Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Beschreibung des Tragwerks

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

werden, indem die $W_{hm} = \eta_m$ mit den zugeordneten Lasten P_m multipliziert und die Produkte addiert werden. Bei $p(x) = \text{const}$ ist

$$W_h = p \int \eta \, dx = p F_\eta . \tag{79}$$

Der Begriff der Einflußlinie läßt sich auch auf eine in ihrer Richtung veränderliche Einzelkraft sowie auf ein wanderndes Kräftepaar von 1 mt anwenden und zum Einflußfeld erweitern, das die Größe einer Schnittkraft für die in bezug auf Angriffspunkt und Richtung beliebige Einzellast angibt.

Werden die beiden Grenzwerte (max W_{hp}, min W_{hp}) aus der beweglichen Belastung in Verbindung mit den positiven oder negativen Werten der Schnittkraft aus den anderen Belastungen wiederum als Ordinaten aufgetragen, so entstehen die Schaulinien der absoluten Grenzwerte max W_h, min W_h. Sie liefern die ungünstigsten Spannungen des Querschnitts und damit die Unterlagen für die Bemessung des Tragwerks.

Die Beschreibung des Tragwerks. Die Berechnung der Schnittkräfte wird auf die ebenen Stabzüge und Stabverbindungen mit gerader, gekrümmter oder beliebig gebrochener Stabachse und mit gemeinsamer Symmetrieebene beschränkt, die in die Ebene der äußeren Kräfte fällt. Der Spannungszustand wird dann in jedem Querschnitt durch die drei Schnittkräfte N, M_y, Q_z oder $M_{i'}, M_{a'}, Q_z$ beschrieben. Diese sind Funktionen der Lasten, Stützkräfte und unter Umständen auch von statisch

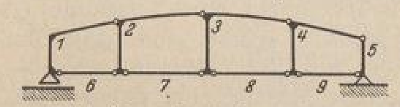

Abb. 36. $n = 9$; $t = 3$; $v = 2 \cdot 12$; $t + v = 27 = 3n$, daher statisch bestimmt.

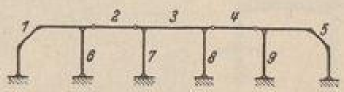

Abb. 37. $n = 9$; $t = 2 \cdot 6$; $v = 2 \cdot 8$; $t + v = 28 = 3n + 1$, daher einfach statisch unbestimmt.

unbestimmten Größen. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte zur Berechnung der Stützkräfte, so spricht man von äußerer statischer Bestimmtheit des Stabwerks. Gilt das gleiche von den Schnittkräften, so ist auch innere statische Bestimmtheit vorhanden. Die Untersuchung bleibt zunächst auf diese Tragwerke beschränkt.

Das einfachste Tragwerk ist der beliebig gestützte offene Stabzug. Zusammengesetzte Stabwerke entstehen durch die Verbindung einzelner biegungssteifer Stäbe und Scheiben allein oder im Zusammenhang mit Stabzügen, deren Elemente nur Längskräfte erhalten. Beispiele der ersten Gruppe sind der Auslegeträger und Dreigelenkbogen, Hänge- und Sprengwerke gehören als versteifte Stabbogen der zweiten an. Die Scheiben werden kinematisch entweder starr oder beweglich durch reibungslose Gelenke, Führungen und Stäbe miteinander verbunden. Man spricht in diesem Zusammenhang von starrer und beweglicher Einspannung, von Gelenken und beweglicher Lagerung und idealisiert sie durch eine kinematisch gleichwertige Anordnung von Stützen- und Verbindungsstäben. Auf diese Weise entstehen drei-, zwei- und einstäbige Verbindungen mit null, ein und zwei Freiheitsgraden der Relativbewegung.

Die Kräfte, die an den Stützpunkten und in den Scheibenverbindungen durch die Belastung hervorgerufen werden, können statisch bestimmt, also mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte in der Ebene eindeutig angegeben werden, wenn die Anzahl der für jede Scheibe (Anzahl n) und jeden freien Knoten (Anzahl k) verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen gleich der Anzahl der Stützenbedingungen t, vermehrt um die Anzahl der Verbindungsstäbe v und die Anzahl der Systemstäbe s ist, die nur Längskräfte übertragen. Die notwendige Bedingung zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Verbindungskräfte ist daher

$$3n + 2k = t + v + s . \tag{80}$$

Sie ist auch hinreichend, wenn die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen von Null verschieden ist.

Unter dieser Voraussetzung können auch die Lasten, Stütz- oder Verbindungskräfte links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt äquivalent in $N^{(a)}$, $M^{(a)}$, $Q^{(a)}$ zusammengefaßt und für den Schwerpunkt des Querschnitts oder die Kernpunkte i', a' der Kraftlinie angegeben werden.

Hilfsmittel der Mechanik zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die statischen Bedingungen für die unbekannten äußeren Kräfte einer Scheibe i, die mit einer Gruppe von gegebenen Kräften im Gleichgewicht stehen, können stets nach einem der folgenden beiden Ansätze angeschrieben werden (Abb. 38):

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & \sum\limits_i X_k = 0, & \sum\limits_i Y_k = 0, & \sum\limits_i M_{k,a} = 0. \\ 2. & \sum\limits_i M_{k,a} = 0, & \sum\limits_i M_{k,b} = 0, & \sum\limits_i M_{k,c} = 0. \end{array}\right\} \tag{81}$$

Hierbei bedeuten a, b, c drei zur Auflösung der Gleichungen geeignete Bezugspunkte für die Momente der Kräfte.

Die Aufgabe kann auch zeichnerisch gelöst werden, indem zuerst die Resultierende R aus der gegebenen Belastung durch eine Mittelkraftlinie oder durch Kraft- und Seileck bestimmt und je nach der Aufgabe in 2 oder 3 Komponenten derart zerlegt wird, daß die Gleichgewichtsbedingungen graphisch erfüllt sind. Die äußeren Kräfte einer unbelasteten, mit drei Stützen- oder Verbindungsstäben angeschlossenen Scheibe sind daher Null. Bei vier Komponenten ist die geometrische Summe von zweien in diesem Falle entgegengesetzt gleich der Summe der beiden anderen.

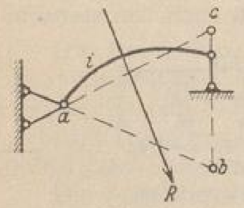

Abb. 38.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer beweglichen Scheibe oder Scheibenverbindung werden in allgemeiner Form durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgesprochen. Nach diesem ist die Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte bei Gleichgewicht der Scheibe oder Scheibenverbindung während einer virtuellen, d. h. verschwindend kleinen, mit den kinematischen Eigenschaften des Systems verträglichen Bewegung Null.

$$\left.\begin{array}{l} \delta A = \sum \mathfrak{P}_m \,\delta\mathfrak{s}_m = \sum [X_m \,\delta x_m + Y_m \,\delta y_m] = 0 \\ \mathfrak{P}_m = X_m \mathbin{\hat{+}} Y_m, \qquad \delta\mathfrak{s}_m = \delta x_m \mathbin{\hat{+}} \delta y_m. \end{array}\right\} \tag{82}$$

Dieser Ansatz enthält ebenso viele statische Bedingungen als das System Freiheitsgrade. Die virtuellen Verschiebungen δx_m, δy_m sind verschwindend kleine Änderungen der Koordinaten x_m, y_m des Angriffspunktes der Kraft P_m, so daß nach S. 21

$$\delta A = \delta \sum [X_m x_m + Y_m y_m] = -\delta \Pi = 0 \tag{83}$$

und daher die potentielle Energie Π der äußeren Kräfte bei Gleichgewicht des Systems zum Minimum wird.

Um die konkrete Schwierigkeit des unendlich kleinen Weges $\delta\mathfrak{s}$ zu vermeiden, können die Verschiebungen auf die hierzu erforderliche Zeit bezogen werden. Man geht mit der auf diese Weise entstehenden mittleren Geschwindigkeit zur Grenze über und erhält aus (82) das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \sum [X_m \dot{x}_m + Y_m \dot{y}_m] = 0. \tag{84}$$

An die Stelle der unendlich kleinen Verschiebungen sind die Geschwindigkeiten $\dot{x}_m$, $\dot{y}_m$ der Momentanbewegung getreten, die zeichnerisch dargestellt werden können. Sie lassen sich hier als Wege in der Zeiteinheit ansehen, um mit der Einführung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten keine begrifflichen Änderungen gegen (82) herbeizuführen.