Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Graphische Methoden zur Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

b) Mittelbare Belastung (Abb. 47b).
Stützkräfte wie bei unmittelbarer Belastung:

r	m	P_m	c_m	Q_m	$Q_m c_m$	M_r [mt]	$M_r - M_{r-1}$	u_r	Q_r [t]
	a	− 41,875	—	—	—	0,00			
I		+ 18,000	4,0	+ 41,875	+ 167,50	+ 167,50	+ 167,50	4,0	+ 41,875
	2	+ 18,000	1,5	+ 23,875	+ 35,81	+ 203,31			
	3	+ 18,000	1,5	+ 5,875	+ 8,81	+ 212,12			
II		—	1,0	− 12,125	− 12,12	+ 200,00	+ 32,50	4,0	+ 8,13
	4	+ 18,000	0,5	− 12,125	− 6,06	+ 193,94			
	5	+ 18,000	1,5	− 30,125	− 45,19	+ 148,75			
III		—	2,0	− 48,125	− 96,25	+ 52,50	− 147,50	4,0	− 36,87
	6	+ 20,000	1,5	− 48,125	− 72,19	− 19,69			
	7	+ 20,000	1,5	− 68,125	− 102,19	− 121,88			
IV	b	− 145,625	1,0	− 88,125	− 88,12	− 210,00	− 262,50	4,0	− 65,62
	8	+ 20,000	3,0	+ 57,500	+ 172,50	− 37,50			
V	d	—	1,0	+ 37,500	+ 37,50	0,00	+ 210,00	4,0	+ 52,50
	9	+ 20,000	0,5	+ 37,500	+ 18,75	+ 18,75			
	10	+ 20,000	3,0	+ 17,500	+ 52,50	+ 71,25			
VI		—	0,5	− 2,500	− 1,25	+ 70,00	+ 70,00	4,0	+ 17,50
	11	+ 20,000	1,0	− 2,500	− 2,50	+ 67,50			
VII	c	− 22,500	3,0	− 22,500	− 67,50	0,00	− 70,00	4,0	− 17,50

In der Regel wird für die Rechnung eine Differenzenbeziehung an Stelle der Differentialbeziehung (90) verwendet, der Bereich der Belastungsfunktion dabei in eine Anzahl gleich großer Intervalle unterteilt und diese selbst in jeder Stufe durch eine Gerade (1) oder einen Parabelabschnitt (2) ersetzt. Die stetige Belastung $p(x)$ wird in eine äquivalente Gruppe von Einzellasten P_m zerlegt, deren

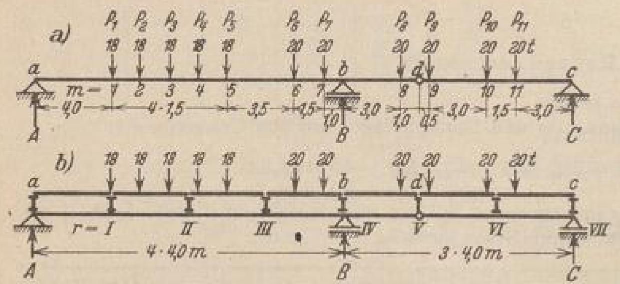

Abb. 47.

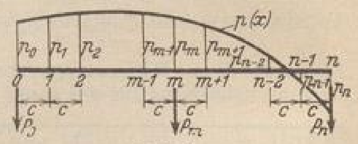

Abb. 48.

Moment in den Teilpunkten m, $(m+1)$ mit denjenigen von $p(x)$ übereinstimmt (Abb. 48). Die Querkräfte Q_m und die Biegungsmomente M_m werden dann nach den Angaben unter (86), (87) berechnet. Die Schaulinie des Biegungsmomentes M verläuft durch die Endpunkte der Ordinaten M_m. Sie ist daher bei geeigneter Teilung genügend genau bestimmt.

1. Die Funktion $p(x)$ wird durch einen Geradenzug ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{6}(2p_0 + p_1), \ldots, P_m = \frac{c}{6}(p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}), \ldots, P_n = \frac{c}{6}(p_{n-1} + 2p_n). \qquad (91)$$

2. Die Funktion $p(x)$ wird durch Parabelabschnitte ersetzt:

$$P_0 = \frac{c}{2}\,\frac{7p_0 + 6p_1 - p_2}{12}, \ldots, P_m = c\,\frac{p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}}{12}, \ldots, P_n = \frac{c}{2}\,\frac{7p_n + 6p_{n-1} - p_{n-2}}{12}. \qquad (92)$$

Graphische Methoden zur Ermittlung der Stütz- und Schnittkräfte. Um die Stützkräfte einer statisch bestimmten Stab- oder Scheibenverbindung zeichnerisch anzugeben, werden diese zunächst für die resultierende Kraft aus der Belastung jeder einzelnen Scheibe bestimmt und dann durch Superposition zusammengefaßt. Dieses Ergebnis wird unmittelbar erhalten, wenn die Resultierende der Lasten jeder Scheibe durch zwei äquivalente Kräfte ersetzt wird, welche durch die benachbarten Zwischengelenke verlaufen.

Die bekannten Stütz- und Gelenkkräfte einer Stabverbindung werden, unter Umständen nach Ergänzung durch zwei gleichgroße, einander entgegengesetzt gerichtete Hilfskräfte H_0, H_0', der Reihe nach mit den am Stabzug angreifenden Lasten P, $p\,dx$ zusammengesetzt. Auf diese Weise entsteht die Mittelkraftlinie aller äußeren Kräfte. Sie liefert, abgesehen von einer Kraft H_0', die Resultierende R_k aller links oder rechts von einem ausgezeichneten Querschnitt k vorhandenen äußeren Kräfte nach Lage und Richtung und in Verbindung mit dem zugeordneten Krafteck auch deren Größe. Damit sind die Schnittkräfte M_k, N_k, Q_k oder die Kernmomente $M_{i',k}$, $M_{a',k}$ für den nach Lage und Abmessungen vorgeschriebenen Querschnitt bekannt (Beispiel Abb. 50).

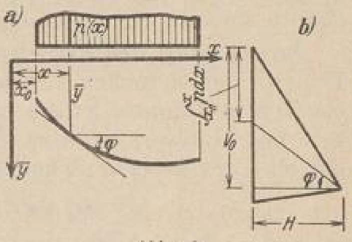

Abb. 49.

Die Kräftegruppe (H_0, H_0') ist bei Balkenträgern mit senkrechter Belastung nötig. Ihre Richtung wird waagerecht angenommen. H_0' ist dann gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet zur Komponente H_k der Resultierenden R_k und wird in der Regel mit H bezeichnet. Die Biegungsmomente sind $M_k = H\bar{y}_k$. Bei stetiger Belastung entsteht auch hier eine Differentialbeziehung. Nach Abb. 49 ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{V_0 - \int p\,dx}{H} = \frac{Q}{H}; \qquad \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = -\frac{p(x)}{H}. \tag{93}$$

Der zweite Differentialquotient von $\bar{y}$ kann durch die Krümmung ϱ ersetzt werden.

$$p(x) = \frac{H}{\varrho\cos^3\varphi}; \quad \text{für } \varphi = 0 \text{ ist } p(x) = p_0,\ \ \varrho = \varrho_0, \text{ also } H = p_0\varrho_0. \tag{94}$$

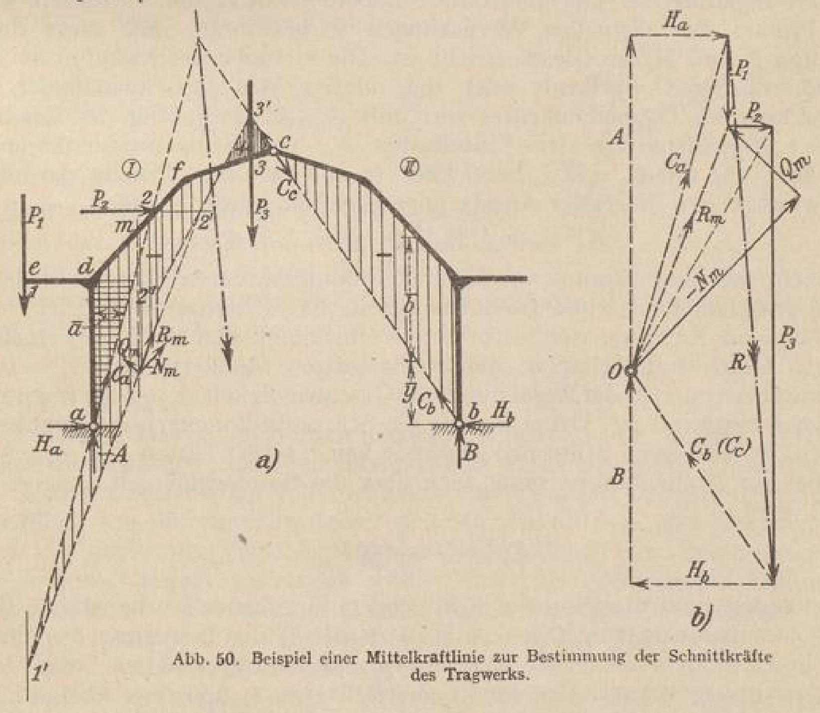

Abb. 50. Beispiel einer Mittelkraftlinie zur Bestimmung der Schnittkräfte des Tragwerks.

Bestimmung der Resultierenden nach Lage und Größe. $R \equiv (P_1, P_2, P_3)$. — Ermittlung der Stützenwiderstände C_a, C_b aus der Bedingung $C_b \mp C_c = 0$ an dem unbelasteten Stabe II, so daß beide Kräfte in die Richtung b—c fallen. — Aufzeichnung der Mittelkraftlinie aus $(C_a, P_1, P_2, P_3) \equiv C_e$. Die waagerechte Komponente von R_k im Bereiche a bis 2: $H_m = H_a$, im Bereiche von 2 über c bis b: $H_k = H_a + P_2 = -H_b$. Im Bereiche von a bis d ist das Moment $M_n = A \cdot \bar{a}_n$, im Bereiche von d bis 2 ist $M_m = H_a \bar{b}_m$, im Bereiche von 2 über c bis b ist $M_k = H_b \bar{b}_k$. Das Vorzeichen für $\bar{b}$ ergibt sich aus der Abb. 50, es ist so gewählt, daß positive Momente auf der Stabinnenseite Zug erzeugen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten setzt zur Berechnung statisch bestimmter Stütz- und Schnittkräfte einfache oder mehrfache Beweglichkeit des Stabwerks voraus. Da dieses jedoch als starr vorgeschrieben ist, werden einzelne der inneren Schnittkräfte oder Stützkräfte

$$N_r^{(i)} = \int \sigma \, dF, \quad M_r^{(i)} = \int \sigma z \, dF, \quad Q_r^{(i)} = \int \tau \, dF, \quad C_e \tag{95}$$

als äußere Doppelkräfte einer Stabkette verwendet, deren Elemente durch Gelenke oder Führungen verbunden sind. Die mechanisch äquivalenten Verbindungen sind in Abb. 51 wiedergegeben. Um eine Stützkraft C_e oder eine Schnittkraft K_r der Gruppe (95) unabhängig von allen übrigen zu berechnen, wird diese allein

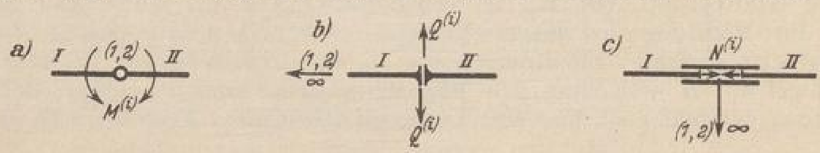

Abb. 51.

zur äußeren Doppelkraft einer Stabkette. Dabei wird die Stützenbedingung (e) oder die zugeordnete materielle Verbindung der benachbarten beiden Querschnitte (r) ausgeschaltet, so daß die Stabkette einen Freiheitsgrad erhält und daher zwangläufig ist. Die unbekannte äußere Kraft K_r der Stabkette wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen so bestimmt, daß diese durch die Belastung $\mathfrak{P}$ und K_r im Gleichgewicht ist. Die virtuelle Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Doppelkraft oder die relative Winkelgeschwindigkeit der Angriffsgeraden des Doppelmomentes wird mit Δ_r, die Projektion der Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Einzellasten P_m und Stützenwiderstände C_e auf deren Richtung mit δ_m und δ_e bezeichnet, so daß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgender Ansatz angeschrieben werden kann:

$$K_r^{(i)} \Delta_r + \sum P_m \delta_m + \sum C_e \delta_e = 0 \,. \tag{96}$$

Er besteht aus einer Summe von inneren Produkten, deren Vorzeichen durch den Winkel zwischen Kraft- und Geschwindigkeitsvektor bestimmt wird.

Größe und Richtung der virtuellen Geschwindigkeiten Δ_r, δ_m, δ_e ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsplan der zwangläufigen Stabkette mit $K_r^{(i)} = 0$, deren Momentanbewegung in der Regel durch die Geschwindigkeit $\Delta_r = 1$ als frei wählbaren Parameter bestimmt ist. Dabei werden die Stützenbedingungen der Stabkette eingehalten, so daß deren Stützenwiderstände keine Arbeit leisten ($\sum C_e \delta_e = 0$), wenn nicht bei der Momentanbewegung auch über die Geschwindigkeit anderer Punkte verfügt wird.

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m \,. \tag{97}$$

Die Bewegung eines Stabes s_k der Kette gegen die ruhende Ebene ist eine Drehung um ein Momentanzentrum O_k, den Hauptpol (k) der Bewegung des Stabes s_k. Die Winkelgeschwindigkeit ω_k der Momentanbewegung wird im Sinne des Uhrzeigers positiv gerechnet. Der Punkt m des Stabes s_k mit dem Abstand r_m vom Momentanzentrum (Abb. 52) erhält die senkrecht zum Fahrstrahl r_m gerichtete Geschwindigkeit $\omega_k r_m$, so daß die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der in m an-