Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Hilfsmittel der Mechanik zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Unter dieser Voraussetzung können auch die Lasten, Stütz- oder Verbindungskräfte links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt äquivalent in $N^{(a)}$, $M^{(a)}$, $Q^{(a)}$ zusammengefaßt und für den Schwerpunkt des Querschnitts oder die Kernpunkte i', a' der Kraftlinie angegeben werden.

Hilfsmittel der Mechanik zur statisch bestimmten Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die statischen Bedingungen für die unbekannten äußeren Kräfte einer Scheibe i, die mit einer Gruppe von gegebenen Kräften im Gleichgewicht stehen, können stets nach einem der folgenden beiden Ansätze angeschrieben werden (Abb. 38):

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & \sum\limits_i X_k = 0, & \sum\limits_i Y_k = 0, & \sum\limits_i M_{k,a} = 0. \\ 2. & \sum\limits_i M_{k,a} = 0, & \sum\limits_i M_{k,b} = 0, & \sum\limits_i M_{k,c} = 0. \end{array}\right\} \tag{81}$$

Hierbei bedeuten a, b, c drei zur Auflösung der Gleichungen geeignete Bezugspunkte für die Momente der Kräfte.

Die Aufgabe kann auch zeichnerisch gelöst werden, indem zuerst die Resultierende R aus der gegebenen Belastung durch eine Mittelkraftlinie oder durch Kraft- und Seileck bestimmt und je nach der Aufgabe in 2 oder 3 Komponenten derart zerlegt wird, daß die Gleichgewichtsbedingungen graphisch erfüllt sind. Die äußeren Kräfte einer unbelasteten, mit drei Stützen- oder Verbindungsstäben angeschlossenen Scheibe sind daher Null. Bei vier Komponenten ist die geometrische Summe von zweien in diesem Falle entgegengesetzt gleich der Summe der beiden anderen.

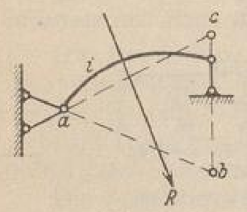

Abb. 38.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht einer beweglichen Scheibe oder Scheibenverbindung werden in allgemeiner Form durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgesprochen. Nach diesem ist die Summe der Arbeiten aller äußeren Kräfte bei Gleichgewicht der Scheibe oder Scheibenverbindung während einer virtuellen, d. h. verschwindend kleinen, mit den kinematischen Eigenschaften des Systems verträglichen Bewegung Null.

$$\left.\begin{array}{l} \delta A = \sum \mathfrak{P}_m \, \delta \mathfrak{s}_m = \sum [X_m \, \delta x_m + Y_m \, \delta y_m] = 0 \\ \mathfrak{P}_m = X_m \overset{\rightarrow}{+} Y_m, \qquad \delta \mathfrak{s}_m = \delta x_m \overset{\rightarrow}{+} \delta y_m. \end{array}\right\} \tag{82}$$

Dieser Ansatz enthält ebenso viele statische Bedingungen als das System Freiheitsgrade. Die virtuellen Verschiebungen δx_m, δy_m sind verschwindend kleine Änderungen der Koordinaten x_m, y_m des Angriffspunktes der Kraft P_m, so daß nach S. 21

$$\delta A = \delta \sum [X_m \, x_m + Y_m \, y_m] = -\delta \Pi = 0 \tag{83}$$

und daher die potentielle Energie Π der äußeren Kräfte bei Gleichgewicht des Systems zum Minimum wird.

Um die konkrete Schwierigkeit des unendlich kleinen Weges $\delta \mathfrak{s}$ zu vermeiden, können die Verschiebungen auf die hierzu erforderliche Zeit bezogen werden. Man geht mit der auf diese Weise entstehenden mittleren Geschwindigkeit zur Grenze über und erhält aus (82) das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \sum [X_m \, \dot{x}_m + Y_m \, \dot{y}_m] = 0. \tag{84}$$

An die Stelle der unendlich kleinen Verschiebungen sind die Geschwindigkeiten $\dot{x}_m$, $\dot{y}_m$ der Momentanbewegung getreten, die zeichnerisch dargestellt werden können. Sie lassen sich hier als Wege in der Zeiteinheit ansehen, um mit der Einführung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten keine begrifflichen Änderungen gegen (82) herbeizuführen.

Nach diesem Ansatz kann jede einzelne Stütz- und Schnittkraft des Stabwerks unabhängig von den unbekannten äußeren Kräften angegeben werden, während diese bei einer Lösung nach (81) stets bekannt sein müssen, bevor sich die Schnittkräfte berechnen lassen.

Allgemeine Ansätze zur analytischen Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die Berechnung der Stützkräfte einer einzelnen statisch bestimmt gestützten Scheibe nach (81) gilt als bekannt. Dieselben Ansätze liefern bei einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung aus n Scheiben $3n$ lineare Gleichungen, aus denen $t+v$ unbekannte Stütz- und Verbindungskräfte angegeben werden können. Diese sind unendlich groß, wenn die Nennerdeterminante Null ist. Das Stabwerk besitzt dann unendlich kleine Beweglichkeit.

Die Lösung ist in der Regel einfacher, wenn die Berechnung zunächst auf die Stützenwiderstände beschränkt wird. In diesem Falle stehen die drei statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der freien, also von der Stützung gelösten Scheibenkette zur Verfügung. Hierzu treten $3(n-1)-v$ statische Bedingungen für die äußeren Kräfte an einzelnen Scheiben oder Teilen der Scheibenverbindung, da auch r e l a t i v e Drehungen oder Verschiebungen der Scheiben bei Gleichgewicht ausgeschlossen sind. Daher werden $3n-v$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der t Stützenwiderstände verwendet. Die Lösung ist bei statisch bestimmten Stabwerken, abgesehen vom Ausnahmefall der unendlich kleinen Beweglichkeit, eindeutig. Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, zunächst die Verbindungskräfte an den Gelenken zu bestimmen und dann erst mit diesen und den Lasten die Stützkräfte jeder einzelnen Scheibe anzugeben.

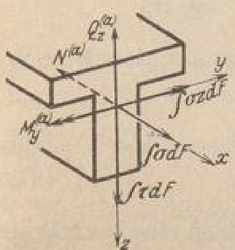

Abb. 39.

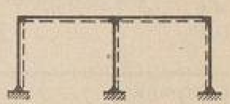
Abb. 40.

Mit den Stütz- und Gelenkkräften können die Schnittkräfte M, N, Q oder $M_{i'}, M_{a'}, Q$ für den Stabquerschnitt abgeleitet werden. Der positive Richtungssinn ergibt sich aus der positiven Definition der Koordinaten in Abb. 17. Die Längskraft ist positiv als Zugkraft. Der Zuwachs der Normalspannung $d\sigma_x$ beim Fortschreiten in der z-Richtung bestimmt das positive Biegungsmoment M_y und bedeutet eine hohle Krümmung des Stabes gegen die negative z-Achse. Mit der positiven Definition von $\partial\tau_{xz}/\partial x \cdot dx$ und damit auch von dQ_z nach Lage und Richtung der Bezugsachsen nimmt das positive Moment bei positiver Querkraft zu. Das positive Vorzeichen von $N_x^{(a)}, M_y^{(a)}, Q_z^{(a)}$ ist dann durch (44) bestimmt (Abb. 39). Umgekehrt sind mit der Dehnung und der Krümmung des Stabes durch ein positives Biegungsmoment auch die positiven Bezugsachsen x, z gegeben. Bei mehrteiligen Stabzügen werden oft die Stabkanten, an denen positive Momente Zugspannungen erzeugen, zeichnerisch nach Abb. 40 hervorgehoben. Sie bezeichnen den positiven Bereich von z. Die Darstellung ist überflüssig, wenn die positiven Biegungsmomente stets nach Vereinbarung an der gezogenen Stabfaser aufgetragen werden.

Die Schnittkräfte V_a, H_a, M_a des Querschnitts a (Abb. 41) sind Stütz- oder Anschlußkräfte und daher bekannt. Die Belastung des Stabes durch Einzellasten $\ldots P_{m-1}, P_m \ldots$, deren Wirkungslinien die Stabachse in den Punkten $\ldots (m-1), m \ldots$ schneiden und dort nach P_{xm}, P_{ym} zerlegt werden, liefert im Querschnitt k mit V_a, H_a, M_a die folgenden Schnittkräfte (Abb. 41 und 42):

$$\left.\begin{aligned}
&H_k = -H_a - \sum_k P_{xm}, \qquad V_k = V_a - \sum_k P_{ym},\\
&M_k = M_a + V_a x_k - H_a y_k - \sum_k P_{ym}(x_k - a_m) - \sum_k P_{xm}(y_k - c_m),\\
&N_k = -V_k \sin\alpha_k + H_k \cos\alpha_k, \qquad Q_k = V_k \cos\alpha_k + H_k \sin\alpha_k.
\end{aligned}\right| \tag{85}$$