Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Numerische Integration

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Funktion M oder $\overline{M}_k$ im Integrationsbereich l_h linear ist. Mit $\xi = \frac{x}{l_h}$, $\xi' = \frac{x'}{l_h}$ und

$$\overline{M}_k = \overline{M}_a\,\xi' + \overline{M}_b\,\xi \quad \text{ist} \quad \int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J}\,dx = \overline{M}_a \int_0^{l_h} \xi'\left(M\frac{J_h}{J}\right)dx + \overline{M}_b \int_0^{l_h} \xi\left(M\frac{J_h}{J}\right)dx. \tag{177}$$

Die Integrale sind die analytischen Ausdrücke für die Stützkräfte $A_{\mathfrak{w}}$, $B_{\mathfrak{w}}$ eines einfachen Balkenträgers mit der Stützweite l_h und einer ideellen Belastung im Betrage von $\mathfrak{w} = M J_h/J$. Hieraus entsteht die folgende Rechenvorschrift:

$$\int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J}\,dx = \overline{M}_a A_{\mathfrak{w}} + \overline{M}_b B_{\mathfrak{w}}. \tag{178}$$

Die Verschiebung δ_k und die Verdrehung φ_k des Querschnitts k eines geraden Balkenträgers l_h mit freidrehbaren Enden werden nach (171) mit

$$\overline{1}_k(E J_h \delta_k) = \int_0^{l_h} \overline{M}_k M \frac{J_h}{J}\,dx, \quad \overline{1}'_k(E J_h \varphi_k) = \int_0^{l_h} \overline{M}'_k M \frac{J_h}{J}\,dx \tag{179}$$

bestimmt. Die Zustandslinien $\overline{M}_k$ und $\overline{M}'_k$ für $\overline{1}_k$ und $\overline{1}'_k$ (Abb. 100) können mit den Einflußlinien für das Moment M_k und die Querkraft Q_k des Trägers l_h im Querschnitt k verglichen werden. Daher wird die Durchbiegung $E J_h \delta_k$ als Moment $M_{k\mathfrak{w}}$, die Verdrehung $E J_h \varphi_k$ als Querkraft $Q_{k\mathfrak{w}}$ im Querschnitt k des Balkenträgers l_h für die ideelle Belastung $\mathfrak{w} = M J_h/J$ gefunden. Aus den Auflagerkräften $A_{\mathfrak{w}}$ und $B_{\mathfrak{w}}$ wird die Verdrehung der Endquerschnitte abgeleitet. Unter Umständen kann diese Berechnung nach S. 125 auch auf Stabzüge mit angenommenen Randbedingungen angewendet werden.

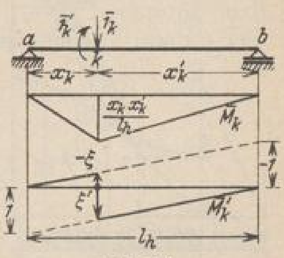

Abb. 100.

Numerische Integration. Der mathematische Teil jeder Formänderungsberechnung besteht bei genauer Beachtung der Veränderlichkeit des Querschnitts in einer numerischen Integration. Hierbei werden diejenigen Methoden gewählt, die das Integral als Mittelwert von Funktionswerten des Intervalls bilden. Von diesen ist die Simpsonsche Regel am meisten gebräuchlich. Sie liefert den Mittelwert des bestimmten Integrals durch Unterteilung des Bereichs in $2\,n$ oder $3\,n$ Abschnitte von der konstanten Breite Δx. Die den Intervallgrenzen m zugeordneten Funktionswerte sind

$$\eta_m = \overline{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \overline{M}_{mk} M_m \zeta_m \quad \text{oder} \quad \eta_m = \overline{N}_{mk} N_m \frac{F_h}{F_m}. \tag{180}$$

In der Regel genügt zu einem genauen Ergebnis die Unterteilung $l_h = 2\,n \cdot \Delta x$ und damit der Ansatz:

$$\int_a^b \eta\,dx = \frac{\Delta x}{3}(\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + \cdots 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}). \tag{181}$$

Die Genauigkeit ist bei Unterteilung von l_h in $3\,n \cdot \Delta x$ etwas größer. Sie führt zu der folgenden Reihe:

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b \eta\,dx = \tfrac{3}{8}\Delta x\,(\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 + 3\eta_5 + 2\eta_6 + \cdots \\ \cdots + 2\eta_{3n-3} + 3\eta_{3n-2} + 3\eta_{3n-1} + \eta_{3n}). \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Beide Ansätze sind auf S. 176 angewendet und in ihren Ergebnissen verglichen worden.

Um die mit der Reihenentwicklung nach Simpson verbundene Zahlenrechnung zu umgehen, kann das Integral auch durch Zerlegung des Integrationsbereichs in n Stufen e_m mit geometrisch veränderlicher, jedoch elastisch konstanter Breite $c = e_m \zeta_m$ angeschrieben werden (Abb. 101). Mit

$$\overline{M}_{mk} M_m = \lambda_m, \quad \frac{J_h}{J_m} = \zeta_m \quad \text{und} \quad \overline{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \lambda_m \zeta_m = \eta_m \quad \text{ist}$$

$$\int_a^b \eta\, dx = \sum_a^b \eta\, \Delta x = \sum_1^n \eta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m \zeta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m c = c \sum_1^n \lambda_m. \tag{183}$$

Der Betrag $c = e_m \zeta_m$ entsteht aus einer beliebigen Unterteilung Δx des Integrationsbereiches:

$$c = \frac{1}{n} \sum_a^b \zeta\, \Delta x = \frac{1}{n} \sum_a^b \frac{J_h}{J}\, \Delta x.$$

Das Integral $\int_a^b \eta\, dx$ wird danach als Summe über die mittleren Ordinaten λ_m der Intervalle e_m erhalten (Rechenvorschrift Abschn. 56). Die Stufenbreite c ändert sich mit der Art des Integranden. Man unterscheidet

$$\left.\begin{aligned} c &= e_m \frac{J_h}{J_m}, & c &= e_m \frac{J_h}{J_m \cos \alpha_m}, \\ c &= e_m \frac{F_h}{F_m}, & c &= e_m \frac{F_h}{F_m \cos \alpha_m}. \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

Hierzu treten die Funktionswerte λ_m.

$$\lambda_m = \overline{M}_{mk} M_m \quad \text{oder} \quad \lambda_m = \overline{N}_{mk} N_m.$$

Die Glieder der Reihe (183) sind also im Vergleich zu (181) und (182) durch die besondere Art der Unterteilung einfacher geworden. Diese wird aus den Integralkurven zu den Funktionen J_h/J_m, $J_h/J_m \cos\alpha_m$ oder F_h/F_m, $F_h/F_m \cos\alpha_m$ abgeleitet (Abb. 101).

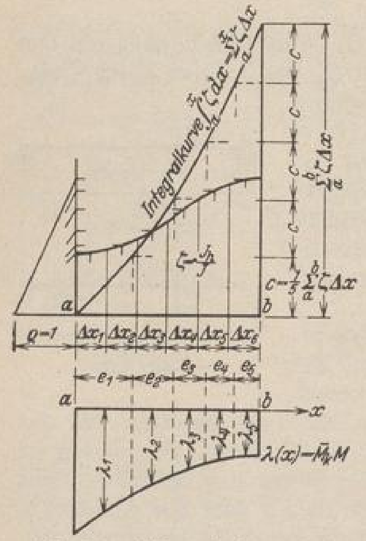

Abb. 101. ϱ Hilfswert für die graphische Integration.

$$\int_0^x \zeta\, dx = \varrho \int_0^x \frac{\zeta}{\varrho}\, dx.$$

Berechnung mit Annahmen über die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts. Verwendung von Integrationstabellen. Um die numerische Integration zu umgehen, begnügt man sich oft mit einem angenäherten Ergebnis und beschreibt die vorhandene Querschnittsänderung durch eine aus wenigen Gliedern bestehende Reihe. Hierbei werden dann die einfachsten Ansätze gewählt, um die Integration für die Funktion $\zeta_h = J_h/J$ abzukürzen. In zahlreichen Fällen ist das Trägheitsmoment J_h eines Stabes l_h konstant oder durch einen Mittelwert J_h genügend beschrieben. Der Integrand besteht dann nur aus zwei Faktoren. Mit $x = \xi l_h$ und $l'_h = l_h \frac{J_c}{J_h}$ ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\overline{M}_k M}{J}\, dx = \sum l_h \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M\, d\xi = \sum l'_h \int_h \overline{M}_k M\, d\xi. \tag{185}$$

Bei gekrümmten Stäben mit $\frac{J_h}{J \cos\alpha} = 1$ ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\overline{M}_k M}{J}\, ds = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \frac{J_h}{J \cos\alpha}\, dx = \sum l'_h \int_h \overline{M}_k M\, d\xi. \tag{186}$$