Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Das Prinzip der Wechselwirkung für den Stabzug

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Jede Stütz- oder Schnittkraft kann nach dem Superpositionsgesetz als lineare Funktion der Belastung angeschrieben werden.

$$N = \sum_1^n N_m P_m, \qquad M = \sum_1^n M_m P_m, \qquad Q = \sum_1^n Q_m P_m, \qquad C = \sum_1^n C_m P_m.$$

Daher ist

$$\frac{\partial N}{\partial P_k} = N_k, \qquad \frac{\partial M}{\partial P_k} = M_k, \qquad \frac{\partial Q}{\partial P_k} = Q_k, \qquad \frac{\partial C}{\partial P_k} = C_k. \tag{165}$$

Die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach P_k führt also zu dem bereits bekannten Ergebnis (156) mit der virtuellen Belastung $\overline{P}_k = 1$.

Um die Verschiebung $\overrightarrow{kk'}$ als partielle Ableitung einer der Funktionen A_i zu berechnen, ist unter Umständen die vorgeschriebene Belastung $\mathfrak{P}$ durch eine in Richtung $\overrightarrow{kk'}$ wirkende Kraft $P_k = 0$ oder ein im Drehsinn $\overrightarrow{kk'}$ wirkendes Kräftepaar $\mathsf{M}_k = 0$ zu ergänzen, um im Ansatz über die für die Ableitung der Funktion notwendige Veränderliche P_k, M_k zu verfügen.

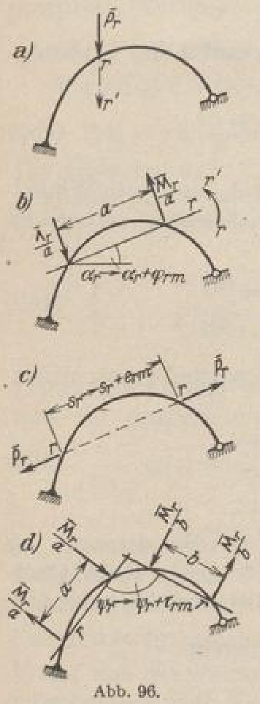
Abb. 96.

Das Prinzip der Wechselwirkung für den Stabzug. Das Prinzip der Wechselwirkung von E. Betti ist für die virtuelle Arbeit zweier Kräftegruppen an einem elastischen Körper bewiesen worden. Es bedarf nach (156) für den Stabzug keiner besonderen Begründung, wenn die Anteile $(M\,ds/EJ)$, $(\overline{M}\,ds/EJ)$ des Integranden als die Verzerrungskomponenten aus zwei Kräftegruppen ($\mathfrak{P}$, M) und ($\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathsf{M}}$) angesehen werden. Die rechte Seite des Ansatzes (156) bedeutet dann entweder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe ($\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathsf{M}}$) während der Formänderung (δ, φ) aus ($\mathfrak{P}$, M) oder die virtuelle Arbeit der Kräftegruppe ($\mathfrak{P}$, M) während der Formänderung $(\overline{\delta}, \overline{\varphi})$ aus ($\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathsf{M}}$)

$$\sum \overline{P}_m \delta_m + \sum \overline{\mathsf{M}}_m \varphi_m = \sum P_m \overline{\delta}_m + \sum \mathsf{M}_m \overline{\varphi}_m. \tag{166}$$

Ist nur die Kraft $\overline{P}_r$ oder das Kräftepaar $\overline{\mathsf{M}}_r$ vorhanden und daher

$$\overline{P}_r \delta_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \qquad \overline{\mathsf{M}}_r \varphi_{rm} = \sum P_m \overline{\delta}_{mr}, \tag{167}$$

so wird der Ansatz in der Regel nach J. Cl. Maxwell benannt. Die virtuelle Arbeit der im Punkte r in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ wirkenden Kraft $\overline{P}_r$ während der Verschiebung δ_{rm} des Punktes r in Richtung $\overrightarrow{rr'}$ durch $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ ist gleich der virtuellen Arbeit, welche die Kräfte $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ während der Verschiebungen $\overline{\delta}_{mr}$ der Punkte m infolge $\overline{P}_r$ leisten. Der zweite Ansatz kann ähnlich ausgesprochen werden. Die Beziehung gilt auch für die virtuelle Arbeit $\overline{P}_r \cdot e_{rm}$ zweier gleichgroßer, entgegengesetzt gerichteter, an den beiden Punkten r wirkenden Kräfte $\overline{P}_r$ und für die virtuelle Arbeit $\overline{\mathsf{M}}_r \cdot \tau_{rm}$ zweier an den beiden Geraden r des Stabwerks angreifenden, im Gleichgewicht stehenden Kräftepaare $\overline{\mathsf{M}}_r$. Dabei ist e_{rm} die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares r und τ_{rm} die gegenseitige Verdrehung der beiden ausgezeichneten Geraden r infolge von $(P_1 \ldots P_m \ldots)$. Dagegen sind $\overline{\delta}_{mr}$ je nach dem Ansatz die Verschiebungen der Punkte m des Stabzugs in Richtung von P_m, welche entweder von der Belastung $\overline{P}_r$ des Punktes r, der Belastung $\overline{\mathsf{M}}_r$ der Geraden r, der Belastung $\overline{P}_r$ des Punktepaares r oder der Belastung $\overline{\mathsf{M}}_r$ des Geradenpaares r erzeugt werden (Abb. 96).

Einflußlinie der Verschiebung und Winkeländerung. Wird $\overline{P}_r = 1$ t und $\overline{\mathsf{M}}_r = 1$ mt gewählt und die beliebige Kräftegruppe $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ durch eine wandernde, d. h. an einem beliebigen Punkt m des Lastgurtes angreifende Kraft $P_m = 1$ t ersetzt, so bedeuten $\delta_{rm}, \varphi_{rm}, e_{rm}, \tau_{rm}$ die Ordinaten der Einflußlinien dieser Komponenten des Verschiebungszustandes. Sie werden aus (167) nach dem folgenden Ansatz berechnet:

$$\overline{1}_r \delta_{rm} = 1_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \varphi_{rm} = 1_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r e_{rm} = 1_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \tau_{rm} = 1_m \bar{\delta}_{mr}. \qquad (168)$$

Jedes Produkt ist eine virtuelle Arbeit mit der Dimension mt. Die Drehwinkel φ_{rm}, τ_{rm} sind dimensionslos, die Einheit hat also je nach dem Ansatz die Dimension der Kraft oder des Kräftepaares.

Die Einflußgrößen $\delta_{rm}, e_{rm}, \varphi_{rm}, \tau_{rm}$ werden daher als Projektionen der wirklichen Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes auf die Richtung der wandernden Einzellast P_m bestimmt. Sie sind damit Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes, welche je nach der Art der Einflußlinie für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punkte r oder für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punktepaare r, für die Belastungseinheit $\overline{\mathsf{M}}_r = 1$ an der Geraden r oder für die Belastungseinheit $\overline{\mathsf{M}}_r = 1$ am Geradenpaar r nach einer durch die wandernde Last bestimmten Richtung aufgezeichnet wird. Die Einflußlinien der Formänderungen werden daher nach den Abschnitten 20 und 21 über Biegelinien entwickelt.

18. Die Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes.

Die Form eines Stabzugs ändert sich durch Belastung, Temperaturwechsel und Stützenbewegung. Der Vorgang kann durch die Messung der Verschiebung ausgezeichneter Punkte oder durch die Messung der Verdrehung einzelner Stäbe und Querschnitte beobachtet werden. Der Vergleich mit den durch Rechnung gewonnenen Ergebnissen ermöglicht die Nachprüfung der Annahmen der Theorie oder ein Urteil über die Zuverlässigkeit des Spannungsnachweises. Die gerechneten Verschiebungen können außerdem zur Abschätzung der Steifigkeit der Konstruktion und deren niedrigster Eigenschwingungszahl oder zur Untersuchung von statisch unbestimmten Tragwerken verwendet werden.

Aus diesem Grunde wird die senkrechte oder waagerechte Verschiebung einzelner Punkte, also der Stabmitten, Gelenke und Rahmenecken bestimmt. Ebenso kann die Verdrehung von Stäben und Stabknoten, die gegenseitige Verschiebung von Punktepaaren oder die gegenseitige Verdrehung von Stäben und Gelenkteilen berechnet werden. Die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks werden in jedem Fall als bekannt vorausgesetzt.

Ansatz der Rechnung. Die Aufgabe wird durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen gelöst (156). Die virtuelle Belastung $\overline{P}, \overline{\mathsf{M}}$ ist frei wählbar und kann daher auch so festgesetzt werden, daß die gesuchte Verschiebung δ_k eines Punktes k nach einer ausgezeichneten Richtung $\overrightarrow{kk'}$ unmittelbar durch den Ausdruck der Arbeit der virtuellen eingeprägten Kräfte $\overline{1}_k \cdot \delta_k$ angegeben wird. Die virtuelle Belastung ist damit als einzelne Kraft $\overline{P}_k = 1$ t im Punkte k mit der Richtung $\overrightarrow{kk'}$ definiert. Dasselbe gilt bei der Berechnung der Verdrehung φ_k eines Querschnitts oder einer ausgezeichneten Geraden k des Stabzugs. Die virtuelle