Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Endverdrehung eines Stabes mit linear veränderlichem Querschnitt

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$P = 1$ über dem rechten Bogenschenkel, $\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1$:

$$E J_c \delta_{a m}^{(r)} = \frac{l^2}{30} [5(\omega_D' - \omega_P'') - \xi'] = \frac{l^2}{30} \xi' (5 \omega_\tau' - 1) = \frac{l^2}{6} k_2^{(r)}.$$

Die Funktionswerte k_1, k_2 gelten für jeden Dreigelenkbogen mit einer Parabel als Mittellinie und $J_c/J \cos \alpha = 1$.

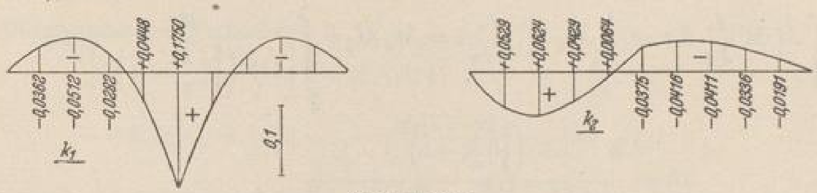

Abb. 105 a u. b.

Unstetiger Verlauf von ζ. Die Steifigkeit des Stabwerks wird oft durch die Anordnung von Vouten und durch die biegungssteife Verbindung der Stützen mit hohen Trägern wesentlich verändert. Sie kann stets durch numerische Integration des Ansatzes verfolgt werden. Die Abb. 106 vergleicht derartige Anordnungen mit den zugeordneten Funktionen ζ. Man vereinfacht aber auch hier den Integranden, um für die wichtigsten Aufgaben geschlossene Lösungen zu erhalten und wählt ζ_h im Bereiche der Voute linear (Kurve 2 in Abb. 106). Die wichtigsten Ergebnisse sind in den Tabellen 14a, b eingetragen.

1. Linearer Verlauf der Trägerhöhe d_h,

2. Verlauf der Trägerhöhe für $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1 - n) v$,

3. „ „ „ „ $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1 - n) v^2$,

4. „ „ „ „ $\zeta_h = \frac{J_h}{J} = 1 - (1 - n) v^3$.

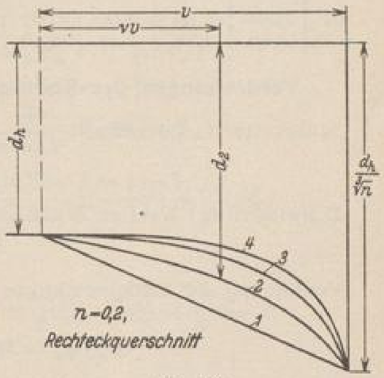

Abb. 106.

Beim Anschluß hoher Träger an die Stützen kann deren Trägheitsmoment im Bereiche des Knotens zur Abschätzung der Steifigkeitsverhältnisse unendlich groß, also $\zeta_h = 0$ angenommen werden. Die Annahme ist in einzelnen Fällen auch bei Trägern brauchbar, die in breite Stützen eingebunden sind. Die Ansätze (171) sind daher auch mit diesen Funktionen ζ für die wichtigsten Aufgaben ausgerechnet und in die Tabellen 15a, b aufgenommen worden. Die Ergebnisse sind für die Untersuchung einzelner Klassen statisch unbestimmter Tragwerke von Bedeutung und daher noch in Abschn. 46 erweitert worden.

Endverdrehung eines Stabes mit linear veränderlichem Querschnitt (Abb. 107). Um bei Stützen mit linear veränderlichem Querschnitt ($J = bd^3/12$) den herauszugreifen, der bei Stützen mit konstantem Querschnitt ($J_m = k J_a$) die gleiche Endverdrehung ergibt, läßt sich die Gl. (191) bilden und für die üblichen Verhältnisse $n = J_a/J_b$ der Endquerschnitte einer rechteckigen Stütze auswerten.

$$\frac{x}{l} = \xi, \qquad \frac{J_a}{J_b} = n, \qquad J_m = k J_a,$$

$$d = d_a + (d_b - d_a) \xi,$$

$$J = J_a \left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right) \xi\right]^3,$$

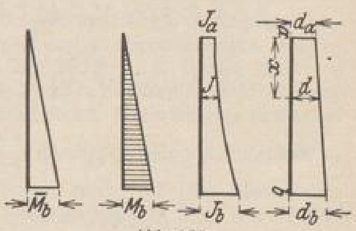

Abb. 107.

$$\int M \overline{M} \frac{J_a}{J} dx = M_b \overline{M}_b l \int_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right)\xi\right]^3} d\xi,$$

$$\int M \overline{M} \frac{J_a}{J_m} dx = \frac{1}{3} M_b \overline{M}_b \frac{J_a}{k J_a} l = M_b \overline{M}_b l \int_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right)\xi\right]^3} d\xi, \tag{191}$$

$$k = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right)^3}{\ln\left(\frac{1}{n}\right) + 6\sqrt[3]{n} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{n^2} - \frac{9}{2}}$$

Tabelle 11 für k mit $n = \frac{J_a}{J_b}$ als Leitwert.

n	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21
k	5,82	5,40	5,05	4,74	4,48	4,25	4,04	3,85	3,69	3,54	3,40	3,27
n	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,35	0,40	0,45
k	3,16	3,05	2,95	2,86	2,78	2,70	2,64	2,56	2,49	2,21	2,00	1,83
n	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95		
k	1,69	1,57	1,47	1,38	1,31	1,24	1,18	1,13	1,08	1,04		

Verdrehungen der Endtangenten des Balkenträgers auf zwei Stützen.

Stützweite: l, Querschnitt $\frac{J_c}{J\cos\alpha} = \zeta$, $\quad x = \xi l$, $\quad x' = \xi' l$, $\quad dx = l\,d\xi$

$$\xi - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - \xi' = \xi'', \qquad \xi = \tfrac{1}{2} + \xi'', \qquad \xi' = \tfrac{1}{2} - \xi''.$$

I. Belastung: Zwei an den Endquerschnitten angreifende Kräftepaare M_a, M_b:

$$M = M_a \xi' + M_b \xi.$$

Verdrehung der Endquerschnitte φ_a, φ_b: für φ_a ist $\overline{M}_a = \xi'$; ebenso für φ_b $\overline{M}_b = \xi$,

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \int_0^1 \xi'^2 \zeta \, d\xi + M_b l' \int_0^1 \xi \xi' \zeta \, d\xi,$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \int_0^1 \xi \xi' \zeta \, d\xi + M_b l' \int_0^1 \xi^2 \zeta \, d\xi.$$

Endverdrehung φ_{aa}, φ_{ba} aus $M_a = 1$ mt und φ_{ab}, φ_{bb} aus $M_b = 1$ mt,

$$\varphi_a = M_a \varphi_{aa} + M_b \varphi_{ab}, \quad \varphi_b = M_a \varphi_{ba} + M_b \varphi_{bb}.$$

1. $\zeta = 1$, $\quad E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{3}$, $\quad E J_c \varphi_{ab} = E J_c \varphi_{ba} = \frac{l'}{6}$.

2. Symmetrischer Verlauf von ζ:

$$\zeta = \frac{J_m}{J} = 1 - (1-n)(2\xi'')^{2r}, \qquad n = \frac{J_m}{J_a} = \frac{J_m}{J_b}.$$

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \left[\tfrac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta \, d\xi'' + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta \, d\xi''\right] + M_b l' \left[\tfrac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta \, d\xi'' - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta \, d\xi''\right],$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \left[\tfrac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta \, d\xi'' - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta \, d\xi''\right] + M_b l' \left[\tfrac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta \, d\xi'' + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta \, d\xi''\right],$$

$$E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{6} \frac{6n(r+1) + 2r(4r+5)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_1,$$

$$E J_c \varphi_{ba} = E J_c \varphi_{ab} = \frac{l'}{6} \frac{3n + 4r(r+2)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_2.$$