Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Ansatz der Rechnung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

lastung $\overline{P}_r$ des Punktepaares r oder der Belastung $\overline{M}_r$ des Geradenpaares r erzeugt werden (Abb. 96).

Einflußlinie der Verschiebung und Winkeländerung. Wird $\overline{P}_r = 1$ t und $\overline{M}_r = 1$ mt gewählt und die beliebige Kräftegruppe $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ durch eine wandernde, d. h. an einem beliebigen Punkt m des Lastgurtes angreifende Kraft $P_m = 1$ t ersetzt, so bedeuten $\delta_{rm}, \varphi_{rm}, e_{rm}, \tau_{rm}$ die Ordinaten der Einflußlinien dieser Komponenten des Verschiebungszustandes. Sie werden aus (167) nach dem folgenden Ansatz berechnet:

$$\overline{1}_r \delta_{rm} = 1_m \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \varphi_{rm} = 1_m \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r e_{rm} = 1_m \overline{\delta}_{mr}; \quad \overline{1}_r \tau_{rm} = 1_m \overline{\delta}_{mr}. \tag{168}$$

Jedes Produkt ist eine virtuelle Arbeit mit der Dimension mt. Die Drehwinkel φ_{rm}, τ_{rm} sind dimensionslos, die Einheit hat also je nach dem Ansatz die Dimension der Kraft oder des Kräftepaares.

Die Einflußgrößen $\delta_{rm}, e_{rm}, \varphi_{rm}, \tau_{rm}$ werden daher als Projektionen der wirklichen Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes auf die Richtung der wandernden Einzellast P_m bestimmt. Sie sind damit Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes, welche je nach der Art der Einflußlinie für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punkte r oder für die Belastungseinheit $\overline{P}_r = 1$ am Punktepaare r, für die Belastungseinheit $\overline{M}_r = 1$ an der Geraden r oder für die Belastungseinheit $\overline{M}_r = 1$ am Geradenpaar r nach einer durch die wandernde Last bestimmten Richtung aufgezeichnet wird. Die Einflußlinien der Formänderungen werden daher nach den Abschnitten 20 und 21 über Biegelinien entwickelt.

18. Die Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes.

Die Form eines Stabzugs ändert sich durch Belastung, Temperaturwechsel und Stützenbewegung. Der Vorgang kann durch die Messung der Verschiebung ausgezeichneter Punkte oder durch die Messung der Verdrehung einzelner Stäbe und Querschnitte beobachtet werden. Der Vergleich mit den durch Rechnung gewonnenen Ergebnissen ermöglicht die Nachprüfung der Annahmen der Theorie oder ein Urteil über die Zuverlässigkeit des Spannungsnachweises. Die gerechneten Verschiebungen können außerdem zur Abschätzung der Steifigkeit der Konstruktion und deren niedrigster Eigenschwingungszahl oder zur Untersuchung von statisch unbestimmten Tragwerken verwendet werden.

Aus diesem Grunde wird die senkrechte oder waagerechte Verschiebung einzelner Punkte, also der Stabmitten, Gelenke und Rahmenecken bestimmt. Ebenso kann die Verdrehung von Stäben und Stabknoten, die gegenseitige Verschiebung von Punktepaaren oder die gegenseitige Verdrehung von Stäben und Gelenkteilen berechnet werden. Die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks werden in jedem Fall als bekannt vorausgesetzt.

Ansatz der Rechnung. Die Aufgabe wird durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen gelöst (156). Die virtuelle Belastung $\overline{P}$, $\overline{M}$ ist frei wählbar und kann daher auch so festgesetzt werden, daß die gesuchte Verschiebung δ_k eines Punktes k nach einer ausgezeichneten Richtung $\overrightarrow{kk'}$ unmittelbar durch den Ausdruck der Arbeit der virtuellen eingeprägten Kräfte $\overline{1}_k \cdot \delta_k$ angegeben wird. Die virtuelle Belastung ist damit als einzelne Kraft $\overline{P}_k = 1$ t im Punkte k mit der Richtung $\overrightarrow{kk'}$ definiert. Dasselbe gilt bei der Berechnung der Verdrehung φ_k eines Querschnitts oder einer ausgezeichneten Geraden k des Stabzugs. Die virtuelle

Arbeit $\Sigma \overline{M}_k \varphi_k$ wird in diesem Falle mit einem einzelnen Kräftepaar $\overline{M}_k = \overline{1}_k$ gebildet, das an k in dem für φ_k positiv angenommenen Drehsinn $\overrightarrow{kk'}$ wirkt. Mit der virtuellen Arbeit $\overline{1}_k \cdot \varphi_k$ ist die gesuchte Verdrehung unmittelbar bestimmt. Für die Berechnung der gegenseitigen Verschiebung zweier Punkte wird die virtuelle Belastungseinheit des Punktepaares, für die gegenseitige Verdrehung zweier Geraden die virtuelle Belastungseinheit des Geradenpaares verwendet.

Die Formänderungen δ_k, φ_k werden im folgenden stets unter der Voraussetzung angegeben, daß die Verzerrung des Stabteils ds durch die Komponenten ε_0, $d\psi_y$, $\gamma_{xz,0}$ und damit nach (154) durch die Stütz- und Schnittkräfte C, N, M, Q beschrieben werden kann, die mit der gegebenen Belastung im Gleichgewicht sind. Die Ebene der äußeren Kräfte fällt in diesem Falle mit der Symmetrieebene des Stabwerks zusammen. Der virtuellen Belastung $\overline{1}_k$ sind Stützkräfte $\overline{C}_k$ und Schnittkräfte $\overline{N}_k, \overline{M}_k, \overline{Q}_k$ zugeordnet. Beide Gruppen von Stütz- und Schnittkräften sind unabhängig voneinander und werden je nach der Struktur des Systems statisch bestimmt oder unbestimmt berechnet. Jede Komponente des Verschiebungszustandes kann daher folgendermaßen angegeben werden:

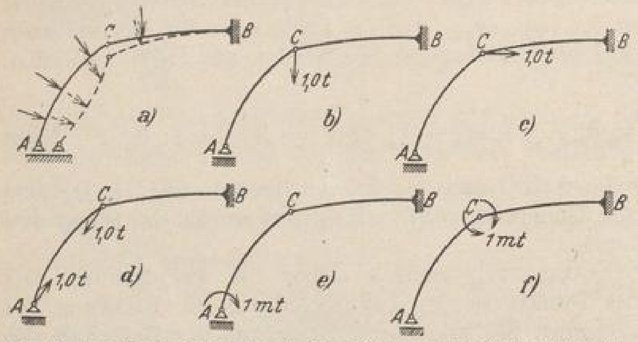

Abb. 97. Analytische Ermittlung der Verschiebungen und Verdrehungen ausgezeichneter Punkte und Querschnitte.

a) Stütz- und Schnittkräfte der gegebenen Belastung ΣP sind C, N, M, Q. Die folgenden Abbildungen stellen die virtuelle Belastung zur Berechnung der ausgezeichneten Formänderung dar.

b) Vertikale Verschiebung des Gelenkpunktes C. c) Horizontale Verschiebung des Gelenkpunktes C. d) Gegenseitige Verschiebung der Punkte A und C. e) Verdrehung des Stützenquerschnittes A. f) Gegenseitige Verdrehung der dem Scheitelgelenk benachbarten Querschnitte.

$$\overline{1}_k \delta_k = \int \frac{\overline{N}_k N}{EF} ds + \int \frac{\overline{M}_k M}{EJ} ds + \int \varkappa \frac{\overline{Q}_k Q}{GF} ds + \int \overline{N}_k \alpha_t t \, ds + \int \overline{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \Sigma \overline{C}_{ek} \Delta_e . \quad (169)$$

Der Ansatz gilt grundsätzlich für alle Stabwerke. Er wird hier zunächst auf statisch bestimmte Systeme beschränkt, um bei statisch unbestimmten Aufgaben die Ergebnisse des Abschnitts 24 zu verwenden. Die Erweiterung des Ansatzes bei schiefer Biegung oder schiefer Biegung mit Verdrillung des Stabteils ds geschieht in Anlehnung an die Angaben (49). In zahlreichen Fällen wird der EJ_cfache Betrag der Verschiebungen berechnet. Das Vergleichsträgheitsmoment J_c wird dabei so gewählt, daß die Funktion J_c/J oder $J_c/J \cos\alpha$ in möglichst großen Integrationsabschnitten „1" ist. Im übrigen empfiehlt sich für J_c entweder das kleinste oder das größte Trägheitsmoment des ganzen Integrationsbereiches. F_c ist ein Vergleichsquerschnitt.

$$\overline{1}_k (EJ_c \delta_k) = \frac{J_c}{F_c} \int \overline{N}_k N \frac{F_c}{F} ds + \int \overline{M}_k M \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c E}{F_c G} \int \varkappa \overline{Q}_k Q \frac{F_c}{F} ds$$
$$+ EJ_c \left[\int \overline{N}_k \alpha_t t \, ds + \int \overline{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \right] - EJ_c \Sigma \overline{C}_{ek} \Delta_e . \quad (170)$$

Die Anteile der Verschiebung aus Belastung, Temperaturänderung und bekannten oder geschätzten Stützenverschiebungen Δ_e sind unabhängig voneinander. Der Belastungsanteil der Verschiebung δ_k besteht aus drei Summanden, die sich in ihrer Größe wesentlich voneinander unterscheiden. Der Anteil aus den Querkräften ist stets sehr klein und besitzt nur in Ausnahmefällen Bedeutung. Auch der von den

Längskräften herrührende Anteil darf für biegungssteife Bauteile meist vereinfacht oder vernachlässigt werden. Man verwendet daher für N und N_k oft die den einzelnen Abschnitten des Stabwerks zugeordneten Mittelwerte. Dagegen sind die Längenänderungen in Zug- oder Druckstäben, also die Anteile mit den Längskräften $S, \overline{S}_k$ wesentlich.

In vielen Fällen ist die Formänderung eines biegungssteifen Tragwerks aus einer Belastung $\mathfrak{P}$ bereits durch die Biegungsmomente mit genügender Genauigkeit bestimmt, so daß je nach dem Stabnetz und dessen Unterteilung

$$\delta_k = \int \frac{\overline{M}_k M}{E J} ds; \quad E J_c \delta_k = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \frac{J_h}{J} ds = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \frac{J_h}{J \cos \alpha} dx. \tag{171}$$

Enthält das Stabwerk auch unbelastete, gelenkig angeschlossene Stäbe mit den Längskräften $S, \overline{S}_k$, so ist

$$E J_c \delta_k = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \frac{J_h}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \sum \overline{S}_k S \frac{F_c}{F} s. \tag{172}$$

Die Ansätze (171) oder (172) dienen auch zur punktweisen Bestimmung der Einflußlinien der Verschiebungen δ_{km}. In diesem Fall sind N, M, S die Schnittkräfte des Stabwerks aus der Belastung mit $P_m = 1$ t in einem beliebigen Punkte m des Lastgurtes.

Die Angaben für die Verschiebung δ_{kt} infolge Temperaturänderung stützen sich auf die Annahme eines linear veränderlichen Temperaturgefälles Δt und beruhen meist nur auf groben Schätzungen des Temperaturunterschiedes $\pm t$. Daher genügen in der Regel auch die Mittelwerte von $\overline{N}_k$ und $(\alpha_t \Delta t) : (h \cos \alpha)$ eines größeren Integrationsabschnittes.

$$\delta_{kt} = \int \overline{N}_k \alpha_t t \, ds + \int \overline{M}_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \approx \sum \overline{N}_k \alpha_t t s + \sum \frac{\alpha_t \Delta t}{h \cos \alpha} \int \overline{M}_k dx. \tag{173}$$

Die Verschiebung aus gemessenen oder geschätzten Stützenverschiebungen Δ_e allein ist

$$\delta_{ks} = - \sum \overline{C}_{ek} \Delta_e. \tag{174}$$

Der Integrand. Der Integrationsbereich erstreckt sich über alle Teile des Stabwerks, deren Spannungen und Dehnungen nach dem Geradliniengesetz angegeben werden können. In den Brechpunkten des Stabzuges und in den Rahmenecken sind diese Annahmen ungültig. Die Steifigkeit ist hier größer. Dasselbe gilt für die Knotenpunkte des Stabwerks, insbesondere bei Verbindung von Stützen mit hohen Trägern. Der Begriff des Querschnitts verliert hier seine Bedeutung. Trotzdem wird, abgesehen von einzelnen Ausnahmen, über die theoretische Stablänge integriert, um einfache und kurze Ansätze zu erhalten, die dem Wesen der Untersuchung entsprechen und die Erscheinung mit genügender Genauigkeit beschreiben.

Baustoff	Elastizitätsmodul kg/cm^2
Beton (nach amtl. Bestimmungen) . . .	210000
Beton erdfeucht 1 : 2½ : 5	446000
Beton plastisch 1 : 2 : 3	256000
Granit	195000
Buntsandstein.	75000
Keupersandstein.	36000

Die Formänderungen von Bauteilen aus Eisenbeton werden für den Spannungszustand vor Eintritt von Zugrissen angegeben. Der Elastizitätsmodul des Betons beträgt dann im Mittel $E_b = 210000$ kg/cm², so daß das Verhältnis $E_e : E_b = n = 10$ ist. Die Rundeisenbewehrung ist daher für das Trägheitsmoment des Querschnitts ohne große Bedeutung und kann meist vernachlässigt werden.