# Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Der Clapeyronsche Ansatz für den Stabzug

Die Erweiterung des Ansatzes für allgemeinere Belastungsannahmen nach (49) und (58) bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Die Integration erstreckt sich über diejenigen Teile des Stabzugs, deren Spannungen und Dehnungen nach dem Geradliniengesetz angegeben werden können, so daß die Stabzugecken und Stabzugknoten streng genommen ausscheiden. Bei dem summarischen Charakter des Ansatzes wird jedoch in der Regel die theoretische Stablänge zugrunde gelegt und der Stababschnitt im Knoten nur in Ausnahmefällen mit $J = \infty$ als starr angenommen.

**Der Clapeyronsche Ansatz für den Stabzug.** Der allgemeine Ansatz des Abschnitts 8 kann nach den mit der Definition des Spannungszustandes eines Stabzugs verbundenen Annahmen folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m = A_i. \tag{157}$$

Bei vorgeschriebenen Stützenverschiebungen tritt an die Stelle der Formänderungsarbeit $A_i$ nach (150) die Ergänzungsarbeit $A_i^*$. Sie ist nach (37)

$$A_i^* = A_i - \sum C_e \Delta_e. \tag{158}$$

Ändert sich während der Formänderung außerdem die Temperatur des Stabzugs, so ist mit $M_y = M,\ Q_z = Q$

$$\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m = A_i - \sum C_e \Delta_e + \int N \alpha_t t\, ds + \int M \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds = A_i^{**}. \tag{159}$$

Auf Grund des Hookeschen Gesetzes kann jede Verschiebung $\delta_m$ und jede Winkeländerung $\varphi_m$ als lineare Funktion der einzelnen Lasten und Kräftepaare entwickelt werden.

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \delta_{m1} P_1 + \cdots \delta_{mk} P_k + \cdots + \delta'_{m1} \mathsf{M}_1 + \cdots \delta'_{mk} \mathsf{M}_k + \cdots, \\ \varphi_m &= \varphi'_{m1} P_1 + \cdots \varphi'_{mk} P_k + \cdots + \varphi_{m1} \mathsf{M}_1 + \cdots \varphi_{mk} \mathsf{M}_k + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Wird der Ansatz (159) mit dieser Superposition nach $P_k$ oder $\mathsf{M}_k$ partiell differentiiert, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_k}\left[\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m\right] &= \delta_k, \\ \frac{\partial}{\partial \mathsf{M}_k}\left[\tfrac{1}{2}\sum P_m \delta_m + \tfrac{1}{2}\sum \mathsf{M}_m \varphi_m\right] &= \varphi_k. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Die Komponenten $\delta_k$ oder $\varphi_k$ des Verschiebungszustandes werden demnach als partielle Ableitungen einer der Funktionen $A_i$, $A_i^*$ oder $A_i^{**}$ nach der am Querschnitt $k$ angreifenden Kraft $P_k$ oder dem hier wirkenden Kräftepaar $\mathsf{M}_k$ gefunden. Richtung und Sinn von $\delta_k$ und $\varphi_k$ stimmen mit $\vec{P}_k$ und $\vec{\mathsf{M}}_k$ überein.

$$\delta_k = \frac{\partial A_i}{\partial P_k}, \qquad \varphi_k = \frac{\partial A_i}{\partial \mathsf{M}_k}. \tag{162}$$

Nach (51), (59) und (154) ist die Formänderungsarbeit des Stabzugs

$$A_i = \frac{1}{2}\int \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M^2}{EJ} + \varkappa \frac{Q^2}{GF}\right) ds, \tag{163}$$

und demnach bei gleichzeitiger Änderung der Temperatur und Verschiebung der Stützen

$$\left.\begin{aligned} \delta_k = \int_0^l N \frac{\partial N}{\partial P_k}\frac{ds}{EF} + \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P_k}\frac{ds}{EJ} + \int_0^l \varkappa Q \frac{\partial Q}{\partial P_k}\frac{ds}{GF} - \sum \frac{\partial C_e}{\partial P_k}\Delta_e \\ + \int_0^l \frac{\partial N}{\partial P_k}\alpha_t t\, ds + \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P_k}\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\, ds. \end{aligned}\right| \tag{164}$$

Jede Stütz- oder Schnittkraft kann nach dem Superpositionsgesetz als lineare Funktion der Belastung angeschrieben werden.

$$N = \sum_1^n N_m P_m, \qquad M = \sum_1^n M_m P_m, \qquad Q = \sum_1^n Q_m P_m, \qquad C = \sum_1^n C_m P_m.$$

Daher ist

$$\frac{\partial N}{\partial P_k} = N_k, \qquad \frac{\partial M}{\partial P_k} = M_k, \qquad \frac{\partial Q}{\partial P_k} = Q_k, \qquad \frac{\partial C}{\partial P_k} = C_k. \tag{165}$$

Die partielle Ableitung der Funktion $A_i^{**}$ nach $P_k$ führt also zu dem bereits bekannten Ergebnis (156) mit der virtuellen Belastung $\overline{P}_k = 1$.

Um die Verschiebung $\overrightarrow{kk'}$ als partielle Ableitung einer der Funktionen $A_i$ zu berechnen, ist unter Umständen die vorgeschriebene Belastung $\mathfrak{P}$ durch eine in Richtung $\overrightarrow{kk'}$ wirkende Kraft $P_k = 0$ oder ein im Drehsinn $\overrightarrow{kk'}$ wirkendes Kräftepaar $\mathsf{M}_k = 0$ zu ergänzen, um im Ansatz über die für die Ableitung der Funktion notwendige Veränderliche $P_k$, $\mathsf{M}_k$ zu verfügen.

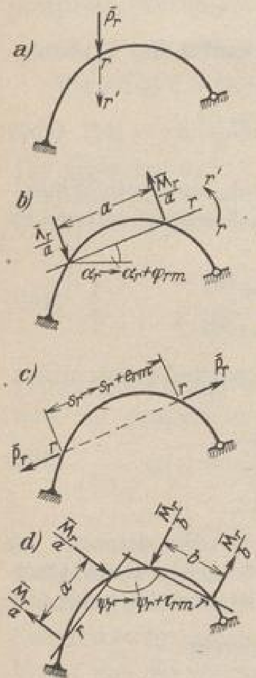

Abb. 96.

**Das Prinzip der Wechselwirkung für den Stabzug.** Das Prinzip der Wechselwirkung von E. Betti ist für die virtuelle Arbeit zweier Kräftegruppen an einem elastischen Körper bewiesen worden. Es bedarf nach (156) für den Stabzug keiner besonderen Begründung, wenn die Anteile $(M\,ds/EJ)$, $(\overline{M}\,ds/EJ)$ des Integranden als die Verzerrungskomponenten aus zwei Kräftegruppen $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ und $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$ angesehen werden. Die rechte Seite des Ansatzes (156) bedeutet dann entweder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$ während der Formänderung $(\delta, \varphi)$ aus $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ oder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe $(\mathfrak{P}, \mathsf{M})$ während der Formänderung $(\overline{\delta}, \overline{\varphi})$ aus $(\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathsf{M}})$

$$\sum \overline{P}_m \delta_m + \sum \overline{\mathsf{M}}_m \varphi_m = \sum P_m \overline{\delta}_m + \sum \mathsf{M}_m \overline{\varphi}_m. \tag{166}$$

Ist nur die Kraft $\overline{P}_r$ oder das Kräftepaar $\overline{\mathsf{M}}_r$ vorhanden und daher

$$\overline{P}_r \delta_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \qquad \overline{\mathsf{M}}_r \varphi_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \tag{167}$$

so wird der Ansatz in der Regel nach J. Cl. Maxwell benannt. Die virtuelle Arbeit der im Punkte $r$ in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ wirkenden Kraft $\overline{P}_r$ während der Verschiebung $\delta_{rm}$ des Punktes $r$ in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ durch $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ ist gleich der virtuellen Arbeit, welche die Kräfte $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ während der Verschiebungen $\delta_{mr}$ der Punkte $m$ infolge $\overline{P}_r$ leisten. Der zweite Ansatz kann ähnlich ausgesprochen werden. Die Beziehung gilt auch für die virtuelle Arbeit $\overline{P}_r \cdot e_{rm}$ zweier gleichgroßer, entgegengesetzt gerichteter, an den beiden Punkten $r$ wirkenden Kräfte $\overline{P}_r$ und für die virtuelle Arbeit $\overline{\mathsf{M}}_r \cdot \tau_{rm}$ zweier an den beiden Geraden $r$ des Stabwerks angreifenden, im Gleichgewicht stehenden Kräftepaare $\overline{\mathsf{M}}_r$. Dabei ist $e_{rm}$ die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares $r$ und $\tau_{rm}$ die gegenseitige Verdrehung der beiden ausgezeichneten Geraden $r$ infolge von $(P_1 \ldots P_m \ldots)$. Dagegen sind $\delta_{mr}$ je nach dem Ansatz die Verschiebungen der Punkte $m$ des Stabzugs in Richtung von $P_m$, welche entweder von der Belastung $\overline{P}_r$ des Punktes $r$, der Belastung $\overline{\mathsf{M}}_r$ der Geraden $r$, der Be-