



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

18. Die Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

lastung  $\bar{P}_r$  des Punktepaars  $r$  oder der Belastung  $\bar{M}_r$  des Geradenpaars  $r$  erzeugt werden (Abb. 96).

**Einflußlinie der Verschiebung und Winkeländerung.** Wird  $\bar{P}_r = 1 \text{ t}$  und  $\bar{M}_r = 1 \text{ mt}$  gewählt und die beliebige Kräftegruppe  $(P_1 \dots P_m \dots)$  durch eine wandernde, d. h. an einem beliebigen Punkt  $m$  des Lastgurtes angreifende Kraft  $P_m = 1 \text{ t}$  ersetzt, so bedeuten  $\delta_{rm}, \varphi_{rm}, e_{rm}, \tau_{rm}$  die Ordinaten der Einflußlinien dieser Komponenten des Verschiebungszustandes. Sie werden aus (167) nach dem folgenden Ansatz berechnet:

$$\bar{I}_r \delta_{rm} = I_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \bar{I}_r \varphi_{rm} = I_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \bar{I}_r e_{rm} = I_m \bar{\delta}_{mr}; \quad \bar{I}_r \tau_{rm} = I_m \bar{\delta}_{mr}. \quad (168)$$

Jedes Produkt ist eine virtuelle Arbeit mit der Dimension mt. Die Drehwinkel  $\varphi_{rm}, \tau_{rm}$  sind dimensionslos, die Einheit hat also je nach dem Ansatz die Dimension der Kraft oder des Kräftepaars.

Die Einflußgrößen  $\delta_{rm}, e_{rm}, \varphi_{rm}, \tau_{rm}$  werden daher als Projektionen der wirklichen Verschiebungen der Punkte  $m$  des Lastgurtes auf die Richtung der wandernden Einzellast  $P_m$  bestimmt. Sie sind damit Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes, welche je nach der Art der Einflußlinie für die Belastungseinheit  $\bar{P}_r = 1$  am Punkte  $r$  oder für die Belastungseinheit  $\bar{P}_r = 1$  am Punktepaare  $r$ , für die Belastungseinheit  $\bar{M}_r = 1$  an der Geraden  $r$  oder für die Belastungseinheit  $\bar{M}_r = 1$  am Geradenpaar  $r$  nach einer durch die wandernde Last bestimmten Richtung aufgezeichnet wird. Die Einflußlinien der Formänderungen werden daher nach den Abschnitten 20 und 21 über Biegelinien entwickelt.

## 18. Die Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes.

Die Form eines Stabzugs ändert sich durch Belastung, Temperaturwechsel und Stützenbewegung. Der Vorgang kann durch die Messung der Verschiebung ausgezeichneter Punkte oder durch die Messung der Verdrehung einzelner Stäbe und Querschnitte beobachtet werden. Der Vergleich mit den durch Rechnung gewonnenen Ergebnissen ermöglicht die Nachprüfung der Annahmen der Theorie oder ein Urteil über die Zuverlässigkeit des Spannungsnachweises. Die gerechneten Verschiebungen können außerdem zur Abschätzung der Steifigkeit der Konstruktion und deren niedrigster Eigenschwingungszahl oder zur Untersuchung von statisch unbestimmten Tragwerken verwendet werden.

Aus diesem Grunde wird die senkrechte oder waagerechte Verschiebung einzelner Punkte, also der Stabmitten, Gelenke und Rahmenecken bestimmt. Ebenso kann die Verdrehung von Stäben und Stabknoten, die gegenseitige Verschiebung von Punktepaaren oder die gegenseitige Verdrehung von Stäben und Gelenkteilen berechnet werden. Die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks werden in jedem Fall als bekannt vorausgesetzt.

**Ansatz der Rechnung.** Die Aufgabe wird durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen gelöst (156). Die virtuelle Belastung  $\bar{P}, \bar{M}$  ist frei wählbar und kann daher auch so festgesetzt werden, daß die gesuchte Verschiebung  $\delta_k$  eines Punktes  $k$  nach einer ausgezeichneten Richtung  $\vec{k k'}$  unmittelbar durch den Ausdruck der Arbeit der virtuellen eingepprägten Kräfte  $\bar{I}_k \cdot \delta_k$  angegeben wird. Die virtuelle Belastung ist damit als einzelne Kraft  $\bar{P}_k = 1 \text{ t}$  im Punkte  $k$  mit der Richtung  $\vec{k k'}$  definiert. Dasselbe gilt bei der Berechnung der Verdrehung  $\varphi_k$  eines Querschnitts oder einer ausgezeichneten Geraden  $k$  des Stabzugs. Die virtuelle



Arbeit  $\Sigma \bar{M}_k \varphi_k$  wird in diesem Falle mit einem einzelnen Kräftepaar  $\bar{M}_k = \bar{I}_k$  gebildet, das an  $k$  in dem für  $\varphi_k$  positiv angenommenen Drehsinn  $\vec{k}k'$  wirkt. Mit der virtuellen Arbeit  $\bar{I}_k \cdot \varphi_k$  ist die gesuchte Verdrehung unmittelbar bestimmt. Für die Berechnung der gegenseitigen Verschiebung zweier Punkte wird die virtuelle Belastungseinheit des Punktepaars, für die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden die virtuelle Belastungseinheit des Geradenpaares verwendet.

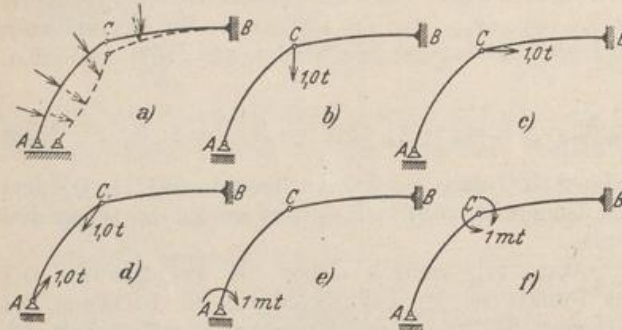


Abb. 97. Analytische Ermittlung der Verschiebungen und Verdrehungen ausgezeichneter Punkte und Querschnitte.

a) Stütz- und Schnittkräfte der gegebenen Belastung  $\Sigma P$  sind  $C, N, M, Q$ . Die folgenden Abbildungen stellen die virtuelle Belastung zur Berechnung der ausgezeichneten Formänderung dar.

b) Vertikale Verschiebung des Gelenkpunktes C. c) Horizontale Verschiebung des Gelenkpunktes C. d) Gegenseitige Verschiebung der Punkte A und C. e) Verdrehung des Stützenquerschnittes A. f) Gegenseitige Verdrehung der dem Scheitelgelenk benachbarten Querschnitte.

Die Formänderungen  $\delta_k, \varphi_k$  werden im folgenden stets unter der Voraussetzung angegeben, daß die Verzerung des Stabteils  $ds$  durch die Komponenten  $\epsilon_0, d\psi_y, \gamma_{xz,0}$  und damit nach (154) durch die Stütz- und Schnittkräfte  $C, N, M, Q$  beschrieben werden kann, die mit der gegebenen Belastung im Gleichgewicht sind. Die Ebene der äußeren Kräfte

fällt in diesem Falle mit der Symmetrieebene des Stabwerks zusammen. Der virtuellen Belastung  $\bar{I}_k$  sind Stützkräfte  $\bar{C}_k$  und Schnittkräfte  $\bar{N}_k, \bar{M}_k, \bar{Q}_k$  zugeordnet. Beide Gruppen von Stütz- und Schnittkräften sind unabhängig voneinander und werden je nach der Struktur des Systems statisch bestimmt oder unbestimmt berechnet. Jede Komponente des Verschiebungszustandes kann daher folgendermaßen angegeben werden:

$$\bar{I}_k \delta_k = \int \frac{\bar{N}_k N}{EF} ds + \int \frac{\bar{M}_k M}{EJ} ds + \int \frac{\bar{Q}_k Q}{GF} ds + \int \bar{N}_k \alpha_t t ds + \int \bar{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \Sigma \bar{C}_{ek} \Delta_e. \quad (169)$$

Der Ansatz gilt grundsätzlich für alle Stabwerke. Er wird hier zunächst auf statisch bestimmte Systeme beschränkt, um bei statisch unbestimmten Aufgaben die Ergebnisse des Abschnitts 24 zu verwenden. Die Erweiterung des Ansatzes bei schiefer Biegung oder schiefer Biegung mit Verdrillung des Stabteils  $ds$  geschieht in Anlehnung an die Angaben (49). In zahlreichen Fällen wird der  $EJ_e$ -fache Betrag der Verschiebungen berechnet. Das Vergleichsträgheitsmoment  $J_e$  wird dabei so gewählt, daß die Funktion  $J_e/J$  oder  $J_e/J \cos \alpha$  in möglichst großen Integrationsabschnitten „1“ ist. Im übrigen empfiehlt sich für  $J_e$  entweder das kleinste oder das größte Trägheitsmoment des ganzen Integrationsbereiches.  $F_e$  ist ein Vergleichsquerschnitt.

$$\begin{aligned} \bar{I}_k (EJ_e \delta_k) &= \frac{J_e}{F_e} \int \bar{N}_k N \frac{F_e}{F} ds + \int \bar{M}_k M \frac{J_e}{J} ds + \frac{J_e E}{F_e G} \int \bar{Q}_k Q \frac{F_e}{F} ds \\ &+ EJ_e \left[ \int \bar{N}_k \alpha_t t ds + \int \bar{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \right] - EJ_e \Sigma \bar{C}_{ek} \Delta_e. \end{aligned} \quad (170)$$

Die Anteile der Verschiebung aus Belastung, Temperaturänderung und bekannten oder geschätzten Stützenverschiebungen  $\Delta_e$  sind unabhängig voneinander. Der Belastungsanteil der Verschiebung  $\delta_k$  besteht aus drei Summanden, die sich in ihrer Größe wesentlich voneinander unterscheiden. Der Anteil aus den Querkraften ist stets sehr klein und besitzt nur in Ausnahmefällen Bedeutung. Auch der von den



Längskräften herrührende Anteil darf für biegungssteife Bauteile meist vereinfacht oder vernachlässigt werden. Man verwendet daher für  $N$  und  $N_k$  oft die den einzelnen Abschnitten des Stabwerks zugeordneten Mittelwerte. Dagegen sind die Längenänderungen in Zug- oder Druckstäben, also die Anteile mit den Längskräften  $S, \bar{S}_k$  wesentlich.

In vielen Fällen ist die Formänderung eines biegungssteifen Tragwerks aus einer Belastung  $\mathfrak{P}$  bereits durch die Biegemomente mit genügender Genauigkeit bestimmt, so daß je nach dem Stabnetz und dessen Unterteilung

$$\delta_k = \int \frac{\bar{M}_k M}{EJ} ds; \quad EJ_c \delta_k = \sum \int \frac{J_c}{J_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J} ds = \sum \int \frac{J_c}{J_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J \cos \alpha} dx. \quad (171)$$

Enthält das Stabwerk auch unbelastete, gelenkig angeschlossene Stäbe mit den Längskräften  $S, \bar{S}_k$ , so ist

$$EJ_c \delta_k = \sum \int \frac{J_c}{J_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \sum \bar{S}_k S \frac{F_c}{F} s. \quad (172)$$

Die Ansätze (171) oder (172) dienen auch zur punktweisen Bestimmung der Einflußlinien der Verschiebungen  $\delta_{km}$ . In diesem Fall sind  $N, M, S$  die Schnittkräfte des Stabwerks aus der Belastung mit  $P_m = 1$  t in einem beliebigen Punkte  $m$  des Lastgurtes.

Die Angaben für die Verschiebung  $\delta_{kt}$  infolge Temperaturänderung stützen sich auf die Annahme eines linear veränderlichen Temperaturgefälles  $\Delta t$  und beruhen meist nur auf groben Schätzungen des Temperaturunterschiedes  $\pm t$ . Daher genügen in der Regel auch die Mittelwerte von  $\bar{N}_k$  und  $(\alpha_t \Delta t) : (h \cos \alpha)$  eines größeren Integrationsabschnittes.

$$\delta_{kt} = \int \bar{N}_k \alpha_t t ds + \int \bar{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \approx \sum \bar{N}_k \alpha_t t s + \sum \frac{\alpha_t \Delta t}{h \cos \alpha} \int \bar{M}_k dx. \quad (173)$$

Die Verschiebung aus gemessenen oder geschätzten Stützenverschiebungen  $\Delta_e$  allein ist

$$\delta_{ks} = - \sum \bar{C}_{ek} \Delta_e. \quad (174)$$

**Der Integrand.** Der Integrationsbereich erstreckt sich über alle Teile des Stabwerks, deren Spannungen und Dehnungen nach dem Geradliniengesetz angegeben werden können. In den Brechpunkten des Stabzuges und in den Rahmenecken sind diese Annahmen ungültig. Die Steifigkeit ist hier größer. Dasselbe gilt für die Knotenpunkte des Stabwerks, insbesondere bei Verbindung von Stützen mit hohen Trägern. Der Begriff des Querschnitts verliert hier seine Bedeutung. Trotzdem wird, abgesehen von einzelnen Ausnahmen, über die theoretische Stablänge integriert, um einfache und kurze Ansätze zu erhalten, die dem Wesen der Untersuchung entsprechen und die Erscheinung mit genügender Genauigkeit beschreiben.

| Baustoff                                  | Elastizitätsmodul<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|---|---|
| Beton (nach amtl. Bestimmungen) . . . . . | 210 000                                 |
| Beton erdfeucht 1 : 2 ½ : 5 . . . . .     | 446 000                                 |
| Beton plastisch 1 : 2 : 3 . . . . .       | 256 000                                 |
| Granit . . . . .                          | 195 000                                 |
| Buntsandstein . . . . .                   | 75 000                                  |
| Keupersandstein . . . . .                 | 36 000                                  |

Die Formänderungen von Bauteilen aus Eisenbeton werden für den Spannungszustand vor Eintritt von Zugrissen angegeben. Der Elastizitätsmodul des Betons beträgt dann im Mittel  $E_b = 210000$  kg/cm<sup>2</sup>, so daß das Verhältnis  $E_e : E_b = n = 10$  ist. Die Rundeisenbewehrung ist daher für das Trägheitsmoment des Querschnitts ohne große Bedeutung und kann meist vernachlässigt werden.



Die Rechenvorschrift (171) gilt nach der Ableitung für einzelne Stäbe und Träger, die nach den Angaben auf S. 27 belastet sind. Sie wird jedoch auch auf zusammenhängende elastische Gebilde mit parallel laufenden Trägern ausgedehnt, die durch Platten steif verbunden sind. Um deren Formänderung quer zur Stabrichtung zu berücksichtigen, wird bei der Rechnung nach der elementaren Theorie nur ein beschränkter Abschnitt der Platte als mittragend angesehen. Er kann aus einem Vergleiche der Ergebnisse mit dem Spannungs- und Verzerrungszustand der zweidimensionalen Konstruktion oder aus beobachteten Formänderungen gefunden werden. Die mittragende Plattenbreite ist nach den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses vom Jahre 1932, § A 25, 3b

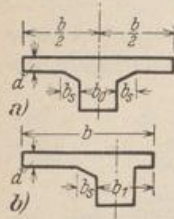


Abb. 98.

a) beim beiderseitigen Plattenbalken nach Abb. 98a:

$$b = 6d + 2b_s + b_0, \tag{175}$$

aber nicht größer als der Abstand der Feldmitten,

b) beim einseitigen Plattenbalken nach Abb. 98b:

$$b = 2,25d + b_s + b_1, \tag{176}$$

aber nicht größer als die halbe lichte Rippenentfernung, vermehrt um  $b_1$ .

Auf diese Weise entstehen die im Eisenbetonbau gebräuchlichen Querschnitte (Abb. 99). Das Trägheitsmoment  $J_y$  wird am besten nach einer Unterteilung in einzelne Rechtecke angegeben.

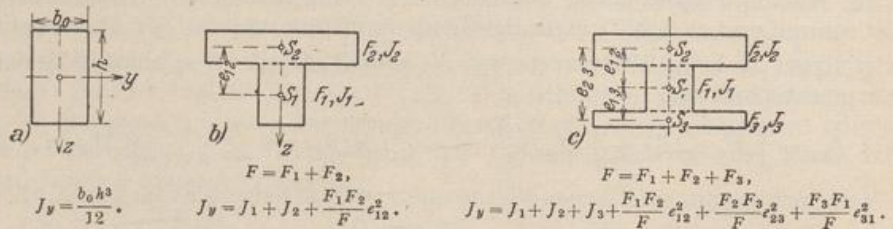


Abb. 99.

Das Trägheitsmoment  $J_y$  eines Stabes ist zwischen je zwei Knotenpunkten, also im Bereich eines Stabes  $l_h$ , stetig oder unstetig veränderlich, in vielen Fällen auch konstant. Die Änderung wird meist auf ein Vergleichsträgheitsmoment  $J_h$  in Stabmitte bezogen und durch den Quotienten  $J_h/J = \zeta_h$  beschrieben. Die Veränderlichkeit des Querschnitts hängt oft von konstruktiven oder ästhetischen Gesichtspunkten ab, so daß die Funktion  $\zeta_h$  punktweise bestimmt ist.

Die Stütz- und Schnittkräfte  $C, N, M, Q$  aus der gegebenen Belastung und  $\bar{C}_k, \bar{N}_k, \bar{M}_k, \bar{Q}_k$  aus der virtuellen Belastung  $\bar{I}_k$  werden nach Abschnitt 13 zeichnerisch oder rechnerisch angegeben. Bei statisch unbestimmten Tragwerken treten hierzu die Angaben der Abschnitte 24 ff. Die Biegemomente  $M$  und  $\bar{M}_k$  werden als Schaulinien einzeln in Stabnetze derart eingetragen, daß sie nur an der gezogenen ( $i$ ) oder an der gedrückten ( $a$ ) Stabseite erscheinen, um bei der Bildung des Integranden  $\bar{M}_k \cdot M$  Vorzeichenfehler zu vermeiden. Längs- und Querkkräfte werden ebenso wie die Stützkräfte neben den Stababschnitten als Zahlenwerte eingetragen. Das Vorzeichen der Produkte  $\bar{N}_k \alpha_i t$  und  $\bar{C}_{ek} \Delta_e$  ist durch ihre Bedeutung als virtuelle Arbeit bestimmt.

**Mechanische Auslegung des Ansatzes.** Die Berechnung einer Verschiebung oder Verdrehung ist nach diesen Bemerkungen über den Integranden im wesentlichen eine mathematische Aufgabe. Sie erhält jedoch auch mechanischen Inhalt, wenn die



Funktion  $M$  oder  $\bar{M}_k$  im Integrationsbereich  $l_h$  linear ist. Mit  $\xi = \frac{x}{l_h}$ ,  $\xi' = \frac{x'}{l_h}$  und

$$\bar{M}_k = \bar{M}_a \xi' + \bar{M}_b \xi \text{ ist } \int_0^{l_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J} dx = \bar{M}_a \int_0^{l_h} \xi' \left( M \frac{J_h}{J} \right) dx + \bar{M}_b \int_0^{l_h} \xi \left( M \frac{J_h}{J} \right) dx. \quad (177)$$

Die Integrale sind die analytischen Ausdrücke für die Stützkräfte  $A_w, B_w$  eines einfachen Balkenträgers mit der Stützweite  $l_h$  und einer ideellen Belastung im Betrage von  $w = M J_h / J$ . Hieraus entsteht die folgende Rechenvorschrift:

$$\int_0^{l_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J} dx = \bar{M}_a A_w + \bar{M}_b B_w. \quad (178)$$

Die Verschiebung  $\delta_k$  und die Verdrehung  $\varphi_k$  des Querschnitts  $k$  eines geraden Balkenträgers  $l_h$  mit freidrehbaren Enden werden nach (171) mit

$$\bar{1}_k (E J_h \delta_k) = \int_0^{l_h} \bar{M}_k M \frac{J_h}{J} dx, \quad \bar{1}'_k (E J_h \varphi_k) = \int_0^{l_h} \bar{M}'_k M \frac{J_h}{J} dx \quad (179)$$

bestimmt. Die Zustandslinien  $\bar{M}_k$  und  $\bar{M}'_k$  für  $\bar{1}_k$  und  $\bar{1}'_k$  (Abb. 100) können mit den Einflußlinien für das Moment  $M_k$  und die Querkraft  $Q_k$  des Trägers  $l_h$  im Querschnitt  $k$  verglichen werden. Daher wird die Durchbiegung  $E J_h \delta_k$  als Moment  $M_{kw}$ , die Verdrehung  $E J_h \varphi_k$  als Querkraft  $Q_{kw}$  im Querschnitt  $k$  des Balkenträgers  $l_h$  für die ideelle Belastung  $w = M J_h / J$  gefunden. Aus den Auflagerkräften  $A_w$  und  $B_w$  wird die Verdrehung der Endquerschnitte abgeleitet. Unter Umständen kann diese Berechnung nach S. 125 auch auf Stabzüge mit angenommenen Randbedingungen angewendet werden.

**Numerische Integration.** Der mathematische Teil jeder Formänderungsberechnung besteht bei genauer Beachtung der Veränderlichkeit des Querschnitts in einer numerischen Integration. Hierbei werden diejenigen Methoden gewählt, die das Integral als Mittelwert von Funktionswerten des Intervalls bilden. Von diesen ist die Simpsonsche Regel am meisten gebräuchlich. Sie liefert den Mittelwert des bestimmten Integrals durch Unterteilung des Bereichs in  $2n$  oder  $3n$  Abschnitte von der konstanten Breite  $\Delta x$ . Die den Intervallgrenzen  $m$  zugeordneten Funktionswerte sind

$$\eta_m = \bar{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \bar{M}_{mk} M_m \zeta_m \text{ oder } \eta_m = \bar{N}_{mk} N_m \frac{F_h}{F_m}. \quad (180)$$

In der Regel genügt zu einem genauen Ergebnis die Unterteilung  $l_h = 2n \cdot \Delta x$  und damit der Ansatz:

$$\int_a^b \eta dx = \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + \dots + 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}). \quad (181)$$

Die Genauigkeit ist bei Unterteilung von  $l_h$  in  $3n \cdot \Delta x$  etwas größer. Sie führt zu der folgenden Reihe:

$$\int_a^b \eta dx = \frac{\Delta x}{8} (\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 3\eta_5 + 2\eta_6 + \dots + 2\eta_{3n-3} + 3\eta_{3n-2} + 3\eta_{3n-1} + \eta_{3n}). \quad (182)$$

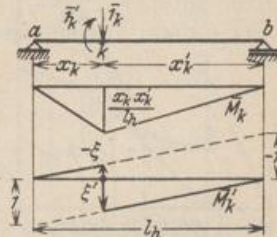


Abb. 100.



Beide Ansätze sind auf S. 176 angewendet und in ihren Ergebnissen verglichen worden.

Um die mit der Reihenentwicklung nach Simpson verbundene Zahlenrechnung zu umgehen, kann das Integral auch durch Zerlegung des Integrationsbereichs in  $n$  Stufen  $e_m$  mit geometrisch veränderlicher, jedoch elastisch konstanter Breite  $c = e_m \zeta_m$  angeschrieben werden (Abb. 101). Mit

$$\bar{M}_{mk} M_m = \lambda_m, \quad \frac{J_h}{J_m} = \zeta_m \quad \text{und} \quad \bar{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \lambda_m \zeta_m = \eta_m \quad \text{ist}$$

$$\int_a^b \eta dx = \sum_a^b \eta \Delta x = \sum_1^n \eta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m \zeta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m c = c \sum_1^n \lambda_m. \quad (183)$$

Der Betrag  $c = e_m \zeta_m$  entsteht aus einer beliebigen Unterteilung  $\Delta x$  des Integrationsbereiches:

$$c = \frac{1}{n} \sum_a^b \zeta \Delta x = \frac{1}{n} \sum_a^b \frac{J_h}{J} \Delta x.$$

Das Integral  $\int_a^b \eta dx$  wird danach als Summe über die mittleren Ordinaten  $\lambda_m$  der Intervalle  $e_m$  erhalten (Rechenvorschrift Abschn. 56). Die Stufenbreite  $c$  ändert sich mit der Art des Integranden. Man unterscheidet

$$\left. \begin{aligned} c &= e_m \frac{J_h}{J_m}, & c &= e_m \frac{J_h}{J_m \cos \alpha_m}, \\ c &= e_m \frac{F_h}{F_m}, & c &= e_m \frac{F_h}{F_m \cos \alpha_m}. \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Hierzu treten die Funktionswerte  $\lambda_m$ .

$$\lambda_m = \bar{M}_{mk} M_m \quad \text{oder} \quad \lambda_m = \bar{N}_{mk} N_m.$$

Die Glieder der Reihe (183) sind also im Vergleich zu (181) und (182) durch die besondere Art der Unterteilung einfacher geworden. Diese wird aus den Integralkurven zu den Funktionen  $J_h/J_m$ ,  $J_h/J_m \cos \alpha_m$  oder  $F_h/F_m$ ,  $F_h/F_m \cos \alpha_m$  abgeleitet (Abb. 101).

**Berechnung mit Annahmen über die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts. Verwendung von Integrationstabellen.** Um die numerische Integration zu umgehen, begnügt man sich oft mit einem angenäherten Ergebnis und beschreibt die vorhandene Querschnittsänderung durch eine aus wenigen Gliedern bestehende Reihe. Hierbei werden dann die einfachsten Ansätze gewählt, um die Integration für die Funktion  $\zeta_h = J_h/J$  abzukürzen. In zahlreichen Fällen ist das Trägheitsmoment  $J_h$  eines Stabes  $l_h$  konstant oder durch einen Mittelwert  $J_h$  genügend beschrieben. Der Integrand besteht dann nur aus zwei Faktoren. Mit  $x = \xi l_h$  und  $l'_h = l_h \frac{J_c}{J_h}$  ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\bar{M}_k M}{J} dx = \sum l_h \frac{J_c}{J_h} \int \bar{M}_k M d\xi = \sum l'_h \int \bar{M}_k M d\xi. \quad (185)$$

Bei gekrümmten Stäben mit  $\frac{J_h}{J \cos \alpha} = 1$  ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\bar{M}_k M}{J} ds = \sum \frac{J_c}{J_h} \int \bar{M}_k M \frac{J_h}{J \cos \alpha} dx = \sum l'_h \int \bar{M}_k M d\xi. \quad (186)$$

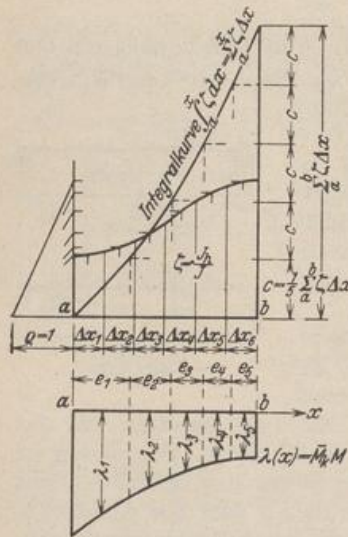


Abb. 101.  $\varrho$  Hilfswert für die graphische Integration.

$$\int_a^b \zeta dx = \varrho \int_a^b \frac{\zeta}{\varrho} dx.$$

Integration für die Funktion  $\zeta_h = J_h/J$  abzukürzen. In zahlreichen Fällen ist das Trägheitsmoment  $J_h$  eines Stabes  $l_h$  konstant oder durch einen Mittelwert  $J_h$  genügend beschrieben. Der Integrand besteht dann nur aus zwei Faktoren. Mit  $x = \xi l_h$  und

$$l'_h = l_h \frac{J_c}{J_h} \quad \text{ist}$$

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\bar{M}_k M}{J} dx = \sum l_h \frac{J_c}{J_h} \int \bar{M}_k M d\xi = \sum l'_h \int \bar{M}_k M d\xi. \quad (185)$$

Bei gekrümmten Stäben mit  $\frac{J_h}{J \cos \alpha} = 1$  ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\bar{M}_k M}{J} ds = \sum \frac{J_c}{J_h} \int \bar{M}_k M \frac{J_h}{J \cos \alpha} dx = \sum l'_h \int \bar{M}_k M d\xi. \quad (186)$$



Die Ergebnisse werden unter Umständen wesentlich genauer, wenn die Stabform im Ansatz mit zwei ausgezeichneten Querschnitten erscheint und  $\zeta_h$  angenähert durch eine quadratische Parabel angegeben wird. Als Freiwerte dienen bei symmetrischen Stäben die Trägheitsmomente in Stabmitte  $J_h$  und am Stabende  $J_{ha} = J_h/n_h$ , bei unsymmetrischen Stäben die Trägheitsmomente  $J_{hb} = J_h$ ,  $J_{ha} = J_h/n_h$  der Endquerschnitte (Abb. 102), so daß mit  $\xi = x/l_h$ :

a) bei symmetrischen Stäben

$$\zeta_h = 1 - (1 - n_h)(1 - 2\xi)^2,$$

b) bei unsymmetrischen Stäben

$$\zeta_h = 1 - (1 - n_h)(1 - \xi)^2.$$

(187)

Die Parabel höherer Ordnung enthält in dem willkürlich wählbaren Exponenten einen weiteren Freiwert, mit dem die Angleichung an einen gegebenen Funktionsverlauf noch mehr verbessert werden kann. Mit  $\xi'' = \xi - 0,5$  ist

a) bei symmetrischen Stäben:  $\zeta_h = 1 - (1 - n)(2\xi'')^{2r},$

b) bei unsymmetrischen Stäben:  $\zeta_h = 1 - (1 - n)(1 - \xi)^r.$

(188)

Die Funktionen  $\bar{M}_k$  und  $M$  sind meist linear, zweiten oder dritten Grades. Unstetige Funktionen werden in stetige Abschnitte geteilt oder durch Superposition der Biegemomente vereinfacht, indem deren Ordinaten geometrisch oder durch Überlagerung der Belastung zerlegt werden. In einzelnen Fällen wird die Rechnung auch durch Aufspaltung der beiden Funktionen in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil abgekürzt.

$$\int \bar{M}_k M \zeta d\xi = \int (\bar{M}_{k1} + \bar{M}_{k2} + \dots) (M_1 + M_2 + \dots) \zeta d\xi,$$

z. B.  $\bar{M}_k = \bar{M}_{k1} + \bar{M}_{k2}, \quad M = M_1 + M_2.$

$$\int_0^1 \bar{M}_k M \zeta d\xi = \int_0^1 \bar{M}_{k1} M_1 \zeta d\xi + \int_0^1 \bar{M}_{k1} M_2 \zeta d\xi + \int_0^1 \bar{M}_{k2} M_1 \zeta d\xi + \int_0^1 \bar{M}_{k2} M_2 \zeta d\xi. \quad (189)$$

Der Integrand ist in zahlreichen Aufgaben bei  $\zeta_h = 1$  eine algebraische Funktion zweiten bis fünften Grades, so daß der Ansatz nach (181) oder (182) mit zwei oder drei Intervallen die strenge Lösung des Integrals liefert. Die Ergebnisse sind in der Integrationstabelle 12 zusammengefaßt worden. Sie genügen bei gleichbleibendem Trägheitsmoment  $J_h$  des Stabes zur unmittelbaren Berechnung zahlreicher Verschiebungskomponenten. Die Integrale können auch noch bei einer quadratischen, symmetrischen oder unsymmetrischen Funktion  $\zeta_h$  leicht für zahlreiche Schaulinien  $\bar{M}_k$  und  $M$  angegeben werden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 13a, b enthalten.

Zur Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes eines Stabwerks werden daher zunächst die geometrischen Größen  $n_h$  und  $\zeta_h$  der Stäbe  $l_h$  festgestellt und die Schaulinien der Biegemomente  $M$ ,  $\bar{M}_k$  aus der vorgeschriebenen Belastung  $\mathfrak{B}$  und der virtuellen Belastung  $\bar{I}_k$  unter Beachtung der Vorzeichen aufgetragen. Darauf wird die Funktion  $(M\bar{M}_k\zeta_h)$  mit Hilfe der Tabellen integriert, falls nicht unter besonderen Umständen die numerische Integration notwendig ist. Ein positives Rechenresultat bedeutet die gleiche Richtung oder den gleichen Drehsinn wie für die angenommene virtuelle Belastung  $\bar{I}_k$ .

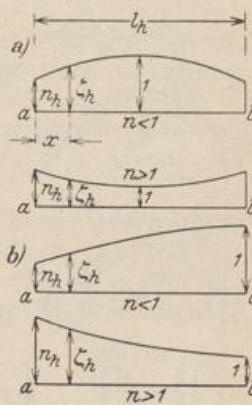


Abb. 102.



Bei Stäben mit gleichbleibender Krümmung ( $r = \text{const} \gg d$ ) werden die Schnittkräfte als Funktionen des Tangentenwinkels  $\alpha$  angegeben, so daß die Verschiebung bei konstantem Trägheitsmoment ( $J = \text{const}$ ) nach (170) folgendermaßen berechnet wird:

$$\bar{1}_k(EJ\delta_k) = r \frac{J}{F} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{N}_k N d\alpha + r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{M}_k M d\alpha. \quad (190)$$

Die Ergebnisse sind für die wichtigsten Ansätze des Integranden bestimmt und in Tabelle 16 angeschrieben worden.

Berechnung der gegenseitigen Verdrehung  $EJ_c\delta_g$  der Stabquerschnitte am Gelenk  $g$  eines Gerberträgers (Abb. 103).

Das Trägheitsmoment wird als konstant angenommen. Die Biegemomente  $M$  aus der vorgeschriebenen gleichförmigen Belastung  $p$  sind in sechs Teile zerlegt worden (Abb. 103b). Die Biegemomente aus der virtuellen Belastungseinheit des Geradenpaares in  $g$  sind in Abb. 103c wiedergegeben. Beide Schaulinien zeigen die Momente an der gezogenen Randfaser, so daß der Integrand  $M\bar{M}_g$  positiv ist, wenn beide Ordinaten an derselben Stabseite liegen.

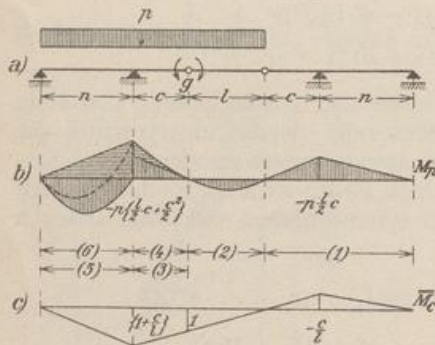


Abb. 103.

$$EJ_c\delta_g = \sum_1^6 \frac{J_c}{J} \int M \bar{M}_g dx,$$

1.  $+ \frac{1}{3} p \frac{l}{2} c \frac{c}{l} (n' + c')$ ,
2.  $+ \frac{1}{24} p l^2 l'$ ,
3.  $- \frac{1}{6} p \frac{lc}{2} \left\{ 2 \left( 1 + \frac{c}{l} \right) + 1 \right\} c'$ ,
4.  $- \frac{1}{12} p \frac{c^2}{2} \left\{ 3 \left( 1 + \frac{c}{l} \right) + 1 \right\} c'$ ,
5.  $+ \frac{1}{24} p n^2 \left( 1 + \frac{c}{l} \right) n'$ ,
6.  $- \frac{1}{3} p \frac{lc}{2} \left( 1 + \frac{c}{l} \right)^2 n'$ .

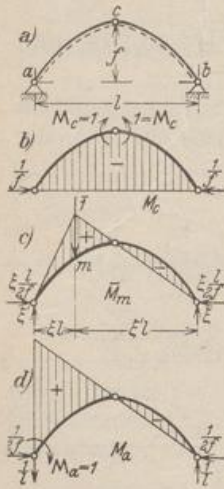


Abb. 104.

Mit  $\alpha = 1 + c/l$  ist

$$EJ_c\delta_g = \frac{p}{24} \{ l'^2 - c'c [2l(2\alpha+1) + 3c(\alpha-1)] + n' [4c^2 + \alpha n^2 - 4lc\alpha^2] \}.$$

$n = 15,0 \text{ m}, \quad c = 7,5 \text{ m}, \quad l = 15,0 \text{ m},$   
 $n' = 8,250 \text{ m}, \quad c' = 4,125 \text{ m}, \quad l' = 15,000 \text{ m}$

liefert

$$EJ_c\delta_g = \frac{p}{24} (3375 - 4060 - 3713) = -183 p.$$

Einflußlinien für die relative Verdrehung der Gelenkquerschnitte eines Bogentragers.

Die Mittellinie ist eine Parabel,  $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1$ .

a) Einflußlinie der Verdrehung des Scheitelgelenks  $c$  nach (168): Biegelinie infolge eines Momentenpaares  $M_c = 1$  in  $c$ . Rechnung nach (186) mit Abb. 104b.  $P = 1$  über dem linken Bogenschenkel,  $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ :

$$EJ_c \cdot \delta_{cm} = l \int_0^{\frac{1}{2}} M_c \bar{M}_m d\xi = \frac{l^2}{15} (4\xi - 5\omega'_p) = \frac{l^2}{6} k_1.$$

Die Einflußlinie Abb. 105a ist symmetrisch.

b) Einflußlinie der Verdrehung des Kämpfergelenks  $a$  nach (168): Biegelinie infolge  $M_a = 1$  in  $a$ . Rechnung nach (186) mit Abb. 104d.  $P = 1$  über dem linken Bogenschenkel,  $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ :

$$EJ_c \delta_{am}^{(1)} = l \int_0^{\frac{1}{2}} M_a \bar{M}_m d\xi = \frac{l^2}{30} [5(\omega'_D - \omega'_P) - \xi] = \frac{l^2}{30} \xi (5\xi^3 - 1) = \frac{l^2}{6} k_2^{(1)}.$$



$P = 1$  über dem rechten Bogenschenkel,  $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$ :

$$E J_c \delta_{am}^{(r)} = \frac{l^2}{30} [5(\omega'_D - \omega'_F) - \xi'] = \frac{l^2}{30} \xi' (5\omega'_t - 1) = \frac{l^2}{6} k_2^{(r)}$$

Die Funktionswerte  $k_1, k_2$  gelten für jeden Dreigelenkbogen mit einer Parabel als Mittel-  
linie und  $J_c/J \cos \alpha = 1$ .



Abb. 105 a u. b.

**Unstetiger Verlauf von  $\zeta$ .** Die Steifigkeit des Stabwerks wird oft durch die An-  
ordnung von Vouten und durch die biegungssteife Verbindung der Stützen mit hohen  
Trägern wesentlich verändert. Sie kann stets durch numerische Integration des Ansatzes  
verfolgt werden. Die Abb. 106 vergleicht derartige Anordnungen mit den zu-  
geordneten Funktionen  $\zeta$ . Man vereinfacht aber auch hier den Integranden, um für  
die wichtigsten Aufgaben geschlossene Lösungen zu erhalten und wählt  $\zeta_h$  im  
Bereiche der Voute linear (Kurve 2 in Abb. 106).

Die wichtigsten Ergebnisse sind in den Tabellen  
14 a, b eingetragen.

1. Linearer Verlauf der Trägerhöhe  $d_h$ ,

2. Verlauf der Trägerhöhe für  $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1-n)v$ ,

3. „ „ „ „  $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1-n)v^2$ ,

4. „ „ „ „  $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1-n)v^3$ .

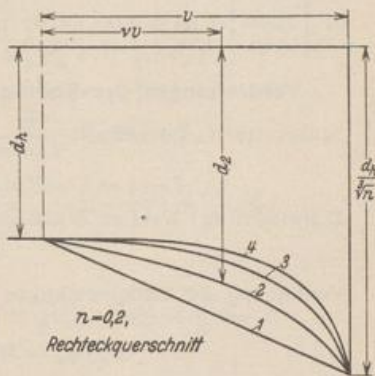


Abb. 106.

Beim Anschluß hoher Träger an die Stützen kann deren Trägheitsmoment im Bereiche des  
Knotens zur Abschätzung der Steifigkeitsverhältnis-  
unendlich groß, also  $\zeta_h = 0$  angenommen  
werden. Die Annahme ist in einzelnen Fällen auch bei Trägern brauchbar, die in  
breite Stützen eingebunden sind. Die Ansätze (171) sind daher auch mit diesen  
Funktionen  $\zeta$  für die wichtigsten Aufgaben ausgerechnet und in die Tabellen 15 a, b  
aufgenommen worden. Die Ergebnisse sind für die Untersuchung einzelner Klassen  
statisch unbestimmter Tragwerke von Bedeutung und daher noch in Abschn. 46  
erweitert worden.

**Endverdrehung eines Stabes mit linear veränderlichem Querschnitt**

(Abb. 107). Um bei Stützen mit linear veränderlichem Querschnitt ( $J = b d^3/12$ )  
den herauszugreifen, der bei Stützen mit konstantem Querschnitt ( $J_m = k J_a$ ) die  
gleiche Endverdrehung ergibt, läßt sich die Gl. (191) bilden und für die üblichen Ver-  
hältnisse  $n = J_a/J_b$  der Endquerschnitte einer recht-  
eckigen Stütze auswerten.

$$\frac{x}{l} = \xi, \quad \frac{J_a}{J_b} = n, \quad J_m = k J_a,$$

$$d = d_a + (d_b - d_a) \xi,$$

$$J = J_a \left[ 1 + \left( \sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1 \right) \xi \right]^3,$$

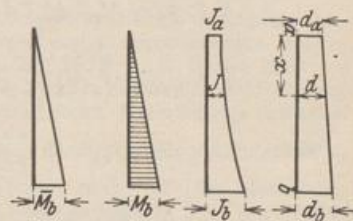


Abb. 107.

7\*



$$\int M \bar{M} \frac{J_a}{J} dx = M_b \bar{M}_b l \int_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)\xi\right]^3} d\xi,$$

$$\int M \bar{M} \frac{J_a}{J_m} dx = \frac{1}{3} M_b \bar{M}_b \frac{J_a}{J_a} l = M_b \bar{M}_b l \int_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)\xi\right]^3} d\xi, \quad (191)$$

$$k = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)^3}{\ln\left(\frac{1}{n}\right) + 6\sqrt[3]{n} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{n^2} - \frac{9}{2}}$$

Tabelle 11 für  $k$  mit  $n = \frac{J_a}{J_b}$  als Leitwert.

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n$ | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,20 | 0,21 |
| $k$ | 5,82 | 5,40 | 5,05 | 4,74 | 4,48 | 4,25 | 4,04 | 3,85 | 3,69 | 3,54 | 3,40 | 3,27 |
| $n$ | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 |
| $k$ | 3,16 | 3,05 | 2,95 | 2,86 | 2,78 | 2,70 | 2,64 | 2,56 | 2,49 | 2,21 | 2,00 | 1,83 |
| $n$ | 0,50 | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 |      |      |
| $k$ | 1,69 | 1,57 | 1,47 | 1,38 | 1,31 | 1,24 | 1,18 | 1,13 | 1,08 | 1,04 |      |      |

**Verdrehungen der Endtangente des Balkenträgers auf zwei Stützen.**

Stützweite:  $l$ , Querschnitt  $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = \zeta$ ,  $x = \xi l$ ,  $x' = \xi' l$ ,  $dx = l d\xi$

$$\xi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \xi' = \xi'', \quad \xi = \frac{1}{2} + \xi'', \quad \xi' = \frac{1}{2} - \xi''.$$

I. Belastung: Zwei an den Endquerschnitten angreifende Kräftepaare  $M_a, M_b$ :

$$M = M_a \xi' + M_b \xi.$$

Verdrehung der Endquerschnitte  $\varphi_a, \varphi_b$ : für  $\varphi_a$  ist  $\bar{M}_a = \xi'$ ; ebenso für  $\varphi_b$   $\bar{M}_b = \xi$ ,

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \int_0^1 \xi'^2 \zeta d\xi + M_b l' \int_0^1 \xi \xi' \zeta d\xi,$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \int_0^1 \xi \xi' \zeta d\xi + M_b l' \int_0^1 \xi^2 \zeta d\xi.$$

Endverdrehung  $\varphi_{aa}, \varphi_{ba}$  aus  $M_a = 1$  mt und  $\varphi_{ab}, \varphi_{bb}$  aus  $M_b = 1$  mt,

$$\varphi_a = M_a \varphi_{aa} + M_b \varphi_{ab}, \quad \varphi_b = M_a \varphi_{ba} + M_b \varphi_{bb}.$$

$$1. \quad \zeta = 1, \quad E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{3}, \quad E J_c \varphi_{ab} = E J_c \varphi_{ba} = \frac{l'}{6}.$$

2. Symmetrischer Verlauf von  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{J_m}{J} = 1 - (1-n)(2\xi'')^{2r}, \quad n = \frac{J_m}{J_a} = \frac{J_m}{J_b}.$$

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi'' \right] + M_b l' \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi'' \right],$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi'' \right] + M_b l' \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi'' \right],$$

$$E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{6} \frac{6n(r+1) + 2r(4r+5)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_1,$$

$$E J_c \varphi_{ba} = E J_c \varphi_{ab} = \frac{l'}{6} \frac{3n + 4r(r+2)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_2.$$



Für zwei lineare Funktionen  $M$  und  $\bar{M}$  wird hiermit

$$l' \int_0^1 M \bar{M} \zeta d\xi = \frac{l'}{6} [M_a(\bar{M}_a \varrho_1 + \bar{M}_b \varrho_2) + M_b(\bar{M}_a \varrho_2 + \bar{M}_b \varrho_1)].$$

3. Unsymmetrischer Verlauf von  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{J_a}{J} = 1 - (1-n) \xi^r, & n &= \frac{J_a}{J_b}, \\ E J_c \varphi_{aa} &= \frac{l'}{6} \left( 2 - \frac{12(1-n)}{(r+1)(r+2)(r+3)} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_3, \\ E J_c \varphi_{ba} &= E J_c \varphi_{ab} = \frac{l'}{6} \left( 1 - \frac{6(1-n)}{(r+2)(r+3)} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_4, \\ E J_c \varphi_{bb} &= \frac{l'}{6} \left( 2 - \frac{6(1-n)}{r+3} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_5. \end{aligned}$$

Für zwei lineare Funktionen  $M$  und  $\bar{M}$  wird

$$l' \int_0^1 M \bar{M} \zeta d\xi = \frac{l'}{6} [M_a(\bar{M}_a \varrho_3 + \bar{M}_b \varrho_4) + M_b(\bar{M}_a \varrho_4 + \bar{M}_b \varrho_5)].$$

II. Belastung: Gruppe von Einzellasten  $P_h$  ( $h=1, \dots, n$ ) in  $x=a_h$ ,  $x'=a'_h$ .

$$a_h/l = \alpha_h, \quad a'_h/l = \alpha'_h; \quad M = M_1 P_1 \dots + M_h P_h \dots + M_n P_n.$$

Für  $P_h = 1$  t und  $x < a_h$  ist  $M_h = a'_h \xi$ , für  $x > a_h$  ist  $M_h = a_h \xi'$ .

Verdrehung  $\varphi_a, \varphi_b$  der Endquerschnitte mit  $\zeta = 1$ :  $\bar{M}_a = \xi', \bar{M}_b = \xi$ ,

$$E J_c \varphi_{ah} = l' a'_h \int_0^1 \xi \xi' d\xi' - l' a'_h \int_0^{\alpha'_h} \xi' \left( 1 - \frac{\xi'}{\alpha'_h} \right) d\xi' = \frac{l l'}{6} (\alpha'_h - \alpha_h'^3) = \frac{l l'}{6} \omega'_D,$$

$$E J_c \varphi_{bh} = l' a_h \int_0^1 \xi \xi d\xi - l' a_h \int_0^{\alpha_h} \xi \left( 1 - \frac{\xi}{\alpha_h} \right) d\xi = \frac{l l'}{6} (\alpha_h - \alpha_h^3) = \frac{l l'}{6} \omega_D,$$

$$E J_c \varphi_a = \frac{l l'}{6} \sum_1^n P_h \omega'_D; \quad E J_c \varphi_b = \frac{l l'}{6} \sum_1^n P_h \omega_D.$$

$\omega'_D$  und  $\omega_D$  bilden in Verbindung mit dem Multiplikator den analytischen Ausdruck für die Einflußlinien von  $\varphi_a$  und  $\varphi_b$ . Er wird für die Bestimmung der Verdrehung aus einer beliebigen Streckenlast  $p(x)$  verwendet.

$$P_h = p_h dx = p_h l d\xi. \quad \text{Für } p(\xi) = \text{const im Bereich } (\alpha_2 - \alpha_1) \text{ ist}$$

$$E J_c \varphi_a = \frac{l^2 l'}{6} \int_{\alpha'_2}^{\alpha'_1} p(\xi') (\xi' - \xi'^3) d\xi' = p \frac{l^2 l'}{24} (\alpha_1'^3 - \alpha_2'^3) [2 - (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2)],$$

$$E J_c \varphi_b = \frac{l^2 l'}{6} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(\xi) (\xi - \xi^3) d\xi = p \frac{l^2 l'}{24} (\alpha_2^3 - \alpha_1^3) [2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)].$$

Ritter, M.: Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1909. — Schadek u. Demel: Hilfsmittel zur Berechnung von Formänderungen. Berlin 1915. — Domke, O.: Dachbauten. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10. 2. Aufl. Berlin 1923. — Straßner, A.: Der durchlaufende Rahmen. Berlin 1925. — Pasternack, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter, biegefestiger Stab- und Flächentragwerke. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Heidinger, S.: Die Berechnung von  $\int M \bar{M} \frac{dx}{EJ}$  für Stäbe mit veränderlichem Trägheitsmoment. Bauing. 1928. — Bühler, A.: Ziel, Ergebnisse und Wert der Messungen an Bauwerken. Bericht über die II. Int. Tagung für Brücken- und Hochbau S. 176. Wien 1929. — Kleinlogel, A.: Belastungsglieder. Berlin 1931.