Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Mechanische Auslegung des Ansatzes

Die Rechenvorschrift (171) gilt nach der Ableitung für einzelne Stäbe und Träger, die nach den Angaben auf S. 27 belastet sind. Sie wird jedoch auch auf zusammenhängende elastische Gebilde mit parallel laufenden Trägern ausgedehnt, die durch Platten steif verbunden sind. Um deren Formänderung quer zur Stabrichtung zu berücksichtigen, wird bei der Rechnung nach der elementaren Theorie nur ein beschränkter Abschnitt der Platte als mittragend angesehen. Er kann aus einem Vergleiche der Ergebnisse mit dem Spannungs- und Verzerrungszustand der zweidimensionalen Konstruktion oder aus beobachteten Formänderungen gefunden werden. Die mittragende Plattenbreite ist nach den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses vom Jahre 1932, § A 25, 3b

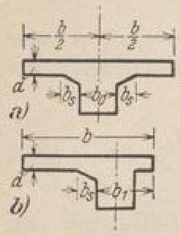


Abb. 98.

a) beim beiderseitigen Plattenbalken nach Abb. 98a:

$$b = 6d + 2b_s + b_0, \tag{175}$$

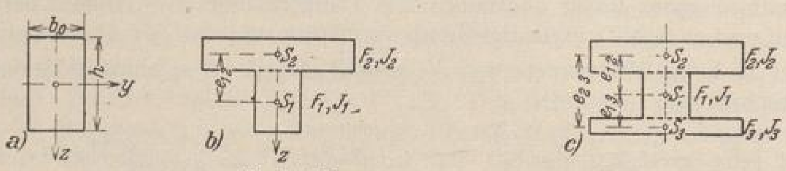
aber nicht größer als der Abstand der Feldmitten,

b) beim einseitigen Plattenbalken nach Abb. 98b:

$$b = 2{,}25\,d + b_s + b_1, \tag{176}$$

aber nicht größer als die halbe lichte Rippenentfernung, vermehrt um b_1.

Auf diese Weise entstehen die im Eisenbetonbau gebräuchlichen Querschnitte (Abb. 99). Das Trägheitsmoment J_y wird am besten nach einer Unterteilung in einzelne Rechtecke angegeben.



$$J_y = \frac{b_0 h^3}{12}.$$

$$F = F_1 + F_2,\qquad J_y = J_1 + J_2 + \frac{F_1 F_2}{F} e_{12}^2.$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3,\qquad J_y = J_1 + J_2 + J_3 + \frac{F_1 F_2}{F} e_{12}^2 + \frac{F_2 F_3}{F} e_{23}^2 + \frac{F_3 F_1}{F} e_{31}^2.$$

Abb. 99.

Das Trägheitsmoment J_y eines Stabes ist zwischen je zwei Knotenpunkten, also im Bereich eines Stabes l_h, stetig oder unstetig veränderlich, in vielen Fällen auch konstant. Die Änderung wird meist auf ein Vergleichsträgheitsmoment J_h in Stabmitte bezogen und durch den Quotienten $J_h/J = \zeta_h$ beschrieben. Die Veränderlichkeit des Querschnitts hängt oft von konstruktiven oder ästhetischen Gesichtspunkten ab, so daß die Funktion ζ_h punktweise bestimmt ist.

Die Stütz- und Schnittkräfte C, N, M, Q aus der gegebenen Belastung und $\overline{C}_k, \overline{N}_k, \overline{M}_k, \overline{Q}_k$ aus der virtuellen Belastung $\overline{1}_k$ werden nach Abschnitt 13 zeichnerisch oder rechnerisch angegeben. Bei statisch unbestimmten Tragwerken treten hierzu die Angaben der Abschnitte 24ff. Die Biegungsmomente M und $\overline{M}_k$ werden als Schaulinien einzeln in Stabnetze derart eingetragen, daß sie nur an der gezogenen (i) oder an der gedrückten (a) Stabseite erscheinen, um bei der Bildung des Integranden $\overline{M}_k \cdot M$ Vorzeichenfehler zu vermeiden. Längs- und Querkräfte werden ebenso wie die Stützkräfte neben den Stababschnitten als Zahlenwerte eingetragen. Das Vorzeichen der Produkte $\overline{N}_k \alpha_t t$ und $\overline{C}_{ek} \Delta_e$ ist durch ihre Bedeutung als virtuelle Arbeit bestimmt.

Mechanische Auslegung des Ansatzes. Die Berechnung einer Verschiebung oder Verdrehung ist nach diesen Bemerkungen über den Integranden im wesentlichen eine mathematische Aufgabe. Sie erhält jedoch auch mechanischen Inhalt, wenn die

Funktion M oder $\overline{M}_k$ im Integrationsbereich l_h linear ist. Mit $\xi = \frac{x}{l_h}$, $\xi' = \frac{x'}{l_h}$ und

$$\overline{M}_k = \overline{M}_a \xi' + \overline{M}_b \xi \quad \text{ist} \quad \int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J} dx = \overline{M}_a \int_0^{l_h} \xi' \left(M \frac{J_h}{J}\right) dx + \overline{M}_b \int_0^{l_h} \xi \left(M \frac{J_h}{J}\right) dx. \tag{177}$$

Die Integrale sind die analytischen Ausdrücke für die Stützkräfte $A_{\mathfrak{w}}$, $B_{\mathfrak{w}}$ eines einfachen Balkenträgers mit der Stützweite l_h und einer ideellen Belastung im Betrage von $\mathfrak{w} = M J_h / J$. Hieraus entsteht die folgende Rechenvorschrift:

$$\int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J} dx = \overline{M}_a A_{\mathfrak{w}} + \overline{M}_b B_{\mathfrak{w}}. \tag{178}$$

Die Verschiebung δ_k und die Verdrehung φ_k des Querschnitts k eines geraden Balkenträgers l_h mit freidrehbaren Enden werden nach (171) mit

$$\overline{1}_k (E J_h \delta_k) = \int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J} dx, \quad \overline{1}'_k (E J_h \varphi_k) = \int_0^{l_h} \overline{M}'_k M \frac{J_h}{J} dx \tag{179}$$

bestimmt. Die Zustandslinien $\overline{M}_k$ und $\overline{M}'_k$ für $\overline{1}_k$ und $\overline{1}'_k$ (Abb. 100) können mit den Einflußlinien für das Moment M_k und die Querkraft Q_k des Trägers l_h im Querschnitt k verglichen werden. Daher wird die Durchbiegung $E J_h \delta_k$ als Moment $M_{k\mathfrak{w}}$, die Verdrehung $E J_h \varphi_k$ als Querkraft $Q_{k\mathfrak{w}}$ im Querschnitt k des Balkenträgers l_h für die ideelle Belastung $\mathfrak{w} = M J_h / J$ gefunden. Aus den Auflagerkräften $A_{\mathfrak{w}}$ und $B_{\mathfrak{w}}$ wird die Verdrehung der Endquerschnitte abgeleitet. Unter Umständen kann diese Berechnung nach S. 125 auch auf Stabzüge mit angenommenen Randbedingungen angewendet werden.

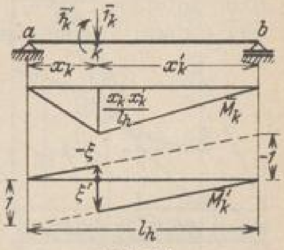


Abb. 100.

Numerische Integration. Der mathematische Teil jeder Formänderungsberechnung besteht bei genauer Beachtung der Veränderlichkeit des Querschnitts in einer numerischen Integration. Hierbei werden diejenigen Methoden gewählt, die das Integral als Mittelwert von Funktionswerten des Intervalls bilden. Von diesen ist die Simpsonsche Regel am meisten gebräuchlich. Sie liefert den Mittelwert des bestimmten Integrals durch Unterteilung des Bereichs in $2n$ oder $3n$ Abschnitte von der konstanten Breite Δx. Die den Intervallgrenzen m zugeordneten Funktionswerte sind

$$\eta_m = \overline{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \overline{M}_{mk} M_m \zeta_m \quad \text{oder} \quad \eta_m = \overline{N}_{mk} N_m \frac{F_h}{F_m}. \tag{180}$$

In der Regel genügt zu einem genauen Ergebnis die Unterteilung $l_h = 2n \cdot \Delta x$ und damit der Ansatz:

$$\int_a^b \eta \, dx = \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + \cdots 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}). \tag{181}$$

Die Genauigkeit ist bei Unterteilung von l_h in $3n \cdot \Delta x$ etwas größer. Sie führt zu der folgenden Reihe:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \eta \, dx = \tfrac{3}{8} \Delta x (\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 3\eta_5 + 2\eta_6 + \cdots \\ \cdots + 2\eta_{3n-3} + 3\eta_{3n-2} + 3\eta_{3n-1} + \eta_{3n}). \end{aligned} \right\} \tag{182}$$