Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Berchnung mit Annahmen über die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts; Verwendung von Integrationstabellen

Beide Ansätze sind auf S. 176 angewendet und in ihren Ergebnissen verglichen worden.

Um die mit der Reihenentwicklung nach Simpson verbundene Zahlenrechnung zu umgehen, kann das Integral auch durch Zerlegung des Integrationsbereichs in n Stufen e_m mit geometrisch veränderlicher, jedoch elastisch konstanter Breite $c = e_m \zeta_m$ angeschrieben werden (Abb. 101). Mit

$$\overline{M}_{mk} M_m = \lambda_m, \quad \frac{J_h}{J_m} = \zeta_m \quad \text{und} \quad \overline{M}_{mk} M_m \frac{J_h}{J_m} = \lambda_m \zeta_m = \eta_m \quad \text{ist}$$

$$\int_a^b \eta \, dx = \sum_a^b \eta \, \Delta x = \sum_1^n \eta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m \zeta_m e_m = \sum_1^n \lambda_m c = c \sum_1^n \lambda_m. \qquad (183)$$

Der Betrag $c = e_m \zeta_m$ entsteht aus einer beliebigen Unterteilung Δx des Integrationsbereiches:

$$c = \frac{1}{n} \sum_a^b \zeta \, \Delta x = \frac{1}{n} \sum_a^b \frac{J_h}{J} \Delta x.$$

Das Integral $\int_a^b \eta \, dx$ wird danach als Summe über die mittleren Ordinaten λ_m der Intervalle e_m erhalten (Rechenvorschrift Abschn. 56). Die Stufenbreite c ändert sich mit der Art des Integranden. Man unterscheidet

$$\left.\begin{aligned} c &= e_m \frac{J_h}{J_m}, & c &= e_m \frac{J_h}{J_m \cos \alpha_m}, \\ c &= e_m \frac{F_h}{F_m}, & c &= e_m \frac{F_h}{F_m \cos \alpha_m}. \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

Hierzu treten die Funktionswerte λ_m.

$$\lambda_m = \overline{M}_{mk} M_m \quad \text{oder} \quad \lambda_m = \overline{N}_{mk} N_m.$$

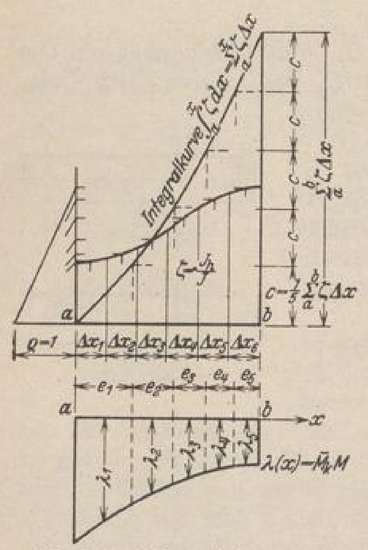

Abb. 101. ϱ Hilfswert für die graphische Integration.

$$\int_0^x \zeta \, dx = \varrho \int_0^x \frac{\zeta}{\varrho} \, dx.$$

Die Glieder der Reihe (183) sind also im Vergleich zu (181) und (182) durch die besondere Art der Unterteilung einfacher geworden. Diese wird aus den Integralkurven zu den Funktionen J_h/J_m, $J_h/J_m \cos \alpha_m$ oder F_h/F_m, $F_h/F_m \cos \alpha_m$ abgeleitet (Abb. 101).

Berechnung mit Annahmen über die stetige Veränderlichkeit des Querschnitts. Verwendung von Integrationstabellen. Um die numerische Integration zu umgehen, begnügt man sich oft mit einem angenäherten Ergebnis und beschreibt die vorhandene Querschnittsänderung durch eine aus wenigen Gliedern bestehende Reihe. Hierbei werden dann die einfachsten Ansätze gewählt, um die Integration für die Funktion $\zeta_h = J_h/J$ abzukürzen. In zahlreichen Fällen ist das Trägheitsmoment J_h eines Stabes l_h konstant oder durch einen Mittelwert J_h genügend beschrieben. Der Integrand besteht dann nur aus zwei Faktoren. Mit $x = \xi l_h$ und $l'_h = l_h \frac{J_c}{J_h}$ ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\overline{M}_k M}{J} dx = \sum l_h \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \, d\xi = \sum l'_h \int_h \overline{M}_k M \, d\xi. \qquad (185)$$

Bei gekrümmten Stäben mit $\frac{J_h}{J \cos \alpha} = 1$ ist

$$E J_c \delta_k = J_c \int \frac{\overline{M}_k M}{J} ds = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h \overline{M}_k M \frac{J_h}{J \cos \alpha} dx = \sum l'_h \int_h \overline{M}_k M \, d\xi. \qquad (186)$$

Die Ergebnisse werden unter Umständen wesentlich genauer, wenn die Stabform im Ansatz mit zwei ausgezeichneten Querschnitten erscheint und ζ_h angenähert durch eine quadratische Parabel angegeben wird. Als Freiwerte dienen bei symmetrischen Stäben die Trägheitsmomente in Stabmitte J_h und am Stabende $J_{ha} = J_h/n_h$, bei unsymmetrischen Stäben die Trägheitsmomente $J_{hb} = J_h$, $J_{ha} = J_h/n_h$ der Endquerschnitte (Abb. 102), so daß mit $\xi = x/l_h$:

a) bei symmetrischen Stäben

$$\zeta_h = 1 - (1 - n_h)(1 - 2\,\xi)^2,$$

b) bei unsymmetrischen Stäben

$$\zeta_h = 1 - (1 - n_h)(1 - \xi)^2. \tag{187}$$

Die Parabel höherer Ordnung enthält in dem willkürlich wählbaren Exponenten einen weiteren Freiwert, mit dem die Angleichung an einen gegebenen Funktionsverlauf noch mehr verbessert werden kann. Mit $\xi'' = \xi - 0{,}5$ ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a) bei symmetrischen Stäben:} & \zeta_h = 1 - (1 - n)(2\,\xi'')^{2r}, \\ \text{b) bei unsymmetrischen Stäben:} & \zeta_h = 1 - (1 - n)(1 - \xi)^{r}. \end{array}\right\} \tag{188}$$

Die Funktionen $\overline{M}_k$ und M sind meist linear, zweiten oder dritten Grades. Unstetige Funktionen werden in stetige Abschnitte geteilt oder durch Superposition der Biegungsmomente vereinfacht, indem deren Ordinaten geometrisch oder durch Überlagerung der Belastung zerlegt werden. In einzelnen Fällen wird die Rechnung auch durch Aufspaltung der beiden Funktionen in einen symmetrischen und antimetrischen Anteil abgekürzt.

$$\int \overline{M}_k M \zeta\, d\xi = \int (\overline{M}_{k1} + \overline{M}_{k2} + \cdots)(M_1 + M_2 + \cdots)\zeta\, d\xi,$$

z. B. $\qquad \overline{M}_k = \overline{M}_{k1} + \overline{M}_{k2}, \qquad M = M_1 + M_2.$

$$\int_0^1 \overline{M}_k M \zeta\, d\xi = \int_0^1 \overline{M}_{k1} M_1 \zeta\, d\xi + \int_0^1 \overline{M}_{k1} M_2 \zeta\, d\xi + \int_0^1 \overline{M}_{k2} M_1 \zeta\, d\xi + \int_0^1 \overline{M}_{k2} M_2 \zeta\, d\xi. \tag{189}$$

Der Integrand ist in zahlreichen Aufgaben bei $\zeta_h = 1$ eine algebraische Funktion zweiten bis fünften Grades, so daß der Ansatz nach (181) oder (182) mit zwei oder drei Intervallen die strenge Lösung des Integrals liefert. Die Ergebnisse sind in der Integrationstabelle 12 zusammengefaßt worden. Sie genügen bei gleichbleibendem Trägheitsmoment J_h des Stabes zur unmittelbaren Berechnung zahlreicher Verschiebungskomponenten. Die Integrale können auch noch bei einer quadratischen, symmetrischen oder unsymmetrischen Funktion ζ_h leicht für zahlreiche Schaulinien $\overline{M}_k$ und M angegeben werden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 13a, b enthalten.

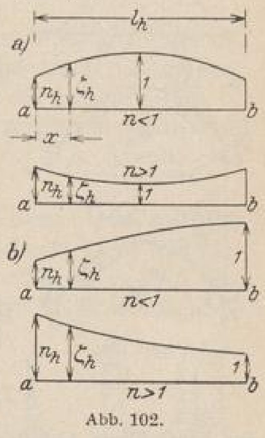

Abb. 102.

Zur Berechnung einzelner Komponenten des Verschiebungszustandes eines Stabwerks werden daher zunächst die geometrischen Größen n_h und ζ_h der Stäbe l_h festgestellt und die Schaulinien der Biegungsmomente M, $\overline{M}_k$ aus der vorgeschriebenen Belastung $\mathfrak{P}$ und der virtuellen Belastung $\overline{1}_k$ unter Beachtung der Vorzeichen aufgetragen. Darauf wird die Funktion $(M\overline{M}_k\zeta_h)$ mit Hilfe der Tabellen integriert, falls nicht unter besonderen Umständen die numerische Integration notwendig ist. Ein positives Rechenergebnis bedeutet die gleiche Richtung oder den gleichen Drehsinn wie für die angenommene virtuelle Belastung $\overline{1}_k$.

Bei Stäben mit gleichbleibender Krümmung ($r = \text{const} \gg d$) werden die Schnittkräfte als Funktionen des Tangentenwinkels α angegeben, so daß die Verschiebung bei konstantem Trägheitsmoment ($J = \text{const}$) nach (170) folgendermaßen berechnet wird:

$$\overline{1}_k (E J \delta_k) = r \frac{J}{F} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overline{N}_k N \, d\alpha + r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overline{M}_k M \, d\alpha . \tag{190}$$

Die Ergebnisse sind für die wichtigsten Ansätze des Integranden bestimmt und in Tabelle **16** angeschrieben worden.

Berechnung der gegenseitigen Verdrehung $E J_c \delta_g$ der Stabquerschnitte am Gelenk g eines Gerberträgers (Abb. 103).

Das Trägheitsmoment wird als konstant angenommen. Die Biegungsmomente M aus der vorgeschriebenen gleichförmigen Belastung p sind in sechs Teile zerlegt worden (Abb. **103** b). Die Biegungsmomente aus der virtuellen Belastungseinheit des Geradenpaares in g sind in Abb. **103** c wiedergegeben. Beide Schaulinien zeigen die Momente an der gezogenen Randfaser, so daß der Integrand $M \overline{M}_g$ positiv ist, wenn beide Ordinaten an derselben Stabseite liegen.

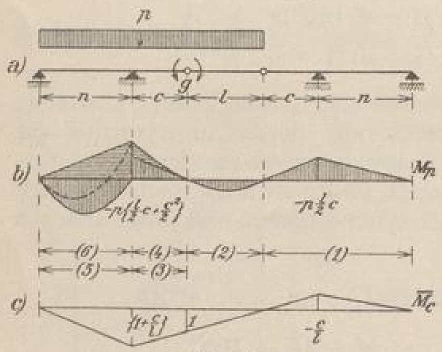

Abb. 103.

$$E J_c \delta_g = \sum_1^6 \frac{J_c}{J} \int M \overline{M}_g \, dx ,$$

1. $+\frac{1}{3} p \frac{l}{2} c \frac{c}{l} (n' + c')$,
2. $+\frac{1}{24} p l^2 l'$,
3. $-\frac{1}{6} p \frac{lc}{2} \left\{ 2 \left(1 + \frac{c}{l}\right) + 1 \right\} c'$,
4. $-\frac{1}{12} p \frac{c^2}{2} \left\{ 3 \left(1 + \frac{c}{l}\right) + 1 \right\} c'$,
5. $+\frac{1}{24} p n^2 \left(1 + \frac{c}{l}\right) n'$,
6. $-\frac{1}{3} \frac{p l c}{2} \left(1 + \frac{c}{l}\right)^2 n'$.

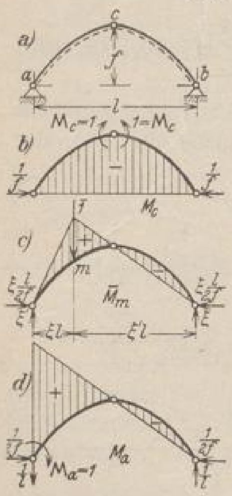

Abb. 104.

Mit $\alpha = 1 + c/l$ ist

$$E J_c \delta_g = \frac{p}{24} \{ l' l^2 - c' c [2 l (2\alpha + 1) + 3 c (\alpha - 1)] + n' [4 c^2 + \alpha n^2 - 4 l c \alpha^2] \} .$$

$$n = 15{,}0 \text{ m}, \quad c = 7{,}5 \text{ m}, \quad l = 15{,}0 \text{ m},$$
$$n' = 8{,}250 \text{ m}, \quad c' = 4{,}125 \text{ m}, \quad l' = 15{,}000 \text{ m}$$

liefert

$$E J_c \delta_g = \frac{p}{24} (3375 - 4060 - 3713) = -183 p .$$

Einflußlinien für die relative Verdrehung der Gelenkquerschnitte eines Bogenträgers.

Die Mittellinie ist eine Parabel, $\frac{J_c}{J \cos \alpha} = 1$.

a) Einflußlinie der Verdrehung des Scheitelgelenks c nach (168): Biegelinie infolge eines Momentenpaares $M_c = 1$ in c. Rechnung nach (186) mit Abb. 104 b. $P = 1$ über dem linken Bogenschenkel, $0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$:

$$E J_c \cdot \delta_{c\,m} = l \int_0^1 M_c \overline{M}_m \, d\xi = \frac{l^2}{15} (4 \xi - 5 \omega_P'') = \frac{l^2}{6} k_1 .$$

Die Einflußlinie Abb. **105** a ist symmetrisch.

b) Einflußlinie der Verdrehung des Kämpfergelenks a nach (168): Biegelinie infolge $M_a = 1$ in a. Rechnung nach (186) mit Abb. **104** d. $P = 1$ über dem linken Bogenschenkel, $0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$:

$$E J_c \delta_{a\,m}^{(I)} = l \int_0^1 M_a \overline{M}_m \, d\xi = \frac{l^2}{30} [5 (\omega_D' - \omega_P'') - \xi] = \frac{l^2}{30} \xi (5 \xi'^3 - 1) = \frac{l^2}{6} k_2^{(I)} .$$