



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

In Abb. 54 sind die gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{a'a'}$, $\vec{b'b'}$ gegeben und die gedrehte Geschwindigkeit $\vec{c'c'}$, die Hauptpole (1), (2) und die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 gesucht.

Punkt c' wird nach dem dritten Satze mit $a'c' = l_1 \parallel l_1$, $b'c' = l_2 \parallel l_2$ bestimmt. Die Hauptpole (1) und (2) sind die Schnittpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Scheiben l_1 und l_2 . Da sich diese nicht immer aufzeichnen lassen, werden die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 aus dem Geschwindigkeitsplan abgeleitet.

$$\omega_1 = \frac{\vec{a'a'}}{r_a} = \frac{v'_a}{s'_1} = \frac{v'_c}{s'_2} = \frac{v'_a + v'_c}{s'_1 + s'_2} = \frac{l_1 - l_2}{l_1}.$$

Mit den gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{m'm'}$ der Angriffspunkte m der äußeren Kräfte kann der Ansatz (82) in der folgenden Form verwendet werden (Abb. 55):

$$\delta A = \sum P_m v_m \cos(P_m, v_m) = \sum P_m h_m = \sum [P_m \vec{m'm'}]. \quad (101)$$

Das Ergebnis (101) erscheint dann als Summe der Momente der äußeren Kräfte der Stabkette in bezug auf die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Die Geschwindigkeiten v_a, v_b, \dots der Gelenkpunkte a, b, \dots können auch von einem Ur-

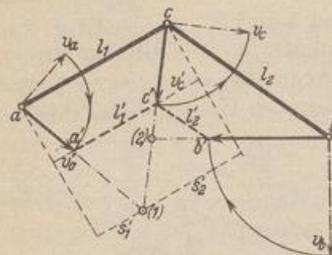


Abb. 54.

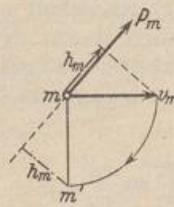


Abb. 55.

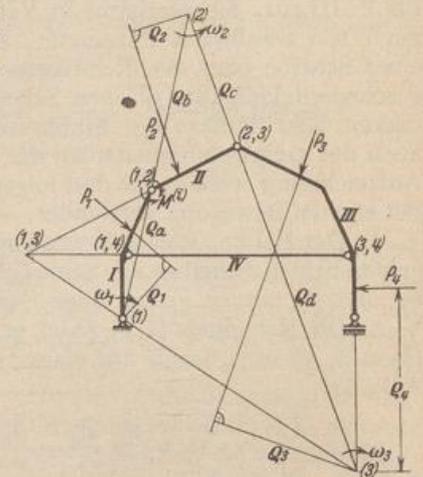


Abb. 56.

sprung O aufgetragen und der Reihe nach ebenso wie bei einem Verschiebungsplan nach Williot für $\Delta l = 0$ aufgezeichnet werden.

Dreigelenkbogen mit Zugband unter ruhender Belastung. Bestimmung des Biegemomentes aus einem Polplan. (Abb. 56).

$$\omega_1 l_a = \omega_2 l_b, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{l_a}{l_b},$$

$$\omega_2 l_c = \omega_3 l_d, \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{l_c}{l_d} = \omega_1 \frac{l_a}{l_b} \cdot \frac{l_c}{l_d},$$

$$P_1 l_1 \omega_1 + P_2 l_2 \omega_2 - (P_3 l_3 + P_4 l_4) \omega_3 - M^{(1)} (\omega_1 + \omega_2) = 0,$$

$$P_1 l_1 \omega_1 + P_2 l_2 \cdot \frac{l_a}{l_b} \omega_1 - (P_3 l_3 + P_4 l_4) \frac{l_a}{l_b} \cdot \frac{l_c}{l_d} \omega_1 - M^{(1)} \left(1 + \frac{l_a}{l_b}\right) \omega_1 = 0.$$

Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte. Die Grenzwerte von Stütz- oder Schnittkräften aus einer beweglichen Gruppe gleichgerichteter Einzellasten P_m oder einer stetigen gleichgerichteten Flächenbelastung p werden mit Einflußlinien berechnet (77). Diese dienen zur Ermittlung der ungünstigsten Laststellung und unter Umständen nach (78) auch zur Berechnung der Grenzwerte, die jedoch oft schneller und sicherer für eine in der ungünstigsten Laststellung vorhandene ruhende Kräftegruppe angegeben werden.

Ist die Einflußlinie oder einer ihrer Teile ein Dreieck, so ist die ungünstigste Stellung eines Lastzuges in dem Bereich $l = x + x'$ bei Linksfahrt erreicht, wenn die Ungleichungen

$$\frac{x}{l} < \frac{\sum_1^r P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_n}, \quad \frac{x}{l} > \frac{\sum_1^{r-1} P_m}{\sum_1^n P_m} = \frac{\mathfrak{P}_{r-1}}{\mathfrak{P}_n} \quad (102)$$

erfüllt sind und die schwersten Lasten in der Nähe der Spitze des Dreiecks liegen. Dabei ist P_1 die erste, P_n die letzte Last im Belastungsbereich l , während P_r über der Spitze steht. Die Nachprüfung der Ungleichungen setzt eine Annahme über die Stellung des Zuges voraus, mit der P_1, P_r, P_n und damit auch die Summen $\mathfrak{P}_{r-1}, \mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_n$ der Ungleichungen (102) gegeben sind.

Die Einflußlinien W_h werden dadurch gewonnen, daß die Einflußgröße W_{hm} als Funktion der Abszisse des Angriffspunktes m der wandernden Last $P=1t$ analytisch ermittelt und von einer Nulllinie aus im Lastpunkt m als Ordinate W_{hm} aufgezogen wird. Die Richtung ist durch das Vorzeichen der beiden Halbebenen bestimmt.

Jede statisch bestimmte Stütz- oder Schnittkraft kann mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (97) als äußere Kraft einer zwangsläufigen Stabverbindung berechnet werden. Um Einflußlinien zu zeichnen, wird

$$K_r^{(i)} = -\frac{1}{\Delta_r} \sum P_m \delta_m = -\frac{1_m \delta_m}{\Delta_r} \quad (103)$$

mit $P_m = 1t$, der beweglichen, am Lastgurt angreifenden Einzellast von gleichbleibender senkrechter, waagerechter oder schräger Richtung. Daher sind die Wege δ_m die Projektionen der wirklichen Verschiebungen ($\delta_{xm} \hat{+} \delta_{ym}$) auf die Krafrichtung. Sie sind in einem Verschiebungsplan des Lastgurtes enthalten, der aus der Momentanbewegung der Stabkette ($K_r^{(i)} = 0$) abgeleitet wird. Für die äußeren Kräfte in der Form von Momenten oder Kräftepaaren ist δ_m die Verdrehung desjenigen Elementes der Stabkette, an welchem diese angreifen. Die Geschwindigkeit Δ_r kann als der frei verfügbare Parameter der Bewegung angesehen werden, so daß die Geschwindigkeiten δ_m der Punkte m des Lastgurtes Funktionen von Δ_r sind und in der Richtung mit derjenigen der wandernden Last übereinstimmen. Sie werden also mit senkrechtem, waagerechtem oder schräg gerichtetem Vektor aufgetragen. Danach ist der Geschwindigkeitsplan der Stabkette bei geeignetem Maßstab das Einflußfeld der Schnittkraft, aus dem deren Einflußlinie für beliebig gerichtete Lastgruppen abgeleitet werden.

Während der Momentanbewegung der Stabkette beschreibt jedes Element s_k eine Drehung um den zugeordneten Hauptpol (h), so daß sich die Geschwindigkeiten der Punkte des Lastgurtes linear mit der Entfernung vom Hauptpol ändern. Daher ist jedem Element der Stabkette eine Gerade der Einflußlinie zugeordnet. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Hauptpol liefert im Schnitt mit dem Lastgurt einen durch $\delta_m = 0$ ausgezeichneten Punkt. Er bildet die dem Element zugeordnete Lastscheide. Die Parallele zur Krafrichtung durch den Nebenpol (h, k) trifft denjenigen Punkt auf dem Lastgurt, dessen Verschiebung δ_m als Punkt der Scheibe h ebenso groß ist wie als Punkt der Scheibe k . Jeder Nebenpol bestimmt damit eine

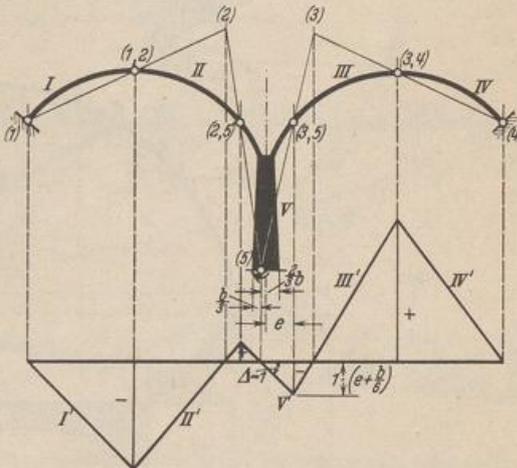


Abb. 57. Einflußlinie des Kernmomentes in der Sohle eines Gewölbepfeilers.

Ecke der Einflußlinie. Die Polfigur der Stabkette liefert also für jede Krafrichtung die Form der Einflußlinie. Der frei verfügbare Parameter Δ_r wird so gewählt, daß

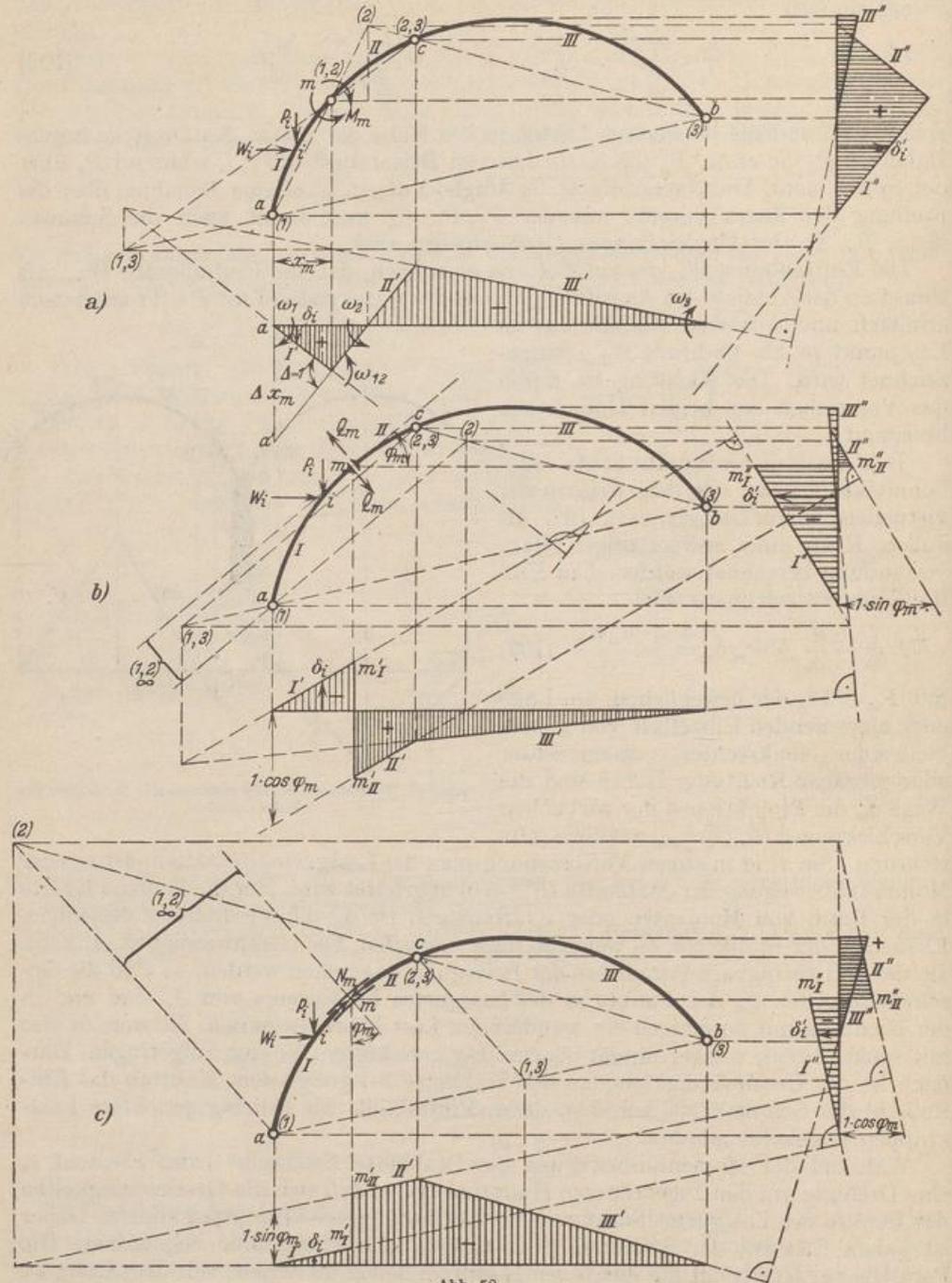


Abb. 58.

$K_r^{(i)} \Delta_r = -K_r^{(i)} \cdot 1_r$, also $|\Delta_r| = 1$ und daher bei starrer Stützung ($\delta_e = 0$)

$$1_r \cdot K_r^{(i)} = \sum P_m \delta_m. \quad (104)$$

Damit ist auch der Maßstab der Einflußlinie bestimmt (Abb. 57).

Die Ordinaten δ_m der Einflußlinie sind durch die Ableitung aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ebenso wie Δ_r Geschwindigkeiten. Daher ist auch das Vorzeichen der Einflußlinie durch das Vorzeichen der virtuellen Arbeiten $P_m \delta_m$, $M_m \omega_k$ bestimmt.

Einflußlinien der Schnittkräfte eines Dreigelenkbogens (Abb. 58):

a) Einflußlinie für das Biegemoment im Querschnitt m bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58a).

Kinematische Kette für $M_m = 0$: Stäbe I, II, III . Hauptpole: $(1) \equiv a, (3) \equiv b$. Nebenpole $(1, 2), (2, 3)$. Hieraus ergeben sich (2) mit $(1), (1, 2)$ und $(3), (2, 3)$, ferner der Nebenpol $(1, 3)$ mit $(1), (3)$ und $(1, 2), (2, 3)$. Die Lastscheiden liegen auf Parallelen zur Belastungsrichtung durch die Hauptpole $(1), (2), (3)$, die Eckpunkte der Einflußlinie auf Parallelen durch die Nebenpole $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$. Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = 0 = -M_m \omega_1 - M_m \omega_2 + P_i \delta_i; \quad M_m \cdot (\omega_1 + \omega_2) = M_m \Delta = P_i \delta_i; \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

$\Delta = 1$ bedeutet bei Gleichsetzung von Sehne und Bogen $\bar{a} \bar{a}' = x_m$. Die Einheit kann auch aus der Relativbewegung des Stabes II gegen I bestimmt werden:

$$-M \omega_{21} + P_i \delta_i = 0; \quad \omega_{21} = \Delta = 1, \quad \bar{a} \bar{a}' = x_m.$$

Die Grenzlinien der waagerechten Einflußlinie sind zu den zugeordneten Geraden der senkrechten Einflußlinie winkelrecht. Daher gilt ebenfalls

$$+M \omega_{21} = W_i \delta_i.$$

b) Einflußlinie für die Querkraft Q_m bei senkrechter und waagerechter Belastung (Abb. 58b).

Kinematische Kette für $Q = 0$. Ermittlung der Polfigur. Die Hauptpole $(1), (3)$ und der Nebenpol $(2, 3)$ sind gegeben. Der Nebenpol $(1, 2)$ liegt, da II sich gegen I parallel verschiebt, auf der Tangente des Bogens im Unendlichen. Der Hauptpol (2) wird durch $I, (1, 2)$ und $3, (2, 3)$ gefunden. Damit sind auch die Lastscheiden und Eckpunkte der senkrechten und waagerechten Einflußlinie gegeben. Zur Bestimmung der Einheit der Einflußlinie wird die Relativbewegung der Stäbe I und II betrachtet. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta A = 0$ ergibt bei der senkrechten Einzellast

$$-Q_m \frac{m'_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } Q_m = P_i \delta_i.$$

Um daher den Verschiebungsplan der Kette als Einflußlinie zu verwenden, wird der Parameter $m'_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m$ gewählt. In diesem Falle ist die gegenseitige Verschiebung Δ der Querschnitte m_I und m_{II} in Richtung von Q_m gleich der Einheit. Für eine waagerechte Einzellast W_i ist

$$-Q_m \frac{m''_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } Q_m = W_i \delta'_i.$$

c) Die Ansätze für die Einflußlinien der Längskraft lauten (Abb. 58c):

$$-N_m \frac{m'_I m''_{II}}{\sin \varphi_m} - P_i (-\delta_i) = 0, \quad \text{für } m'_I m''_{II} = 1 \sin \varphi_m \text{ wird } N_m = P_i \delta_i;$$

$$-N_m \frac{m''_I m''_{II}}{\cos \varphi_m} - W_i (-\delta'_i) = 0, \quad \text{für } m''_I m''_{II} = 1 \cos \varphi_m \text{ wird } N_m = W_i \delta'_i.$$

Die Abb. 59 zeigt die Einflußlinie der Querkraft Q_m eines unterspannten Balkenträgers. Sie ist aus dem Pol- und Verschiebungsplan der kinematischen Kette $Q_m = 0$ mit der Annahme $v_b = 0$ entwickelt worden. Damit ergeben sich die Hauptpole $(2)', (3)', (4)'$ und die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit $b' b''$ des Stützpunktes b . Um hier die Stützenbedingung nachträglich zu erfüllen, wird nach S. 47 ein zweiter Verschiebungsplan gezeichnet, der durch den Weg $\overrightarrow{b' b''}$ und $\omega_{12} = 0$ bestimmt ist. Damit wird $a' b''$ zur Achse der Einflußlinie. $m'_I m''_{II} = \Delta = 1$ ist Einheit der Einflußlinie.

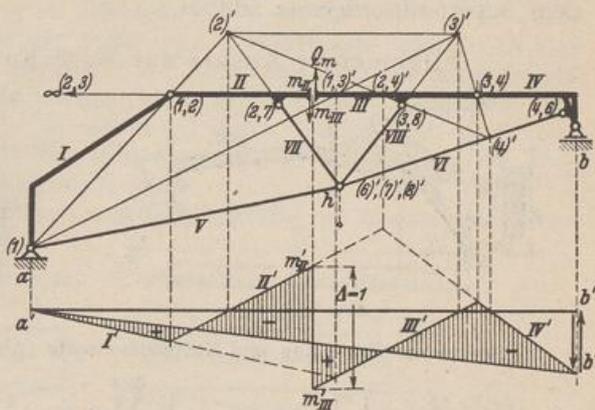


Abb. 59. Ableitung der Einflußlinie der Querkraft Q_m einer mehrgliedrigen Scheibenverbindung.

Land, R.: Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. Bd. 40 (1888) S. 11 u. 162. — Müller-Breslau, H.: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 1. Leipzig 1905. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Saliger, R.: Praktische Statik 2. Aufl. Wien 1927. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Beyer, K.: Baustatik. Taschenb. f. Bauing. Bd. I S. 270. Berlin 1928. — Hertwig, A.: Statik der Baukonstruktionen. Handb. physik. u. techn. Mechan. Bd. 4. Leipzig 1929. — Kaufmann, W.: Statik der Tragwerke. Handbibl. f. Bauing. 2. Aufl. Berlin 1930.

14. Der einfache Balkenträger.

Ein Stab mit gerader, gebrochener oder gekrümmter Achse wird als Balkenträger bezeichnet, wenn eine senkrechte Belastung nur senkrechte Stützkkräfte hervorruft. Er wird an den Enden aufgelagert oder als Kragträger verwendet.

Ruhende Belastung. Eine allgemeine Belastung wird oft mit Vorteil aufgeteilt. Stütz- und Schnittkräfte werden getrennt für jeden Anteil angegeben und nach dem Superpositionsgesetz addiert.

Allgemeiner Ansatz zur Berechnung der Stützkkräfte.

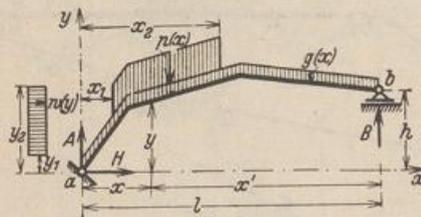


Abb. 60.

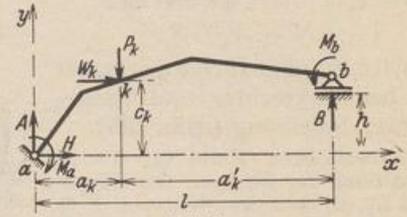


Abb. 61.

a) Senkrechte Belastung und Stützenmomente (Abb. 60 und 61):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_b - M_a}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x' dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a'_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x' dx, \\ B_1 &= \frac{M_a - M_b}{l} + \frac{1}{l} \int_0^l g(x) x dx + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} P_k a_k + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} p(x) x dx. \end{aligned} \right\} H = 0 \quad (105)$$

b) Waagerechte Belastung (Abb. 60 und 61):

$$B_2 = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{k=n} W_k c_k + \frac{1}{l} \int_{y_1}^{y_2} w(y) y dy = -A_2, \quad H = - \left(\sum_{k=1}^{k=n} W_k + \int_{y_1}^{y_2} w(y) dy \right).$$

Allgemeiner Ansatz für die Berechnung der Schnittkräfte (Abb. 62).

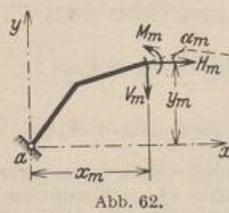


Abb. 62.

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + A_2, & B &= B_1 + B_2, \\ V_m &= A - \int_0^{x_m} g(x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k - \int_{x_1}^{x_m} p(x) dx; \\ H_m &= - \left(H + \sum_{k=1}^{k=s} W_k + \int_{y_1}^{y_m} w(y) dy \right); \\ Q_m &= H_m \sin \alpha_m + V_m \cos \alpha_m; \\ N_m &= H_m \cos \alpha_m - V_m \sin \alpha_m; \\ M_m &= A x_m - \int_0^{x_m} g(x) (x_m - x) dx - \sum_{k=1}^{k=r} P_k (x_m - a_k) - \int_{x_1}^{x_m} p(x) (x_m - x) dx \\ &\quad - H y_m - \sum_{k=1}^{k=s} W_k (y_m - c_k) - \int_{y_1}^{y_m} w(y) (y_m - y) dy + M_a. \end{aligned} \right\} (106)$$