Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Allgemeine Ansätze zur analytischen Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte

Nach diesem Ansatz kann jede einzelne Stütz- und Schnittkraft des Stabwerks unabhängig von den unbekannten äußeren Kräften angegeben werden, während diese bei einer Lösung nach (81) stets bekannt sein müssen, bevor sich die Schnittkräfte berechnen lassen.

Allgemeine Ansätze zur analytischen Berechnung der Stütz- und Schnittkräfte. Die Berechnung der Stützkräfte einer einzelnen statisch bestimmt gestützten Scheibe nach (81) gilt als bekannt. Dieselben Ansätze liefern bei einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung aus n Scheiben $3n$ lineare Gleichungen, aus denen $t+v$ unbekannte Stütz- und Verbindungskräfte angegeben werden können. Diese sind unendlich groß, wenn die Nennerdeterminante Null ist. Das Stabwerk besitzt dann unendlich kleine Beweglichkeit.

Die Lösung ist in der Regel einfacher, wenn die Berechnung zunächst auf die Stützenwiderstände beschränkt wird. In diesem Falle stehen die drei statischen Bedingungen für die äußeren Kräfte an der freien, also von der Stützung gelösten Scheibenkette zur Verfügung. Hierzu treten $3(n-1)-v$ statische Bedingungen für die äußeren Kräfte an einzelnen Scheiben oder Teilen der Scheibenverbindung, da auch r e l a t i v e Drehungen oder Verschiebungen der Scheiben bei Gleichgewicht ausgeschlossen sind. Daher werden $3n-v$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der t Stützenwiderstände verwendet. Die Lösung ist bei statisch bestimmten Stabwerken, abgesehen vom Ausnahmefall der unendlich kleinen Beweglichkeit, eindeutig. Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, zunächst die Verbindungskräfte an den Gelenken zu bestimmen und dann erst mit diesen und den Lasten die Stützkräfte jeder einzelnen Scheibe anzugeben.

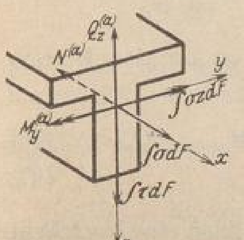

Abb. 39.

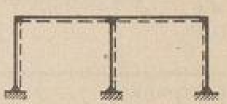
Abb. 40.

Mit den Stütz- und Gelenkkräften können die Schnittkräfte M, N, Q oder $M_{i'}, M_{a'}, Q$ für den Stabquerschnitt abgeleitet werden. Der positive Richtungssinn ergibt sich aus der positiven Definition der Koordinaten in Abb. 17. Die Längskraft ist positiv als Zugkraft. Der Zuwachs der Normalspannung $d\sigma_x$ beim Fortschreiten in der z-Richtung bestimmt das positive Biegungsmoment M_y und bedeutet eine hohle Krümmung des Stabes gegen die negative z-Achse. Mit der positiven Definition von $\partial\tau_{xz}/\partial x \cdot dx$ und damit auch von dQ_z nach Lage und Richtung der Bezugsachsen nimmt das positive Moment bei positiver Querkraft zu. Das positive Vorzeichen von $N_x^{(a)}, M_y^{(a)}, Q_z^{(a)}$ ist dann durch (44) bestimmt (Abb. 39). Umgekehrt sind mit der Dehnung und der Krümmung des Stabes durch ein positives Biegungsmoment auch die positiven Bezugsachsen x, z gegeben. Bei mehrteiligen Stabzügen werden oft die Stabkanten, an denen positive Momente Zugspannungen erzeugen, zeichnerisch nach Abb. 40 hervorgehoben. Sie bezeichnen den positiven Bereich von z. Die Darstellung ist überflüssig, wenn die positiven Biegungsmomente stets nach Vereinbarung an der gezogenen Stabfaser aufgetragen werden.

Die Schnittkräfte V_a, H_a, M_a des Querschnitts a (Abb. 41) sind Stütz- oder Anschlußkräfte und daher bekannt. Die Belastung des Stabes durch Einzellasten $\ldots P_{m-1}, P_m \ldots$, deren Wirkungslinien die Stabachse in den Punkten $\ldots(m-1), m \ldots$ schneiden und dort nach P_{xm}, P_{ym} zerlegt werden, liefert im Querschnitt k mit V_a, H_a, M_a die folgenden Schnittkräfte (Abb. 41 und 42):

$$
\left.\begin{aligned}
H_k &= -H_a - \sum_k P_{xm}, \qquad V_k = V_a - \sum_k P_{ym}, \\
M_k &= M_a + V_a x_k - H_a y_k - \sum_k P_{ym}(x_k - a_m) - \sum_k P_{xm}(y_k - c_m), \\
N_k &= -V_k \sin\alpha_k + H_k \cos\alpha_k, \qquad Q_k = V_k \cos\alpha_k + H_k \sin\alpha_k.
\end{aligned}\right| \qquad (85)
$$

Ihr Verlauf kann durch die Differentialbeziehungen unter (48) nachgeprüft werden. Das Biegungsmoment wird in denjenigen Querschnitten zum Grenzwert, in denen die Querkraft Null ist oder an einer Unstetigkeitsstelle das Vorzeichen wechselt. Die positive Querkraft bedeutet zunehmende Biegungsmomente M_y, die konstante Querkraft den linearen Verlauf des Biegungsmoments.

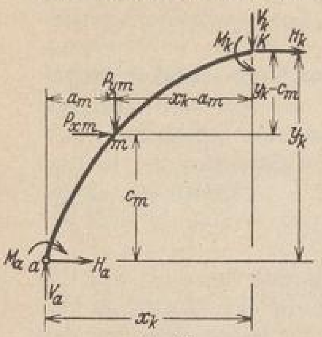

Abb. 41.

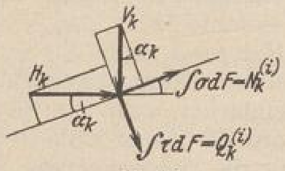

Abb. 42.

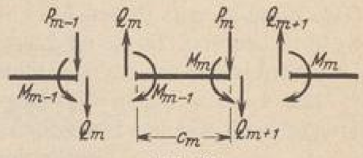

Abb. 43.

Bei Einzelbelastung winkelrecht zu einem geraden Stabe ist für den Bereich $(m-1)$ bis m nach Abb. 43

$$\frac{dM}{dx} = Q_m = \text{const}, \quad \text{daher} \quad M_m - M_{m-1} = Q_m c_m, \quad M_m = M_{m-1} + Q_m c_m. \tag{86}$$

$$P_m + Q_{m+1} - Q_m = 0, \qquad Q_{m+1} = Q_m - P_m. \tag{87}$$

Lastpunkt Querschnitt	c_m	P_m	Q_m	$Q_m c_m$	M_m
0	—	V_0	—	—	M_0
1	c_1	P_1	Q_1	$Q_1 c_1$	M_1
2	c_2	P_2	Q_2	$Q_2 c_2$	M_2
3	c_3	P_3	Q_3	$Q_3 c_3$	M_3
.	.	.	.	.	.

Die Beziehungen bilden eine Vorschrift zur einfachen Berechnung aller Querkräfte und Biegungsmomente eines statisch bestimmten Stabzugs (s. nebenstehende Tabelle).

Hierbei sind c, P gegeben, die Randwerte V_0, M_0 anderweit berechnet und bekannt. Demnach ist $Q_1 = V_0 - P_1$ usw., $M_1 = M_0 + Q_1 c_1$ usw.

Bei einem geraden, unter $\sphericalangle \alpha_m$ geneigten Stabe mit beliebig gerichteten Einzellasten $P_m = P_{xm} \dotplus P_{ym}$ wird

$$N_m = H_m \cos\alpha_m - V_m \sin\alpha_m, \qquad Q_m = H_m \sin\alpha_m + V_m \cos\alpha_m.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Abschnitt c_m ergibt sich nach Abb. 44

$$\left.\begin{aligned} &V_{m+1} - V_m + P_{ym} = 0, \quad H_{m+1} - H_m + P_{xm} = 0, \quad M_m - M_{m-1} = Q_m s_m, \\ &V_{m+1} = V_m - P_{ym}, \qquad H_{m+1} = H_m - P_{xm}; \\ &M_m = M_{m-1} + Q_m s_m = M_{m-1} + V_m c_m + H_m e_m. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

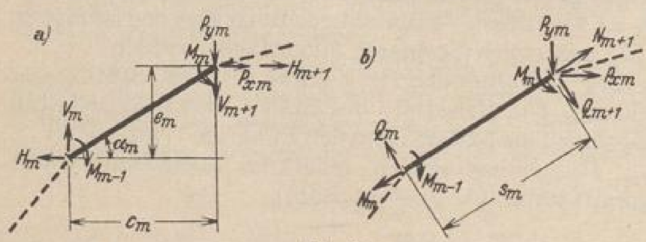

Abb. 44.

Unter Umständen kann es auch zweckmäßig sein, die Einzellasten in zwei Komponenten, nach der Stabachse und senkrecht zu ihr zu zerlegen.

In allen Fällen ist zunächst die unmittelbare Eintragung der Lasten angenommen worden. Geschieht dies jedoch nur in Abständen u_r in Verbindung mit Querkonstruktionen, die stets als Balken auf zwei Stützen angesehen werden, so wird die vorgelegte Belastung an den Querträgern durch eine äquivalente Gruppe von Einzellasten $\ldots F_{r-1}, F_r \ldots$

ersetzt (Abb. 45). Die Querkraft ist zwischen zwei Querträgern konstant, das Moment an deren Anschlußstellen ebenso groß wie bei unmittelbarer Belastung und im Bereiche von u_r linear. Demnach werden die Momente unter Einschaltung der Querschnitte $(r-1)$, r nach (86) berechnet und die Querkräfte Q_r eines Feldes rückwärts aus

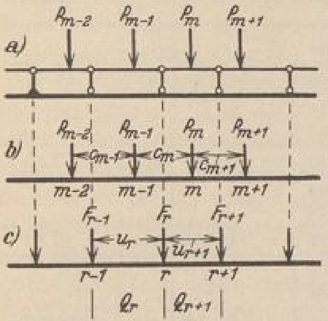

Abb. 45.

$$Q_r = \frac{M_r - M_{r-1}}{u_r} \tag{89}$$

bestimmt (Rechenvorschrift S. 44).

Bei einer stetigen Belastung $p(x)$ des Stabzuges werden die statischen Bedingungen für das Gleichgewicht eines infinitesimalen Abschnitts angeschrieben. Man unterscheidet dabei gekrümmte Stäbe (ds) (Abb. 46) und gerade Stäbe (dx) mit waagerechter Achse und vernachlässigt kleine Größen zweiter Ordnung.

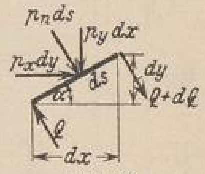

Abb. 46.

$$\left.\begin{aligned} dQ = -p_n(s)\,ds = -[p_x(s)\sin^2\alpha + p_y(s)\cos^2\alpha]\,ds\,; \quad \frac{d^2M}{ds^2} = -p_n(s)\,,\\ dQ = -p(x)\,dx\,; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Die zweimalige Integration der Belastungsfunktion p liefert daher die Schnittkräfte Q und M, sobald die Integrationskonstanten durch die statisch bestimmte Stützung des Stabzugs bekannt sind.

Rechenvorschrift.

a) Unmittelbare Belastung (Abb. 47a):

Stützkraft C aus Momentengleichung für den Schleppträger um den Gelenkpunkt:

$$C \cdot 8{,}0 = P_9 \cdot 0{,}5 + P_{10} \cdot 3{,}5 + P_{11} \cdot 5{,}0\,, \quad C = 22{,}5\,\text{t}\,.$$

Stützkraft B aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt a, Stützkraft A aus Momentengleichung für das ganze System um Stützpunkt b.

m	P_m	a_m	a'_m	$P_m a_m$	$P_m a'_m$	c_m	Q_m [t]	$Q_m c_m$	M_m [mt]
a	(− 41,875)	0,0	+ 16,0	—	(− 670)	—	—	—	0,0
1	+ 18,0	+ 4,0	+ 12,0	+ 72	+ 216	4,0	+ 41,875	+ 167,500	+ 167,500
2	+ 18,0	+ 5,5	+ 10,5	+ 99	+ 189	1,5	+ 23,875	+ 35,813	+ 203,313
3	+ 18,0	+ 7,0	+ 9,0	+ 126	+ 162	1,5	+ 5,875	+ 8,812	+ 212,125
4	+ 18,0	+ 8,5	+ 7,5	+ 153	+ 135	1,5	− 12,125	− 18,188	+ 193,937
5	+ 18,0	+ 10,0	+ 6,0	+ 180	+ 108	1,5	− 30,125	− 45,187	+ 148,750
6	+ 20,0	+ 13,5	+ 2,5	+ 270	+ 50	3,5	− 48,125	− 168,438	− 19,688
7	+ 20,0	+ 15,0	+ 1,0	+ 300	+ 20	1,5	− 68,125	− 102,187	− 121,875
b	(− 145,625)	+ 16,0	± 0,0	(− 2330)	—	1,0	− 88,125	− 88,125	− 210,000
8	+ 20,0	+ 19,0	− 3,0	+ 380	− 60	3,0	+ 57,500	+ 172,500	− 37,500
d	—	+ 20,0	− 4,0	—	—	1,0	+ 37,500	+ 37,500	0,000
9	+ 20,0	+ 20,5	− 4,5	+ 410	− 90	0,5	+ 37,500	+ 18,750	+ 18,750
10	+ 20,0	+ 23,5	− 7,5	+ 470	− 150	3,0	+ 17,500	+ 52,500	+ 71,250
11	+ 20,0	+ 25,0	− 9,0	+ 500	− 180	1,5	− 2,500	− 3,750	+ 67,500
c	− 22,5	+ 28,0	− 12,0	− 630	+ 270	3,0	− 22,500	− 67,500	+ 0,000
	$\Sigma = 0$			$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0$				

In der Regel rechnet man mit abgerundeten Werten für Stütz- und Querkräfte und gleicht die Momente nachträglich aus.