H = - \left( \sum_{k=1}^{k=n} W_k + \int_{y_1}^{y_2} w(y) dy \right).$$

Allgemeiner Ansatz für die Berechnung der Schnittkräfte (Abb. 62).

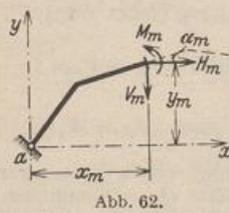


Abb. 62.

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + A_2, & B &= B_1 + B_2, \\ V_m &= A - \int_0^{x_m} g(x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k - \int_{x_1}^{x_m} p(x) dx; \\ H_m &= - \left( H + \sum_{k=1}^{k=s} W_k + \int_{y_1}^{y_m} w(y) dy \right); \\ Q_m &= H_m \sin \alpha_m + V_m \cos \alpha_m; \\ N_m &= H_m \cos \alpha_m - V_m \sin \alpha_m; \\ M_m &= A x_m - \int_0^{x_m} g(x) (x_m - x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k (x_m - a_k) - \int_{x_1}^{x_m} p(x) (x_m - x) dx \\ &\quad - H y_m - \sum_{k=1}^{k=s} W_k (y_m - c_k) - \int_{y_1}^{y_m} w(y) (y_m - y) dy + M_a. \end{aligned} \right\} (106)$$