



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

so daß beide Kräfte in die Richtung $b-c$ fallen. — Aufzeichnung der Mittelkraftlinie aus $(C_a, P_1, P_2, P_3) \equiv C_e$. Die waagerechte Komponente von R_k im Bereiche a bis 2 : $H_m = H_a$, im Bereiche von 2 über c bis b : $H_k = H_a + P_2 = -H_b$. Im Bereiche von a bis d ist das Moment $M_n = A \cdot a_n$, im Bereiche von d bis 2 ist $M_m = H_a \bar{b}_m$, im Bereiche von 2 über c bis b ist $M_k = H_b \bar{b}_k$. Das Vorzeichen für \bar{b} ergibt sich aus der Abb. 50, es ist so gewählt, daß positive Momente auf der Stabinnenseite Zug erzeugen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten setzt zur Berechnung statisch bestimmter Stütz- und Schnittkräfte einfache oder mehrfache Beweglichkeit des Stabwerks voraus. Da dieses jedoch als starr vorgeschrieben ist, werden einzelne der inneren Schnittkräfte oder Stützkräfte

$$N_r^{(i)} = \int \sigma dF, \quad M_r^{(i)} = \int \sigma z dF, \quad Q_r^{(i)} = \int \tau dF, \quad C_e \quad (95)$$

als äußere Doppelkräfte einer Stabkette verwendet, deren Elemente durch Gelenke oder Führungen verbunden sind. Die mechanisch äquivalenten Verbindungen sind in Abb. 51 wiedergegeben. Um eine Stützkraft C_e oder eine Schnittkraft K_r der Gruppe (95) unabhängig von allen übrigen zu berechnen, wird diese allein

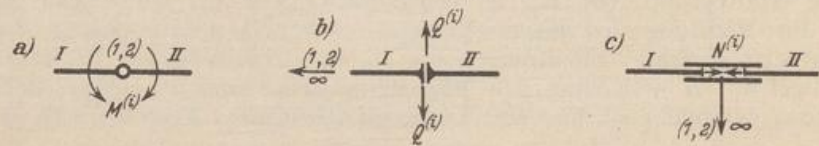


Abb. 51.

zur äußeren Doppelkraft einer Stabkette. Dabei wird die Stützenbedingung (e) oder die zugeordnete materielle Verbindung der benachbarten beiden Querschnitte (r) ausgeschaltet, so daß die Stabkette einen Freiheitsgrad erhält und daher zwangsläufig ist. Die unbekannte äußere Kraft K_r der Stabkette wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen so bestimmt, daß diese durch die Belastung \mathfrak{P} und K_r im Gleichgewicht ist. Die virtuelle Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Doppelkraft oder die relative Winkelgeschwindigkeit der Angriffseraden des Doppelmomentes wird mit Δ_r , die Projektion der Geschwindigkeit der Angriffspunkte der Einzellasten P_m und Stützenwiderstände C_e auf deren Richtung mit δ_m und δ_e bezeichnet, so daß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgender Ansatz angeschrieben werden kann:

$$K_r^{(i)} \Delta_r + \sum P_m \delta_m + \sum C_e \delta_e = 0. \quad (96)$$

Er besteht aus einer Summe von inneren Produkten, deren Vorzeichen durch den Winkel zwischen Kraft- und Geschwindigkeitsvektor bestimmt wird.

Größe und Richtung der virtuellen Geschwindigkeiten Δ_r , δ_m , δ_e ergeben sich aus dem Geschwindigkeitsplan der zwangsläufigen Stabkette mit $K_r^{(i)} = 0$, deren Momentanbewegung in der Regel durch die Geschwindigkeit $\Delta_r = 1$ als frei wählbaren Parameter bestimmt ist. Dabei werden die Stützenbedingungen der Stabkette eingehalten, so daß deren Stützenwiderstände keine Arbeit leisten ($\sum C_e \delta_e = 0$), wenn nicht bei der Momentanbewegung auch über die Geschwindigkeit anderer Punkte verfügt wird.

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m. \quad (97)$$

Die Bewegung eines Stabes s_k der Kette gegen die ruhende Ebene ist eine Drehung um ein Momentanzentrum O_k , den Hauptpol (k) der Bewegung des Stabes s_k . Die Winkelgeschwindigkeit ω_k der Momentanbewegung wird im Sinne des Uhrzeigers positiv gerechnet. Der Punkt m des Stabes s_k mit dem Abstand r_m vom Momentanzentrum (Abb. 52) erhält die senkrecht zum Fahrstrahl r_m gerichtete Geschwindigkeit $\omega_k r_m$, so daß die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit der in m an-

greifenden äußeren Kraft P_m folgenden Betrag erhält:

$$P_m \delta_m = P_m \omega_k r_m \cos \varphi_m = P_m \omega_k \varrho_m = \Theta_m \omega_k. \quad (98)$$

Hierbei ist $\Theta_m = P_m \varrho_m$ das Moment der Kraft P_m bezogen auf den Hauptpol (h), so daß die Arbeit der äußeren Kräfte als Produkt des Momentes Θ_m der Kraft P_m und der Winkelgeschwindigkeit ω_k der zugeordneten Scheibe gebildet wird. Daher wird die Stütz- oder Schnittkraft $K_r^{(k)}$ eines Stabwerks mit n Scheiben oder Stäben nach (98) berechnet.

$$K_r^{(k)} = -\frac{1}{A_r} \sum_k [\omega_k \sum_u \Theta_u], \quad k = 1, \dots, n. \quad (99)$$

Die Bewegung einer Scheibe h relativ zu einer anderen Scheibe k ist ebenfalls eine Drehung um ein reelles oder imaginäres Gelenk, das Momentanzentrum der Relativbewegung, das hier als Nebenpol (h, k) bezeichnet wird. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Scheiben ist $\omega_{kh} = \omega_k - \omega_h$. Die Haupt- und Nebenpole der zwangsläufigen Stabkette bilden die Polfigur. Sie bestimmt in Verbindung mit einem der Größe nach frei wählbaren Parameter, der Winkelgeschwindigkeit ω_k einer Scheibe oder der Relativgeschwindigkeit ω_{kh} , die Winkelgeschwindigkeit aller übrigen Scheiben und damit die Geschwindigkeit aller Punkte der Stabkette. Daher ist mit der Polfigur auch der Geschwindigkeitsplan der Stabkette gefunden. Zu ihrer Aufzeichnung werden die drei folgenden Sätze aus der Kinematik der ebenen Bewegung verwendet.

1. Der Pol der Relativbewegung (a, b) zweier Scheiben a und b gehört beiden Scheiben an. Seine Geschwindigkeit ist eindeutig, so daß die Hauptpole (a) und (b) mit (a, b) auf einer Geraden liegen. Nach Abb. (53) ist $r'_{ab} \omega_a = r'_{ab} \omega_b$.

2. Die Nebenpole (a, b), (b, c), (a, c) dreier Scheiben mit den Hauptpolen (a) \equiv A , (b) \equiv B , (c) \equiv C liegen auf einer Geraden, da nach

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{CJ}} = \frac{r'_{ab}}{r'_{bc}} = \frac{r'_{ab} r''_{bc}}{r''_{ab} r'_{bc}} = \frac{\omega_b \omega_c}{\omega_a \omega_b} = \frac{\omega_c}{\omega_a},$$

$$\overline{AJ} \omega_a = \overline{CJ} \omega_c \quad \text{also} \quad J \equiv (a, c).$$

Die Polfigur ist die Grundlage für den Geschwindigkeitsplan der Scheibenkette, wenn die um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedrehten Geschwindigkeiten aufgetragen werden. Aus der Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten zweier beliebiger Punkte m und n einer starren Scheibe

$$v_m : v_n = r_m \omega : r_n \omega = r_m : r_n \quad (100)$$

folgt ein dritter Satz:

3. Die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten einer starren Scheibe F bilden eine ähnliche und zum Momentanzentrum ähnlich liegende Figur F' .

Der Geschwindigkeitsplan soll die Stützenbedingungen der Stabkette in der Regel erfüllen, um die virtuelle Arbeit der Stützenkräfte in (96) auszuschließen. Ist jedoch in einem ersten Verschiebungsplan $\sum C_e \delta_e \neq 0$, so kann damit ein zweiter Verschiebungsplan derart verbunden werden, daß die geometrische Summe der Geschwindigkeiten der Stützpunkte aus den beiden Momentanbewegungen Null ist. Die zweite von ihnen ist in der Regel eine Drehung der Stabkette ohne Relativbewegung der einzelnen Scheiben ($\omega_{ik} = 0$).

Der Geschwindigkeitsplan einer Stabkette kann auch ohne Polfigur entwickelt werden. Dabei wird stets die Geschwindigkeit des Punktes c eines Stabzweiecks (l_1, l_2) aus den bekannten Geschwindigkeiten der Endpunkte a und b bestimmt.

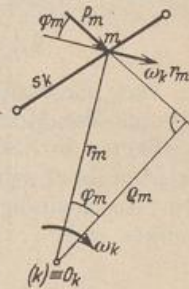


Abb. 52.

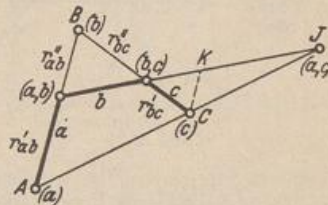


Abb. 53.

In Abb. 54 sind die gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{a'a'}$, $\vec{b'b'}$ gegeben und die gedrehte Geschwindigkeit $\vec{c'c'}$, die Hauptpole (1), (2) und die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 gesucht.

Punkt c' wird nach dem dritten Satze mit $a'c' = l_1' \parallel l_1$, $b'c' = l_2' \parallel l_2$ bestimmt. Die Hauptpole (1) und (2) sind die Schnittpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Scheiben l_1 und l_2 . Da sich diese nicht immer aufzeichnen lassen, werden die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 aus dem Geschwindigkeitsplan abgeleitet.

$$\omega_1 = \frac{\vec{a'a'}}{r_a} = \frac{v'_a}{s'_1} = \frac{v'_c}{s'_2} = \frac{v'_a + v'_c}{s'_1 + s'_2} = \frac{l_1 - l_1'}{l_1}$$

Mit den gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{m'm'}$ der Angriffspunkte m der äußeren Kräfte kann der Ansatz (82) in der folgenden Form verwendet werden (Abb. 55):

$$\delta A = \sum P_m v_m \cos(P_m, v_m) = \sum P_m h_m = \sum [P_m \vec{m'm'}]. \quad (101)$$

Das Ergebnis (101) erscheint dann als Summe der Momente der äußeren Kräfte der Stabkette in bezug auf die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Die Geschwindigkeiten v_a, v_b, \dots der Gelenkpunkte a, b, \dots können auch von einem Ur-

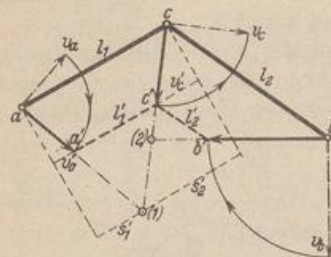


Abb. 54.

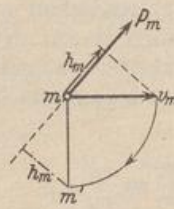


Abb. 55.

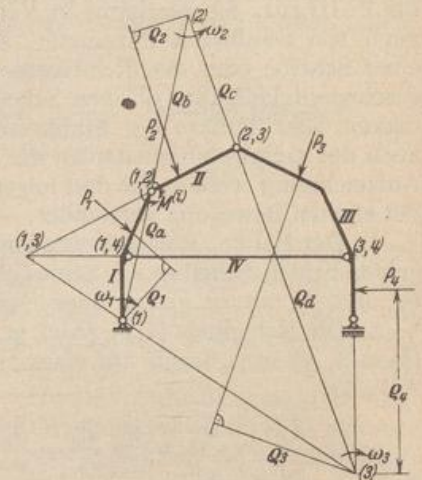


Abb. 56.

sprung O aufgetragen und der Reihe nach ebenso wie bei einem Verschiebungsplan nach Williot für $\Delta l = 0$ aufgezeichnet werden.

Dreigelenkbogen mit Zugband unter ruhender Belastung. Bestimmung des Biegemomentes aus einem Polplan. (Abb. 56).

$$\omega_1 l_a = \omega_2 l_b, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{l_a}{l_b},$$

$$\omega_2 l_c = \omega_3 l_d, \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{l_c}{l_d} = \omega_1 \frac{l_a}{l_b} \cdot \frac{l_c}{l_d},$$

$$P_1 l_1 \omega_1 + P_2 l_2 \omega_2 - (P_3 l_3 + P_4 l_4) \omega_3 - M^{(1)} (\omega_1 + \omega_2) = 0,$$

$$P_1 l_1 \omega_1 + P_2 l_2 \cdot \frac{l_a}{l_b} \omega_1 - (P_3 l_3 + P_4 l_4) \frac{l_a}{l_b} \cdot \frac{l_c}{l_d} \omega_1 - M^{(1)} \left(1 + \frac{l_a}{l_b}\right) \omega_1 = 0.$$

Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte. Die Grenzwerte von Stütz- oder Schnittkräften aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter Einzellasten P_m oder einer stetigen gleichgerichteten Flächenbelastung p werden mit Einflußlinien berechnet (77). Diese dienen zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellung und unter Umständen nach (78) auch zur Berechnung der Grenzwerte, die jedoch oft schneller und sicherer für eine in der ungünstigsten Laststellung vorhandene ruhende Kräftegruppe angegeben werden.