Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Verdrehungen der Endtangenten eines Balkenträgers auf zwei Stützen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$\int M \overline{M} \frac{J_a}{J} dx = M_b \overline{M}_b l \int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)\xi\right]^3} d\xi,$$

$$\int M \overline{M} \frac{J_a}{J_m} dx = \frac{1}{3} M_b \overline{M}_b \frac{J_a}{k J_a} l = M_b \overline{M}_b l \int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{\left[1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)\xi\right]^3} d\xi, \tag{191}$$

$$k = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} - 1\right)^3}{\ln\left(\frac{1}{n}\right) + 6\sqrt[3]{n} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{n^2} - \frac{9}{2}}$$

Tabelle 11 für k mit $n = \frac{J_a}{J_b}$ als Leitwert.

n	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21
k	5,82	5,40	5,05	4,74	4,48	4,25	4,04	3,85	3,69	3,54	3,40	3,27
n	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,35	0,40	0,45
k	3,16	3,05	2,95	2,86	2,78	2,70	2,64	2,56	2,49	2,21	2,00	1,83
n	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95		
k	1,69	1,57	1,47	1,38	1,31	1,24	1,18	1,13	1,08	1,04		

Verdrehungen der Endtangenten des Balkenträgers auf zwei Stützen.

Stützweite: l, Querschnitt $\frac{J_c}{J \cos\alpha} = \zeta$, $\quad x = \xi l$, $\quad x' = \xi' l$, $\quad dx = l d\xi$

$$\xi - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - \xi' = \xi'', \qquad \xi = \tfrac{1}{2} + \xi'', \qquad \xi' = \tfrac{1}{2} - \xi''.$$

I. Belastung: Zwei an den Endquerschnitten angreifende Kräftepaare M_a, M_b:

$$M = M_a \xi' + M_b \xi.$$

Verdrehung der Endquerschnitte φ_a, φ_b: für φ_a ist $\overline{M}_a = \xi'$; ebenso für φ_b $\overline{M}_b = \xi$,

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \int\limits_0^1 \xi'^2 \zeta d\xi + M_b l' \int\limits_0^1 \xi \xi' \zeta d\xi,$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \int\limits_0^1 \xi \xi' \zeta d\xi + M_b l' \int\limits_0^1 \xi^2 \zeta d\xi.$$

Endverdrehung φ_{aa}, φ_{ba} aus $M_a = 1$ mt und φ_{ab}, φ_{bb} aus $M_b = 1$ mt,

$$\varphi_a = M_a \varphi_{aa} + M_b \varphi_{ab}, \quad \varphi_b = M_a \varphi_{ba} + M_b \varphi_{bb}.$$

1. $\quad \zeta = 1, \quad E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{3}, \quad E J_c \varphi_{ab} = E J_c \varphi_{ba} = \frac{l'}{6}.$

2. Symmetrischer Verlauf von ζ:

$$\zeta = \frac{J_m}{J} = 1 - (1 - n)(2\xi'')^{2r}, \qquad n = \frac{J_m}{J_a} = \frac{J_m}{J_b}.$$

$$E J_c \varphi_a = M_a l' \left[\tfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi''\right] + M_b l' \left[\tfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi''\right],$$

$$E J_c \varphi_b = M_a l' \left[\tfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi''\right] + M_b l' \left[\tfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \zeta d\xi'' + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \xi''^2 \zeta d\xi''\right],$$

$$E J_c \varphi_{aa} = E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{6} \frac{6n(r+1) + 2r(4r+5)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_1,$$

$$E J_c \varphi_{ba} = E J_c \varphi_{ab} = \frac{l'}{6} \frac{3n + 4r(r+2)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{l'}{6} \varrho_2.$$

Für zwei lineare Funktionen M und $\overline{M}$ wird hiermit

$$l' \int_0^1 M \overline{M} \zeta \, d\xi = \frac{l'}{6} [M_a (\overline{M}_a \varrho_1 + \overline{M}_b \varrho_2) + M_b (\overline{M}_a \varrho_2 + \overline{M}_b \varrho_1)] .$$

3. Unsymmetrischer Verlauf von ζ:

$$\zeta = \frac{J_a}{J} = 1 - (1 - n) \xi^r , \qquad n = \frac{J_a}{J_b} ,$$

$$E J_c \varphi_{aa} = \frac{l'}{6} \left(2 - \frac{12 (1 - n)}{(r+1)(r+2)(r+3)} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_3 ,$$

$$E J_c \varphi_{ba} = E J_c \varphi_{ab} = \frac{l'}{6} \left(1 - \frac{6 (1 - n)}{(r+2)(r+3)} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_4 ,$$

$$E J_c \varphi_{bb} = \frac{l'}{6} \left(2 - \frac{6 (1 - n)}{r + 3} \right) = \frac{l'}{6} \varrho_5 .$$

Für zwei lineare Funktionen M und $\overline{M}$ wird

$$l' \int_0^1 M \overline{M} \zeta \, d\xi = \frac{l'}{6} [M_a (\overline{M}_a \varrho_3 + \overline{M}_b \varrho_4) + M_b (\overline{M}_a \varrho_4 + \overline{M}_b \varrho_5)] .$$

II. Belastung: Gruppe von Einzellasten $P_h \, (h = 1, \ldots, n)$ in $x = a_h$, $x' = a'_h$,

$$a_h / l = \alpha_h , \quad a'_h / l = \alpha'_h ; \quad M = M_1 P_1 \cdots + M_h P_h \cdots + M_n P_n .$$

Für $P_h = 1\,\mathrm{t}$ und $x < a_h$ ist $M_h = a'_h \xi$, für $x > a_h$ ist $M_h = a_h \xi'$.

Verdrehung φ_a, φ_b der Endquerschnitte mit $\zeta = 1$: $\overline{M_a} = \xi'$, $\overline{M}_b = \xi$,

$$E J_c \varphi_{ah} = l' a'_h \int_0^1 \xi \xi' \, d\xi' - l' a'_h \int_0^{\alpha'_h} \xi' \left(1 - \frac{\xi'}{\alpha'_h} \right) d\xi' = \frac{l l'}{6} (\alpha'_h - \alpha'^3_h) = \frac{l l'}{6} \omega'_D ,$$

$$E J_c \varphi_{bh} = l' a_h \int_0^1 \xi' \xi \, d\xi - l' a_h \int_0^{\alpha_h} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\alpha} \right) d\xi = \frac{l l'}{6} (\alpha_h - \alpha_h^3) = \frac{l l'}{6} \omega_D$$

$$E J_c \varphi_a = \frac{l l'}{6} \sum_1^n P_h \omega'_D ; \qquad E J_c \varphi_b = \frac{l l'}{6} \sum_1^n P_h \omega_D .$$

ω'_D und ω_D bilden in Verbindung mit dem Multiplikator den analytischen Ausdruck für die Einflußlinien von φ_a und φ_b. Er wird für die Bestimmung der Verdrehung aus einer beliebigen Streckenlast $p(x)$ verwendet.

$P_h = p_h \, dx = p_h \, l \, d\xi$. Für $p(\xi) = \mathrm{const}$ im Bereich $(\alpha_2 - \alpha_1)$ ist

$$E J_c \varphi_a = \frac{l^2 l'}{6} \int_{\alpha'_2}^{\alpha'_1} p(\xi') (\xi' - \xi'^3) \, d\xi' = p \frac{l^2 l'}{24} (\alpha'^2_1 - \alpha'^2_2) [2 - (\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2)] ,$$

$$E J_c \varphi_b = \frac{l^2 l'}{6} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(\xi) \, (\xi - \xi^3) \, d\xi = p \frac{l^2 l'}{24} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) [2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)] .$$

Ritter, M.: Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk. Berlin 1909. — Schadek u. Demel: Hilfsmittel zur Berechnung von Formänderungen. Berlin 1915. — Domke, O.: Dachbauten. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10. 2. Aufl. Berlin 1923. — Straßner, A.: Der durchlaufende Rahmen. Berlin 1925. — Pasternack, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter, biegefester Stab- und Flächentragwerke. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Heidinger, S.: Die Berechnung von $\int M \overline{M} \frac{dx}{EJ}$ für Stäbe mit veränderlichem Trägheitsmoment. Bauing. 1928. — Bühler, A.: Ziel, Ergebnisse und Wert der Messungen an Bauwerken. Bericht über die II. Int. Tagung für Brücken- und Hochbau S. 176. Wien 1929. — Kleinlogel, A.: Belastungsglieder. Berlin 1931.