Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

17. Die allgemeinen Ansätze

III. Die Formänderung des ebenen Stabzugs.

17. Die allgemeinen Ansätze.

Scheibe und Träger gelten bei ihrer Verwendung im Bauwesen in der Regel als Stäbe, deren Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben und nicht in ihrer Ebene verzerrt werden. Diese Voraussetzung ist nur bei geschlossenem, unveränderlichem Querschnitt mit kleinen Abmessungen relativ zur Stablänge erfüllt. Die Formänderung des Stabes kann dann durch die Verschiebung des Schwerpunktes u_0, v_0, w_0 und durch die Verdrehung ψ_x, ψ_y, ψ_z des Querschnitts, also durch 6 Komponenten beschrieben werden. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes des Querschnitts ist bei $\psi_x \approx 0$ und bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung $v = v_0$, $w = w_0$, $u \neq u_0$, so daß nach (26) die folgenden Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Komponenten des Verzerrungs- und Spannungszustandes bestehen:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ &\sigma_x = E\,\varepsilon_x, \qquad \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Die allgemeinen Ergebnisse des Abschnitts 8 für die Formänderungsarbeit und für das Clapeyronsche Gesetz lassen sich daher mit den äußeren Kräften $\mathfrak{Q}_m$, M_m und p_x, p_y, p_z je Längeneinheit folgendermaßen vereinfachen:

$$\begin{aligned} A_i &= \tfrac{1}{2}\int (p_x u + p_y v + p_z w)\, ds + \tfrac{1}{2}\sum \mathfrak{Q}_m \mathfrak{s}_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m \\ &= \tfrac{1}{2}\int (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy})\, dV, \end{aligned} \tag{144}$$

$$A_i(\varepsilon, \gamma) = G\int [(1+\mu)\,\varepsilon_x^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2)]\, dV, \tag{145}$$

$$A_i(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{G}\right] dV. \tag{146}$$

Variation nach den Verschiebungen (Prinzip der virtuellen Verrückungen):

$$\int (p_z\,\delta w + p_x\,\delta u + p_y\,\delta v)\, ds + \sum \mathfrak{Q}_m\,\delta\mathfrak{s}_m + \sum \mathsf{M}_m\,\delta\varphi_m = \int (\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \tau_{xz}\,\delta\gamma_{xz} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\, dV. \tag{147}$$

Variation nach den Spannungen (Castiglianos Prinzip):

$$\int (\delta p_z\, w + \delta p_x\, u + \delta p_y\, v)\, ds + \sum \delta\mathfrak{Q}_m\,\mathfrak{s}_m + \sum \delta\mathsf{M}_m\,\varphi_m = \int (\delta\sigma_x\,\varepsilon_x + \delta\tau_{xz}\,\gamma_{xz} + \delta\tau_{xy}\gamma_{xy})\, dV. \tag{148}$$

Bei einem Stab oder Stabzug mit einer Symmetrieebene, welche die Wirkungslinien aller äußeren Kräfte enthält, ist aus Symmetriegründen

$$p_y = 0; \qquad v_0 = \psi_x = \psi_z = 0, \qquad \gamma_{xy} = 0, \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{149}$$

und daher

$$A_i = \frac{1}{2}\int (\sigma_x\,\varepsilon_x + \tau_{xz}\gamma_{xz})\, dV = G\int \left[(1+\mu)\,\varepsilon_x^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^2\right] dV = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xz}^2}{G}\right) dV. \tag{150}$$

In den Variationsansätzen (147) und (148) scheiden die Glieder γ_{xy}, τ_{xy}, γ_{xz}, τ_{xz} aus. Die Variation der stetigen Belastung δp_x, δp_y, δp_z ist für die Anwendung ohne Bedeutung.

Die Variation des Verschiebungszustandes besteht aus den virtuellen Verschiebungen δu, δv, δw und aus den hiermit geometrisch verträglichen Verzerrungen $\delta\varepsilon_x$, $\delta\gamma_{xz}$, $\delta\gamma_{xy}$ der differentialen Elemente des Stabes. Die Variation des Spannungszustandes besteht aus einer virtuellen Gruppe von äußeren Kräften $\delta\mathfrak{Q}_m$, $\delta\mathsf{M}_m$, die untereinander und mit den Spannungen $\delta\sigma_x, \delta\tau_{xz}, \delta\tau_{xy}$ im Gleichgewicht sind. In der Baustatik sind hierfür besondere Bezeichnungen üblich. Man setzt:

$$\delta u = \bar{u}, \quad \delta v = \bar{v}, \quad \delta w = \bar{w}, \quad \delta\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x, \quad \delta\gamma_{xz} = \bar{\gamma}_{xz}, \quad \delta\gamma_{xy} = \bar{\gamma}_{xy}.$$

Die Projektion von $\delta\mathfrak{s}_m$ auf die Kraftrichtung $\mathfrak{Q}_m$ ist die virtuelle Verschiebung $\bar{\delta}_m$. Die Komponenten des virtuellen Belastungs- und Spannungszustandes sind

$$\delta\mathfrak{Q}_m = \bar{\mathfrak{Q}}_m, \quad \delta\mathsf{M}_m = \bar{\mathsf{M}}_m, \quad \delta\sigma_x = \bar{\sigma}_x, \quad \delta\tau_{xz} = \bar{\tau}_{xz}, \quad \delta\tau_{xy} = \tau_{xy}.$$

Die Gruppe der virtuellen äußeren Kräfte $\bar{\mathfrak{Q}}_m$ zerfällt in die virtuelle Belastung $\bar{P}_m$ und in die zugeordneten Stützkräfte $\bar{C}_e$. Die Projektionen der Verschiebungen $(u_m \dotplus v_m \dotplus w_m) = \mathfrak{s}_m$ auf die Kraftrichtungen $\bar{P}_m$ werden δ_m, die Projektionen der bekannten Verschiebungen der Stützpunkte auf die Richtung der Stützkräfte Δ_e genannt. Die Variationsansätze (147) und (148) lauten dann nach (149) für Stäbe mit einer Symmetrieebene, welche nach Abb. 21 die Belastung enthält, folgendermaßen:

Variation der Formänderungsarbeit nach den Verschiebungen (Prinzip der virtuellen Verrückungen):

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum \mathsf{M}_m \bar{\varphi}_m + \sum C_e \bar{\Delta}_e = \int (\sigma_x \bar{\varepsilon}_x + \tau_{xz} \bar{\gamma}_{xz})\, dV; \tag{151}$$

Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen (Castiglianos Prinzip):

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{\mathsf{M}}_m \varphi_m + \sum \bar{C}_e \Delta_e = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\tau}_{xz} \gamma_{xz})\, dV. \tag{152}$$

Die Dehnung $\varepsilon_x = \varepsilon_x(z)$ ist durch die Symmetrie der vorgeschriebenen Belastung unabhängig von y und bei der angenommenen ebenen Verschiebung des Querschnitts durch die Kräfte (P, C_e) und einem linearen Temperaturgefälle t linear in z.

$$\left.\begin{aligned} t(z) &= t + (t_i - t_a)\frac{z}{h} = t + \frac{\Delta t}{h} z. \\ \varepsilon_x(z) &= (\varepsilon_0 + \alpha_t t) + \left(\frac{d\psi_y}{ds} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right) z. \end{aligned}\right\} \tag{153}$$

Durch Einführung der Schnittkräfte nach (51) und (59) wird daher bei geraden und mit genügender Annäherung auch bei gekrümmten Stäben

$$\varepsilon_x(z) = \frac{N}{EF} + \frac{M_y}{EJ_y} z + \alpha_t t + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z, \qquad \gamma_{xz} \approx \gamma_{xz,0} = \frac{\varkappa Q_z}{GF}, \tag{154}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{M}_y}{J_y} z, \qquad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\bar{Q}_z S_{by}}{J_y b}. \tag{155}$$

Dabei ist für die Änderung der rechten Winkel $\gamma_{xz}(z)$ des differentialen Prismas durch die Schubspannungen τ_{xz} ein Mittelwert $\gamma_{xz,0}$ eingeführt worden. N, M_y, Q_z sind die Schnittkräfte aus der vorgeschriebenen Belastung (P, C), $\bar{N}, \bar{M}_y, \bar{Q}_z$ die Schnittkräfte aus der virtuellen Belastung $(\bar{P}, \bar{C})$. Sie werden nach den Angaben in den Abschnitten 13ff. berechnet, so daß die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen in der folgenden Form verwendet werden kann:

$$\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{\mathsf{M}}_m \varphi_m + \sum \bar{C}_e \Delta_e =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{N}{EF} + \alpha_t t\right) ds \int_F \bar{\sigma}_x dF + \int_0^l \left(\frac{M_y}{EJ_y} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right) ds \int_F \bar{\sigma}_x z\, dF + \int_0^l \frac{\varkappa Q_z}{GF} ds \int_F \bar{\tau}_{xz} dF.$$

Dabei ist $dV = F\,ds$. Mit $\int_F z\,dF = 0$, $\int_F z^2 dF = J_y$ und $\int_F dF = F$ ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum \bar{P}_m \delta_m + \sum \bar{\mathsf{M}}_m \varphi_m + \sum \bar{C}_e \Delta_e = \\ &= \int_0^l \frac{\bar{N} N}{EF} ds + \int_0^l \frac{\bar{M}_y M_y}{EJ_y} ds + \int_0^l \varkappa \frac{\bar{Q}_z Q_z}{GF} ds + \int_0^l \bar{N} \alpha_t t\, ds + \int_0^l \bar{M}_y \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Die Erweiterung des Ansatzes für allgemeinere Belastungsannahmen nach (49) und (58) bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Die Integration erstreckt sich über diejenigen Teile des Stabzugs, deren Spannungen und Dehnungen nach dem Geradliniengesetz angegeben werden können, so daß die Stabzugecken und Stabzugknoten streng genommen ausscheiden. Bei dem summarischen Charakter des Ansatzes wird jedoch in der Regel die theoretische Stablänge zugrunde gelegt und der Stababschnitt im Knoten nur in Ausnahmefällen mit $J = \infty$ als starr angenommen.

Der Clapeyronsche Ansatz für den Stabzug. Der allgemeine Ansatz des Abschnitts 8 kann nach den mit der Definition des Spannungszustandes eines Stabzugs verbundenen Annahmen folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m = A_i. \tag{157}$$

Bei vorgeschriebenen Stützenverschiebungen tritt an die Stelle der Formänderungsarbeit A_i nach (150) die Ergänzungsarbeit A_i^*. Sie ist nach (37)

$$A_i^* = A_i - \sum C_e \Delta_e. \tag{158}$$

Ändert sich während der Formänderung außerdem die Temperatur des Stabzugs, so ist mit $M_y = M,\ Q_z = Q$

$$\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m = A_i - \sum C_e \Delta_e + \int N \alpha_t t\, ds + \int M \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds = A_i^{**}. \tag{159}$$

Auf Grund des Hookeschen Gesetzes kann jede Verschiebung δ_m und jede Winkeländerung φ_m als lineare Funktion der einzelnen Lasten und Kräftepaare entwickelt werden.

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \delta_{m1} P_1 + \cdots \delta_{mk} P_k + \cdots + \delta'_{m1} \mathsf{M}_1 + \cdots \delta'_{mk} \mathsf{M}_k + \cdots, \\ \varphi_m &= \varphi'_{m1} P_1 + \cdots \varphi'_{mk} P_k + \cdots + \varphi_{m1} \mathsf{M}_1 + \cdots \varphi_{mk} \mathsf{M}_k + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Wird der Ansatz (159) mit dieser Superposition nach P_k oder M_k partiell differentiiert, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_k}\left[\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m\right] &= \delta_k, \\ \frac{\partial}{\partial \mathsf{M}_k}\left[\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m\right] &= \varphi_k. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Die Komponenten δ_k oder φ_k des Verschiebungszustandes werden demnach als partielle Ableitungen einer der Funktionen A_i, A_i^* oder A_i^{**} nach der am Querschnitt k angreifenden Kraft P_k oder dem hier wirkenden Kräftepaar M_k gefunden. Richtung und Sinn von δ_k und φ_k stimmen mit $\vec{P}_k$ und $\vec{\mathsf{M}}_k$ überein.

$$\delta_k = \frac{\partial A_i}{\partial P_k}, \qquad \varphi_k = \frac{\partial A_i}{\partial \mathsf{M}_k}. \tag{162}$$

Nach (51), (59) und (154) ist die Formänderungsarbeit des Stabzugs

$$A_i = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M^2}{EJ} + \varkappa \frac{Q^2}{GF}\right) ds, \tag{163}$$

und demnach bei gleichzeitiger Änderung der Temperatur und Verschiebung der Stützen

$$\left.\begin{aligned} \delta_k = \int_0^l N \frac{\partial N}{\partial P_k}\frac{ds}{EF} + \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P_k}\frac{ds}{EJ} + \int_0^l \varkappa Q \frac{\partial Q}{\partial P_k}\frac{ds}{GF} - \sum \frac{\partial C_e}{\partial P_k}\Delta_e \\ + \int_0^l \frac{\partial N}{\partial P_k}\alpha_t t\, ds + \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P_k}\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\, ds. \end{aligned}\right| \tag{164}$$

Jede Stütz- oder Schnittkraft kann nach dem Superpositionsgesetz als lineare Funktion der Belastung angeschrieben werden.

$$N = \sum_1^n N_m P_m, \qquad M = \sum_1^n M_m P_m, \qquad Q = \sum_1^n Q_m P_m, \qquad C = \sum_1^n C_m P_m.$$

Daher ist

$$\frac{\partial N}{\partial P_k} = N_k, \qquad \frac{\partial M}{\partial P_k} = M_k, \qquad \frac{\partial Q}{\partial P_k} = Q_k, \qquad \frac{\partial C}{\partial P_k} = C_k. \tag{165}$$

Die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach P_k führt also zu dem bereits bekannten Ergebnis (156) mit der virtuellen Belastung $\overline{P}_k = 1$.

Um die Verschiebung $\overrightarrow{kk'}$ als partielle Ableitung einer der Funktionen A_i zu berechnen, ist unter Umständen die vorgeschriebene Belastung $\mathfrak{P}$ durch eine in Richtung $\overrightarrow{kk'}$ wirkende Kraft $P_k = 0$ oder ein im Drehsinn $\overrightarrow{kk'}$ wirkendes Kräftepaar $\mathsf{M}_k = 0$ zu ergänzen, um im Ansatz über die für die Ableitung der Funktion notwendige Veränderliche P_k, M_k zu verfügen.

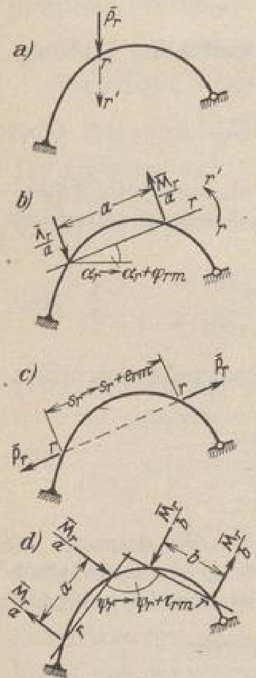

Abb. 96.

Das Prinzip der Wechselwirkung für den Stabzug. Das Prinzip der Wechselwirkung von E. Betti ist für die virtuelle Arbeit zweier Kräftegruppen an einem elastischen Körper bewiesen worden. Es bedarf nach (156) für den Stabzug keiner besonderen Begründung, wenn die Anteile $(M\,ds/EJ)$, $(\overline{M}\,ds/EJ)$ des Integranden als die Verzerrungskomponenten aus zwei Kräftegruppen $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ und $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$ angesehen werden. Die rechte Seite des Ansatzes (156) bedeutet dann entweder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$ während der Formänderung (δ, φ) aus $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ oder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ während der Formänderung $(\overline{\delta}, \overline{\varphi})$ aus $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$

$$\sum \overline{P}_m \delta_m + \sum \overline{\mathsf{M}}_m \varphi_m = \sum P_m \overline{\delta}_m + \sum \mathsf{M}_m \overline{\varphi}_m. \tag{166}$$

Ist nur die Kraft $\overline{P}_r$ oder das Kräftepaar $\overline{\mathsf{M}}_r$ vorhanden und daher

$$\overline{P}_r \delta_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \qquad \overline{\mathsf{M}}_r \varphi_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \tag{167}$$

so wird der Ansatz in der Regel nach J. Cl. Maxwell benannt. Die virtuelle Arbeit der im Punkte r in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ wirkenden Kraft $\overline{P}_r$ während der Verschiebung δ_{rm} des Punktes r in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ durch $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ ist gleich der virtuellen Arbeit, welche die Kräfte $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ während der Verschiebungen $\overline{\delta}_{mr}$ der Punkte m infolge $\overline{P}_r$ leisten. Der zweite Ansatz kann ähnlich ausgesprochen werden. Die Beziehung gilt auch für die virtuelle Arbeit $\overline{P}_r \cdot e_{rm}$ zweier gleichgroßer, entgegengesetzt gerichteter, an den beiden Punkten r wirkenden Kräfte $\overline{P}_r$ und für die virtuelle Arbeit $\overline{\mathsf{M}}_r \cdot \tau_{rm}$ zweier an den beiden Geraden r des Stabwerks angreifenden, im Gleichgewicht stehenden Kräftepaare $\overline{\mathsf{M}}_r$. Dabei ist e_{rm} die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares r und τ_{rm} die gegenseitige Verdrehung der beiden ausgezeichneten Geraden r infolge von $(P_1 \ldots P_m \ldots)$. Dagegen sind $\overline{\delta}_{mr}$ je nach dem Ansatz die Verschiebungen der Punkte m des Stabzugs in Richtung von P_m, welche entweder von der Belastung $\overline{P}_r$ des Punktes r, der Belastung $\overline{\mathsf{M}}_r$ der Geraden r, der Belastung $\overline{P}_r$ des Punktepaares r oder der Belastung $\overline{M}_r$ des Geradenpaares r erzeugt werden (Abb. 96).

Einflußlinie der Verschiebung und Winkeländerung. Wird $\overline{P}_r = 1$ t und $\overline{M}_r = 1$ mt gewählt und die beliebige Kräftegruppe $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ durch eine wandernde, d. h. an einem beliebigen Punkt m des Lastgurtes angreifende Kraft $P_m = 1$ t ersetzt, so bedeuten $\delta_{rm}, \varphi_{rm}, e_{rm}, \tau_{rm}$ die Ordinaten der Einflußlinien dieser Komponenten des Verschiebungszustandes. Sie werden aus (167) nach dem folgenden Ansatz berechnet:

$$\overline{1}_r \, \delta_{rm} = 1_m \, \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \, \varphi_{rm} = 1_m \, \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \, e_{rm} = 1_m \, \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \, \tau_{rm} = 1_m \, \overline{\delta}_{mr}. \qquad (168)$$

Jedes Produkt ist eine virtuelle Arbeit mit der Dimension mt. Die Drehwinkel φ_{rm}, τ_{rm} sind dimensionslos, die Einheit hat also je nach dem Ansatz die Dimension der Kraft oder des Kräftepaares.

Die Einflußgrößen $\delta_{rm}, e_{rm}, \varphi_{rm}, \tau_{rm}$ werden daher als Projektionen der wirklichen Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes auf die Richtung der wandernden Einzellast P_m bestimmt. Sie sind damit Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes, welche je nach der Art der Einflußlinie für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punkte r oder für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punktepaare r, für die Belastungseinheit $\overline{M}_r = 1$ an der Geraden r oder für die Belastungseinheit $\overline{M}_r = 1$ am Geradenpaar r nach einer durch die wandernde Last bestimmten Richtung aufgezeichnet wird. Die Einflußlinien der Formänderungen werden daher nach den Abschnitten 20 und 21 über Biegelinien entwickelt.

18. Die Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes.

Die Form eines Stabzugs ändert sich durch Belastung, Temperaturwechsel und Stützenbewegung. Der Vorgang kann durch die Messung der Verschiebung ausgezeichneter Punkte oder durch die Messung der Verdrehung einzelner Stäbe und Querschnitte beobachtet werden. Der Vergleich mit den durch Rechnung gewonnenen Ergebnissen ermöglicht die Nachprüfung der Annahmen der Theorie oder ein Urteil über die Zuverlässigkeit des Spannungsnachweises. Die gerechneten Verschiebungen können außerdem zur Abschätzung der Steifigkeit der Konstruktion und deren niedrigster Eigenschwingungszahl oder zur Untersuchung von statisch unbestimmten Tragwerken verwendet werden.

Aus diesem Grunde wird die senkrechte oder waagerechte Verschiebung einzelner Punkte, also der Stabmitten, Gelenke und Rahmenecken bestimmt. Ebenso kann die Verdrehung von Stäben und Stabknoten, die gegenseitige Verschiebung von Punktepaaren oder die gegenseitige Verdrehung von Stäben und Gelenkteilen berechnet werden. Die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks werden in jedem Fall als bekannt vorausgesetzt.

Ansatz der Rechnung. Die Aufgabe wird durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen gelöst (156). Die virtuelle Belastung $\overline{P}, \overline{M}$ ist frei wählbar und kann daher auch so festgesetzt werden, daß die gesuchte Verschiebung δ_k eines Punktes k nach einer ausgezeichneten Richtung $\overrightarrow{kk'}$ unmittelbar durch den Ausdruck der Arbeit der virtuellen eingeprägten Kräfte $\overline{1}_k \cdot \delta_k$ angegeben wird. Die virtuelle Belastung ist damit als einzelne Kraft $\overline{P}_k = 1$ t im Punkte k mit der Richtung $\overrightarrow{kk'}$ definiert. Dasselbe gilt bei der Berechnung der Verdrehung φ_k eines Querschnitts oder einer ausgezeichneten Geraden k des Stabzugs. Die virtuelle