



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

20. Die Biegelinie des geraden Stabes

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Funktionen ω_R und ω'_R sind symmetrisch zur Mitte, die Funktion ω'_D ist antisymmetrisch; ω_D und ω'_D , ω_M und ω'_M , ω_φ und ω'_φ , ω_P und ω'_P , ω_r und ω'_r sind einander spiegelbildlich gleich. Die Funktionswerte sind in den Tabellen 22, 23, S. 116, 117 und 121 enthalten.

Tabelle 23. Funktionswerte ω_r und ω'_r .

| ω_r | | | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 0,0 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0015 | 0,0024 | 0,0034 | 0,0046 | 0,0059 | 0,0074 | 0,0090 | 0,9 |
| 1 | 0090 | 0108 | 0127 | 0147 | 0169 | 0191 | 0215 | 0240 | 0266 | 0292 | 0320 | 8 |
| 2 | 0320 | 0348 | 0378 | 0407 | 0438 | 0469 | 0500 | 0532 | 0564 | 0597 | 0630 | 7 |
| 3 | 0630 | 0663 | 0696 | 0730 | 0763 | 0796 | 0829 | 0862 | 0895 | 0928 | 0960 | 6 |
| 4 | 0960 | 0992 | 1023 | 1054 | 1084 | 1114 | 1143 | 1171 | 1198 | 1225 | 1250 | 5 |
| 5 | 1250 | 1274 | 1298 | 1320 | 1341 | 1361 | 1380 | 1397 | 1413 | 1427 | 1440 | 4 |
| 6 | 1440 | 1451 | 1461 | 1469 | 1475 | 1479 | 1481 | 1481 | 1480 | 1476 | 1470 | 3 |
| 7 | 1470 | 1462 | 1451 | 1439 | 1424 | 1406 | 1386 | 1363 | 1338 | 1311 | 1280 | 2 |
| 8 | 1280 | 1247 | 1210 | 1171 | 1129 | 1084 | 1035 | 0984 | 0929 | 0871 | 0810 | 1 |
| 0,9 | 0,0810 | 0,0745 | 0,0677 | 0,0605 | 0,0530 | 0,0451 | 0,0369 | 0,0282 | 0,0192 | 0,0098 | 0,0000 | 0,0 |
| | | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | ξ |

ω'_r

20. Die Biegelinie des geraden Stabes.

Der Verschiebungszustand eines Stabes, dessen Querschnittsabmessungen gegenüber der Stablänge klein sind und dessen Oberfläche durch parallele Erzeugende gebildet wird, ist durch die elastische Bewegung der Querschnitte, also nach (42) durch deren Komponenten u_0, v_0, w_0 und ψ_x, ψ_y, ψ_z bestimmt. Sie beschreiben die elastische Linie des Stabes durch die Ausbiegung, die Krümmung und Windung der Achse.

Beziehung zwischen Kraftebene und Biegungsebene. Die Verdrillung ψ_x der Stabachse wird meist durch die Form des Querschnitts und durch die Eintragung der äußeren Kräfte vermieden. Die Spur s der Kraftebene verläuft dann durch den Querpunkt des Stabquerschnitts, der in der Regel mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, und schließt im allgemeinen mit der Hauptträgheitsachse z des Querschnitts einen Winkel (z, \hat{s}) ein. Zwei benachbarte Querschnitte neigen sich relativ zueinander um eine die Stabachse winkelrecht kreuzende Achse. Sie ist die Nulllinie n der Normalspannungen σ_x und damit der zu s zugeordnete Durchmesser der Trägheitsellipse, welcher mit der positiven Richtung der Hauptträgheitsachse z den Winkel (z, \hat{n}) bildet.

$$\operatorname{tg}(z, \hat{s}) \cdot \operatorname{tg}(z, \hat{n}) = -\frac{J_z}{J_y} \tag{192}$$

J_y und J_z sind die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts. Die Biegungsebene mit der elastischen Linie steht senkrecht zur Nulllinie.

In der Regel fällt die Spur s der Kraftebene mit einer Hauptträgheitsachse zusammen ($(z, \hat{s}) = 0$ oder 180°). Dann ist die Kraftebene gleichzeitig Ebene der Biegung.

Ableitung der Differentialgleichung aus den Schnittkräften. Die Annahme einer ebenen Verschiebung der Querschnitte schließt die Mitwirkung der Schubspannungen bei der Formänderung des Stabes aus. Die technische Theorie der Balkenbiegung ist daher nur brauchbar, wenn die Schubspannungen gegenüber den Normalspannungen so klein sind, daß die Annahme einer mittleren Gleitung $\gamma_{xy,0}$ und $\gamma_{xz,0}$ für alle infinitesimalen Prismen des Stabteils ds genügt.

Die beiden Querschnitte, welche einen infinitesimalen Stabteil ds begrenzen, sind beim geraden Stabe parallel, beim gekrümmten Stabe im Winkel $d\alpha$ geneigt. Decken sich die Spur s der Kraftebene und die Hauptträgheitsachse z , also auch

Kraftebene und Ebene der Biegung, so ist die relative Verschiebung $\varepsilon(z) ds$ zweier Punkte der beiden Querschnitte nach S. 28 durch die gegenseitige Verschiebung der benachbarten Schwerpunkte $\varepsilon_0 ds$ und die gegenseitige Neigung $d\psi_y$ bestimmt. Sie wird durch die inneren Kräfte σdF und eine Temperaturänderung hervorgerufen, die linear angenommen und durch die Änderung t im Schwerpunkt und den Temperaturabfall Δt zwischen den Randpunkten i und a beschrieben wird. $\Delta t = t_i - t_a$.

$$\varepsilon(z) ds = \left(\varepsilon_0 + \frac{d\psi_y}{ds} z \right) ds + \left(\alpha_i t + \frac{\alpha_i \Delta t}{h} z \right) ds. \quad (193)$$

Die Ausdrücke $d\psi_y/ds$ und $\alpha_i \Delta t/h$ sind die Anteile der Krümmung der elastischen Linie infolge der Normalspannungen σ_x und der Temperaturänderung Δt . Sie ist durch die Definition des positiv drehenden Biegemomentes M_y in bezug auf die Lage des Koordinatensystems Abb. 109 negativ. Wird mit φ der Winkel bezeichnet, welchen die Tangente an die Biegelinie mit der x -Achse einschließt, so bedeutet ein positives Biegemoment eine Abnahme von φ beim Fortschreiten in der

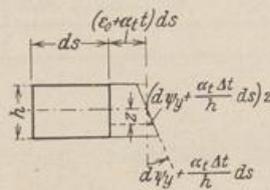


Abb. 108.

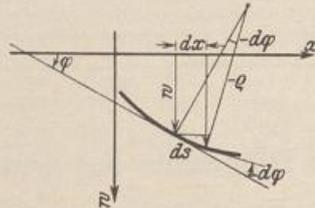


Abb. 109.

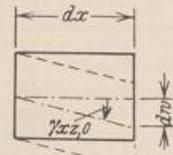


Abb. 110.

x -Richtung. Der Kontingenzwinkel $d\varphi$ ist daher negativ und mit Verwendung von (51)

$$\frac{d\psi_y}{ds} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_y}{E J_y} + \frac{\alpha_i \Delta t}{h}. \quad (194)$$

Für ds darf bei kleinen Ausbiegungen an Stelle des Bogenelements ds die Strecke dx gesetzt werden. Mit derselben Begründung wird in dem Ausdruck der Krümmung als Funktion von w die erste Ableitung vernachlässigt.

$$-\frac{1}{\rho} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{E J_y} + \frac{\alpha_i \Delta t}{h}. \quad (195)$$

Obwohl die Voraussetzungen des Ansatzes nur bei Stäben mit konstantem Querschnitt zutreffen, wird die Gleichung der Biegelinie nach (195) auch bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt angewendet, um eine einfache und für technische Bedürfnisse brauchbare Lösung zu erhalten. Nach Einführung eines Vergleichsträgheitsmomentes J_c ist

$$-E J_c \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{J_c}{J_y} M_y + E J_c \frac{\alpha_i \Delta t}{h}. \quad (196)$$

Da die Schubspannungen τ_{xz} bei einer ebenen Verschiebung des Querschnitts im Vergleich zu den Normalspannungen σ_x nur klein sein können, genügt die Abschätzung ihres Einflusses auf die Ausbiegung w durch eine mittlere Winkeländerung $\gamma_{xz,0}$. Die relative Verschiebung zweier benachbarter Querschnitte ist dann $dw = \gamma_{xz,0} dx$, so daß nach Abb. 110

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d\gamma_{xz,0}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha Q_z}{G F} \right).$$

Beide Anteile können als lineare Differentialbeziehungen addiert werden:

$$-\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{E J_y} + \frac{\alpha_i \Delta t}{h} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha Q_z}{G F} \right) = w. \quad (197)$$

In der Regel wird auf den aus den Schubspannungen herrührenden relativ kleinen Anteil der Ausbiegung w verzichtet.

Integration der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen Verschiebungszustand und Schnittkräften. Sie wird durch zweimalige Integration gelöst, wenn Biegemoment M und Querkraft Q als Funktionen von x bekannt sind. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 ergeben sich aus den Bedingungen für w und φ an den Stützpunkten oder Anschlußquerschnitten.

$$-\varphi = -\frac{dw}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx - \frac{\kappa Q}{GF} + \int \frac{\alpha_i \Delta t}{h} dx + C_1, \quad (198)$$

$$-w = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{\kappa Q}{GF} dx + \int dx \int \frac{\alpha_i \Delta t}{h} dx + C_1 x + C_2. \quad (199)$$

Die Aufteilung einer beliebigen Belastung nach $(P_1 \dots P_m \dots)$ führt zur Superposition $(M_1 \dots M_m \dots)$ und $(Q_1 \dots Q_m \dots)$, so daß der Verdrehungswinkel φ und die Ausbiegung w aus einzelnen Anteilen durch Superposition nach

$$\varphi = \varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + \dots + \varphi_m P_m + \dots, \quad w = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \dots + w_m P_m + \dots$$

entwickelt werden können.

Bei konstanter Querschnittsfläche treten die Steifigkeitsziffern EJ und GF vor das Integrationszeichen. Dann sind die Anteile des Verdrehungswinkels φ_0 und der Ausbiegung w_0 aus Querkraft und Temperaturveränderung in (198), (199)

$$\varphi_0 = \frac{\kappa Q}{GF} - \frac{\alpha_i \Delta t}{h} x, \quad w_0 = \frac{\kappa M}{GF} - \frac{\alpha_i \Delta t}{h} \frac{x^2}{2}. \quad (200)$$

Sie werden mit Rücksicht auf die Fehlerquellen des Ansatzes oft auch bei veränderlichem Querschnitt verwendet. Die Schubverteilungszahl κ ist durch die Form des Querschnitts bestimmt, für die Fläche F wird ein mittlerer Betrag verwendet.

Die Formänderung des geraden Stabes mit gleichförmig verteilter Belastung. Statisch bestimmte Stützung. $J = J_e$. Ansatz: $EJ w'' = -M(x)$



Randbedingungen der Formänderungen.
Abb. 111.

| | |
|--|--|
| $M = -\frac{p x^2}{2},$ $-EJ w'' = -\frac{p l^2}{2} \xi^2,$ $w = \frac{p l^4}{24 EJ} (3 - 4 \xi + \xi^4),$ $w' = \varphi = -\frac{p l^3}{6 EJ} (1 - \xi^3),$ | $M = \frac{p x (l-x)}{2},$ $-EJ w'' = \frac{p l^2}{2} \xi (1 - \xi),$ $w = \frac{p l^4}{24 EJ} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4),$ $w' = \varphi = \frac{p l^3}{24 EJ} (1 - 6 \xi^2 + 4 \xi^3).$ |
|--|--|

Rechnerische und zeichnerische Entwicklung der Biegelinie. Der Kontingenzwinkel der Biegelinie ist nach S. 122 $-d\varphi = w dx = +d\psi$, so daß die Differentialgleichung (197) in der folgenden Weise gelöst werden kann:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -w = -\frac{d\psi}{dx}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi = -\psi + C_1; \quad w = -\int \psi dx + C_1 x + C_2. \quad (201a)$$

An einer beliebigen Stelle $x = x_k$ der Biegelinie ist

$$w = w_k, \quad \psi = \int_{x_a}^{x_k} w dx = \psi_k, \quad \varphi_k = -\psi_k + C_1, \quad (201b)$$

am Randpunkt $x = x_a$ (Abb. 112) ist $w = w_a$, $\varphi = \varphi_a$, $\psi = \psi_a = 0$. Daher wird

$$C_1 = \varphi_a, \quad C_2 = w_a - x_a \varphi_a, \quad w_k = w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} \psi dx.$$

Die partielle Integration der Lösung liefert

$$\begin{aligned} w_k &= w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - x_k \int_{x_a}^{x_k} d\psi + \int_{x_a}^{x_k} x d\psi \\ &= w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) d\psi. \end{aligned} \quad (201c)$$

Wird $k \rightarrow b$ und $(w_b - w_a)$ Null oder zunächst Null gesetzt, so ist mit

$$\left. \begin{aligned} d\psi &= w dx \quad \text{und} \quad x_b - x_a = l \\ \varphi_a = \varphi_{a,0} &= \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) w dx = A_w, \quad \varphi_k = \varphi_{k,0} = A_w - \int_{x_a}^{x_k} w dx = Q_{w,k}, \\ w_k - w_a &= w_{k,0} = A_w(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) w dx = M_{w,k}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Erhält demnach der Ausdruck $w(x)$ die Bedeutung einer ideellen, von den elastischen Eigenschaften des Stabes abhängigen Streckenlast, so kann für $w_b - w_a = 0$ die Verdrehung φ_a des Endquerschnitts a des Stabes als Stützkraft A_w eines Trägers l auf frei drehbaren Stützen, die Verdrehung φ_k eines Querschnitts k als dessen Querkraft $Q_{w,k}$, die Ausbiegung w_k eines Punktes k der Achse als Biegemoment $M_{w,k}$ des Stabes infolge der ideellen Belastung $w(x)$ berechnet werden. Hierfür stehen die zeichnerischen oder rechnerischen Methoden des Abschn. 13 zur Verfügung.

Diese Rechenvorschrift ergibt sich auch unmittelbar durch Vergleich der Differentialgleichung der Biegelinie mit derjenigen für das Biegemoment M eines Stabes als Funktion der Streckenlast $p(x)$ (48).

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -w(x), \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x). \quad (203)$$

Aus (201) wird mit dem Ausdruck $w(x)$ nach (197)

$$E J_c \varphi_k = E J_c \varphi_a - \int_{x_a}^{x_k} M \frac{J_c}{J} dx + \kappa \frac{E J_c}{G F_c} \left(Q_k \frac{F_c}{F_k} - Q_a \frac{F_c}{F_a} \right) - E J_c \int_{x_a}^{x_k} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx, \quad (204a)$$

$$\begin{aligned} E J_c w_k &= E J_c w_a + E J_c \varphi_a (x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) M \frac{J_c}{J} dx + \frac{E J_c}{G F_c} \int_{x_a}^{x_k} \kappa Q \frac{F_c}{F} dx \\ &\quad - E J_c \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx. \end{aligned} \quad (204b)$$

Werden die Verdrehung und die Verschiebung der Querschnitte k bei $w_b = w_a = 0$ mit $\varphi_{k,0}$, $w_{k,0}$ bezeichnet (Abb. 112), so ist mit

$$\begin{aligned} l &= x_b - x_a, \quad \xi = \frac{x_k - x_a}{l}, \quad \xi' = \frac{l - (x_k - x_a)}{l}, \\ \varphi_k &= \frac{w_b - w_a}{l} + \varphi_{k,0}, \quad w_k = w_b \xi + w_a \xi' + w_{k,0}. \end{aligned} \quad (205)$$

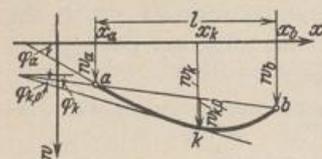


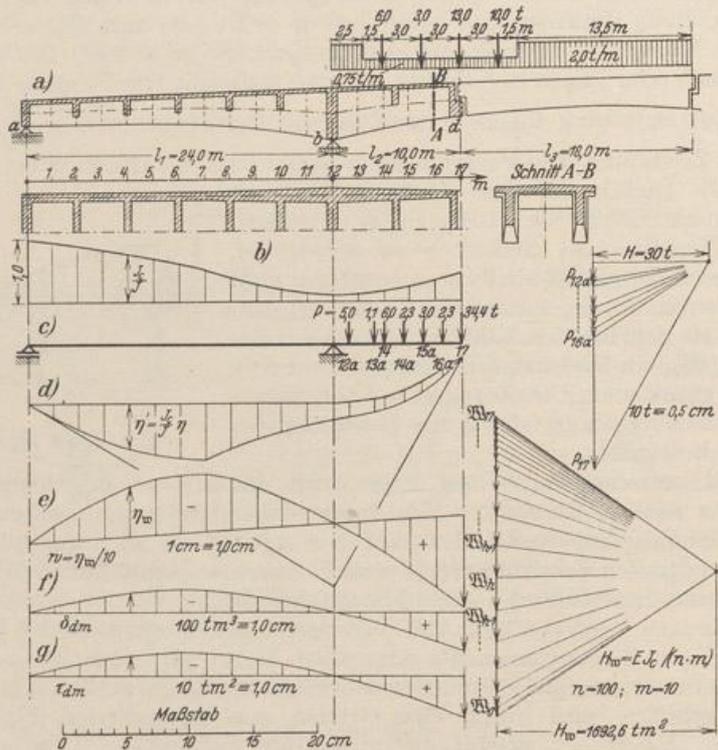
Abb. 112.

Damit ist die Grundlage gefunden, um die Form der Biegelinie mit $w_a = 0, w_b = 0$ durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Die Strecke ab wird als einfacher Träger angesehen, an dem eine Gruppe von positiven oder negativen Kräften $\mathfrak{B}_0 \dots \mathfrak{B}_m \dots \mathfrak{B}_n$ angreift. Die Rechnung liefert nach (202)

$$A_w = \varphi_{a,0}, \quad B_w = \varphi_{b,0}, \quad Q_{w,k} = \varphi_{k,0}, \quad M_{w,k} = w_{k,0}.$$

Der wirkliche Verschiebungszustand $\varphi_a, \varphi_b, w_k$ entsteht durch Berücksichtigung der Stützenbedingungen nach (205).

Untersuchung der Formänderung eines Auslegeträgers.



Die Einflußlinien f) und g) sind im Bereich des Schleppträgers gerade Linien.

Abb. 114.

1. Zeichnerische Entwicklung der Biegelinie für eine vorgeschriebene Belastung (Abb. 114a):

Querschnittsgestaltung: J_c/J (Abb. 114b), $J_c = J_a = 0,806\text{ m}^4$.

Angabe der Momente: graphisch oder rechnerisch nach Abschn. 13.

Reduzierte Ordinaten des Seilecks: $\eta' = \eta \cdot J_c/J$ (Abb. 114d).

Reduzierte Momente: $M' = M \cdot J_c/J = \eta' \cdot H = w_m$.

Berechnung der EJ_c -fachen elastischen Gewichte aus der ideellen Belastung M' nach (206):

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c_1}{6} (2w_0 + w_1), \quad \mathfrak{B}_n = \frac{c_n}{6} (w_{n-1} + 2w_n),$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{c_m}{6} (w_{m-1} + 4w_m + w_{m+1}).$$

Abbildung der elastischen Gewichte mit Hilfe der Werte $\sum_0^m \mathfrak{B}_k$ in einem Richtungsbüschel mit der Polweite H_w .

| m | c _m | M _m | J _c /J _m | w _m = M _m J _c /J _m | 10 _{m-1} | c _m /6 | 2 10 _m | c _{m+1} /6 | W _{m,1} | W _{m,2} | W _m | Σ ₀ ^m W _n |
|-----|----------------|----------------|--------------------------------|--|---------------------|---------------------|---|---------------------|-------------------|------------------|----------------|--|
| | | | | | + 2 10 _m | + 10 _{m+1} | 10 _{m-1} + 4 10 _m + 10 _{m+1} | | c _m /6 | | | |
| 0 | — | 0,0 | 1,000 | 0,0 | — | — | 33,9 | 0,333 | — | 11,3 | 11,3 | 11,3 |
| 1 | 2,00 | 35,9 | 0,945 | 33,9 | 198,5 | | | 0,333 | | 66,2 | 77,5 | |
| 2 | 2,00 | 71,8 | 0,876 | 62,9 | 374,2 | | | 0,333 | | 124,7 | 202,2 | |
| 3 | 2,00 | 107,6 | 0,824 | 88,7 | 526,9 | | | 0,333 | | 175,6 | 377,8 | |
| 4 | 2,00 | 143,5 | 0,761 | 109,2 | 648,7 | | | 0,333 | | 216,2 | 594,0 | |
| 5 | 2,00 | 179,4 | 0,687 | 123,2 | 733,8 | | | 0,333 | | 244,6 | 838,6 | |
| 6 | 2,00 | 215,3 | 0,612 | 131,8 | 783,2 | | | 0,333 | | 261,0 | 1099,6 | |
| 7 | 2,00 | 251,1 | 0,529 | 132,8 | 774,6 | | | 0,333 | | 258,2 | 1357,8 | |
| 8 | 2,00 | 287,0 | 0,389 | 111,6 | 669,3 | | | 0,333 | | 223,1 | 1580,9 | |
| 9 | 2,00 | 322,9 | 0,279 | 90,1 | 541,2 | | | 0,333 | | 180,4 | 1761,3 | |
| 10 | 2,00 | 358,8 | 0,193 | 69,2 | 419,0 | | | 0,333 | | 139,7 | 1901,0 | |
| 11 | 2,00 | 394,7 | 0,132 | 52,1 | 314,2 | | | 0,333 | | 104,7 | 2005,7 | |
| 12 | 2,00 | 430,5 | 0,085 | 36,6 | 125,3 | 0,333 | 110,7 | 0,208 | 41,8 | 23,1 | 64,9 | 2070,6 |
| 12a | 1,25 | 364,5 | 0,103 | 37,5 | 224,5 | | | | 0,208 | 46,8 | 2117,4 | |
| 13 | 1,25 | 300,8 | 0,126 | 37,9 | 113,3 | 0,208 | 113,1 | 0,250 | 23,6 | 28,3 | 51,9 | 2169,3 |
| 14 | 1,50 | 229,0 | 0,163 | 37,3 | 221,8 | | | | 0,250 | 55,5 | 2224,8 | |
| 14a | 1,50 | 166,9 | 0,208 | 34,7 | 205,4 | | | | 0,250 | 51,4 | 2276,2 | |
| 15a | 1,50 | 106,6 | 0,275 | 29,3 | 170,3 | | | | 0,250 | 42,6 | 2318,8 | |
| 16a | 1,50 | 52,5 | 0,351 | 18,4 | 102,9 | | | | 0,250 | 25,7 | 2344,5 | |
| 17 | 1,50 | 0,0 | 0,463 | 0,0 | 18,4 | 0,250 | — | — | 4,6 | — | 4,6 | 2349,1 |

Mit $H_w = EJ_c/(n \cdot m)$ ergeben nach S. 125 die Ordinaten η_w des Seileckes unmittelbar die m -fach verzerrten Durchbiegungen w (Abb. 114e).

$$E = 2100000 \text{ t/m}^2; \quad EJ_c = 1692600 \text{ tm}^2;$$

$$n = 100; \quad m = 10; \quad H_w = 1692,6 \text{ tm}^2;$$

Durchbiegungen $w = \eta_w/10$ in mm:

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12a | 13a | 14 | 14a | 15a | 16a | 17 |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| w | 0,0 | -1,2 | -2,2 | -3,2 | -3,9 | -4,3 | -4,5 | -4,4 | -3,9 | -3,2 | -2,3 | -1,2 | 0,0 | 0,8 | 1,6 | 2,7 | 3,8 | 4,9 | 6,1 | 7,3 |

2. Einflußlinie der EJ_c -fachen Durchbiegung δ_m des Querschnittes d . Biegelinie des Trägers unter der Last 1 t in d nach (168). Ermittlung der W -Gewichte wie unter 1. Berechnung von A_w , D_w , $\delta_{m,1}$ unabhängig von der vorgeschriebenen Stützung des Trägers als Auflagerkräfte und Durchbiegungen eines Balkens auf den Stützen a und d . Nachträgliche Einführung der Stützenbedingung $\delta_b = 0$ durch Drehen der Achse um α :

$$\delta_b = \delta_{b,1} + \delta_{b,2} = \delta_{b,1} + \vartheta \cdot l_1 = 0; \quad \vartheta = -\delta_{b,1}/l_1; \quad \delta_{m,2} = -\vartheta \cdot x = -\delta_{b,1} \cdot \xi;$$

$$\delta_m = \delta_{m,1} + \delta_{m,2}; \quad \xi = x/l_1; \quad \zeta = x/(l_1 + l_2);$$

| m | ζ_m | ξ_m | $-M_m$ | J _c /J _m | $-w_m = -M_m J_c/J_m$ | $-W_m$ | ζ_m | ζ'_m | $-W_m \zeta_m$ | $-W_m \zeta'_m$ |
|---|-----------|---------|---------|--------------------------------|-----------------------|-----------|-----------|------------|----------------|-----------------|
| 0 | 0,0 | 0,0 | 0,00000 | 1,0000 | 0,00000 | (0,26247) | 0,00000 | 1,00000 | — | — |
| 1 | 1/17 | 1/12 | 0,83333 | 0,9449 | 0,78741 | 1,53660 | 0,05882 | 0,94118 | 0,09038 | 1,44622 |
| 2 | 2/17 | 2/12 | 1,66667 | 0,8761 | 1,46017 | 2,89611 | 0,11765 | 0,88235 | 0,34073 | 2,55538 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |

| m | $-Q_{wm}$ | $-Q_{wm} c_m$ | $-\delta_{m,1} = -M_{wm,1}$ | $-\delta_{m,2} = +\delta_{b,1} \cdot \xi$ | $-\delta_m$ |
|---|-----------|---------------|-----------------------------|---|-------------|
| 0 | 0,00000 | 0,00000 | 0,0000 | -0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 31,17220 | 62,34440 | 62,3444 | -17,1615 | 45,1829 |
| 2 | 29,63560 | 59,27120 | 121,6156 | -34,3231 | 87,2925 |
| . | . | . | . | . | . |

$$D_{w,1} - W_{17} = \sum_0^{16} W_m \zeta_m$$

$$= -23,73446,$$

$$A_{w,1} - W_0 = \sum_1^{17} W_m \zeta'_m$$

$$= -31,17220,$$

$$-\delta_{b,1} = 205,9384 \text{ tm}^3,$$

δ_m : Abb. 114 f.

3. Einflußlinie der EJ_c fachen Verdrehung τ_m des Querschnittes d . Biegelinie des Trägers unter dem Angriff des Momentes $M_d = 1,0$ mt. Ermittlung der Gewichte wie unter 1. Die Verdrehungen φ_a, φ_b der Querschnitte a und b werden im Gegensatz zu 2. unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Stützenbedingungen berechnet.

$$A_{w,0} - \mathfrak{B}_0 = \sum_1^{12} \mathfrak{B}_m \xi_m = -2,25914 \text{ tm}^3. \quad Q_{w,12} = \sum_0^{11} \mathfrak{B}_m \xi'_m = -2,37209 \text{ tm}^3;$$

| m | ξ_m | $-M_m$ | J_c/J_m | $-w_m$ | $-\mathfrak{B}_m$ | ξ_m | ξ'_m | $-\mathfrak{B}_m \xi_m$ | $-\mathfrak{B}_m \xi'_m$ | $-Q_{w,m}$ | $-Q_{w,m} c_m$ | $-\delta_m$ |
|-----|---------|---------|-----------|---------|-------------------|---------|----------|-------------------------|--------------------------|------------|----------------|-------------|
| 0 | 0 | 0,00000 | 1,0000 | 0,00000 | (0,02625) | 0,00000 | 1,00000 | — | — | 0,00000 | 0,00000 | 0,0000 |
| 1 | 1/12 | 0,08333 | 0,9449 | 0,07874 | 0,15366 | 0,08333 | 0,91667 | 0,01280 | 0,14086 | 2,25914 | 4,51829 | 4,5183 |
| 2 | 2/12 | 0,16667 | 0,8761 | 0,14602 | 0,28961 | 0,16667 | 0,83333 | 0,04827 | 0,24134 | 2,10548 | 4,21097 | 8,7293 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |

$$EJ_c \text{ fache Verdrehung } \tau_m = \frac{\delta_m (\text{tm}^3)}{1,0 (\text{m})} : \text{Abb. 114g.}$$

Ableitung der Biegelinie aus der Belastung. Die Biegelinie des geraden Stabes ist bisher aus den Schnittkräften M, Q entwickelt worden, die oft jedoch selbst nicht bekannt sind, sondern nur als Differentialbeziehung verwendet werden können.

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p(x).$$

Mit diesen lautet dann die Gleichung (197) der Biegelinie für $\Delta t = 0$ ohne Berücksichtigung der Querkraft:

$$\frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} = -M, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} \right) = -Q, \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} \right) = p(x), \quad (208)$$

$$\text{für } J = J_c = \text{const} \quad EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q, \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x). \quad (209)$$

Damit ist eine Differentialbeziehung zwischen Belastungsfunktion und Ausbiegung entstanden, deren Lösung für jeden stetigen Bereich getrennt mit vier Konstanten angeschrieben wird. Diese sind durch Bedingungen für die Formänderung und für die Schnittkräfte an den Stützen, den Stabenden und an den Unstetigkeitsstellen bestimmt.

Die Formänderung des geraden Stabes mit statisch unbestimmter Stützung.
a) Gleichförmige Belastung $p, J = J_c$. Ansatz $EJ w^{(IV)} = p$.



Abb. 115.

$$w = \frac{p l^4}{48 EJ} (\xi - 3\xi^3 + 2\xi^4),$$

$$w' = \varphi = \frac{p l^3}{48 EJ} (1 - 9\xi^2 + 8\xi^3),$$

$$-EJw'' = M = \frac{p l^2}{8} (-4\xi^2 + 3\xi),$$

$$-EJw''' = Q = \frac{p l}{8} (-8\xi + 3),$$

$$w = \frac{p l^4}{24 EJ} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4),$$

$$w' = \varphi = \frac{p l^3}{12 EJ} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3),$$

$$-EJw'' = M = \frac{p l^2}{12} (6\xi - 6\xi^2 - 1),$$

$$-EJw''' = Q = \frac{p l}{2} (1 - 2\xi).$$

b) Unstetige Belastung durch eine Einzellast P . Der Angriffspunkt C der Last P teilt den Integrationsbereich in die Abschnitte a und b mit w_1 und w_2 . Für beide ist $EJ w^{(IV)} = 0$. Die 8 Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen in A, B und C bestimmt. w und w' sind an den Stützpunkten Null, Auslenkung w und Biegemoment M an der Unstetigkeits-

stelle C stetig und die Differenz der beiden Querkräfte Q_c gleich der Last P (Abb. 116).

$$x_1 = 0: w_1 = 0, w_1' = 0; \quad x_2 = l: w_2 = 0, w_2' = 0;$$

$$x_1 = a \text{ und } x_2 = b: w_1 = w_2, w_1' = -w_2', w_1'' = w_2'', w_1''' - w_2''' = -\frac{P}{EJ}.$$

$$c_1 = \left(1 - 2\left(\frac{a}{l}\right) + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right),$$

$$c_3 = \left(1 - 2\left(\frac{b}{l}\right) + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right),$$

$$c_2 = \left(1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{l}\right)^3\right),$$

$$c_4 = \left(1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{l}\right)^3\right),$$

$$EJ w_1 = \frac{P a^3}{6} \left\{ 3 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_2 = \frac{P b^3}{6} \left\{ 3 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_1' = \frac{P a^2}{2} \left\{ 2 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \right\},$$

$$EJ w_2' = \frac{P b^2}{2} \left\{ 2 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \right\},$$

$$-EJ w_1'' = M_1 = P a \left\{ c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_1 \right\},$$

$$-EJ w_2'' = M_2 = P b \left\{ c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_3 \right\},$$

$$-EJ w_1''' = Q_1 = P c_2, \quad -EJ w_2''' = Q_2 = P c_4.$$

Bereich a : $\varphi = w_1', \quad Q = Q_1$;

Bereich b : $\varphi = -w_2', \quad Q = -Q_2$.

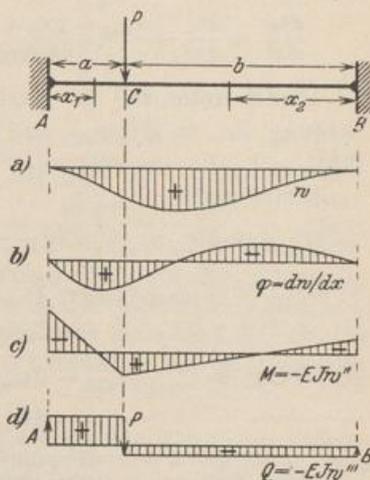


Abb. 116.

Lösung der Differentialgleichung mit Differenzen. Da ein geschlossenes Integral der Differentialgleichung in der Regel nicht angegeben werden kann, wird in diesem und ähnlichen Fällen eine Näherung verwendet, um die Funktionswerte w_m einer regelmäßigen Punktfolge $\dots (m-1), m, \dots$ des Integrationsbereiches l zu berechnen. An die Stelle der stetigen Integralkurve tritt damit ein der Kurve einbeschriebenes Vieleck. Die Differentialquotienten der stetigen Funktion werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Die Differentialgleichung wird zur Differenzengleichung, deren Randbedingungen in bezug auf Richtung und Krümmung der elastischen Linie ebenfalls durch Differenzen ausgedrückt werden.

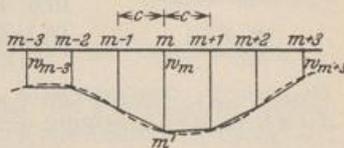


Abb. 117.

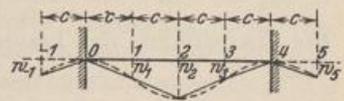


Abb. 118.

Der Integrationsbereich l der Funktion wird durch die regelmäßige Punktfolge $\dots (m-1), m, \dots$ in n gleiche Strecken geteilt. Der Teilpunkt m erhält die Abszisse $m \cdot \Delta x$ und die Ordinate $\overline{m m'} = w_m$. Wird die Integralkurve im Bereich von $(m-1), m, (m+1)$ angenähert durch einen Parabelabschnitt durch die Punkte $(m-1)', m', (m+1)'$ ersetzt, so ist im Punkte m

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \Delta x}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{m-1} - 2 w_m + w_{m+1}}{\Delta x^2}. \quad (210)$$

Die Richtung der Kurve in m' , bestimmt durch dw/dx , wird damit angenähert durch die Richtung $(m-1)', (m+1)'$ der Sehne beschrieben. Der zweite Differentialquotient kann bei flachen Kurven aus dem Kontingenzwinkel der Kurve in m'

abgeleitet und angenähert durch den Unterschied der Richtungen der dem Punkte m benachbarten Sehnen ausgedrückt werden. Die gleichen Beziehungen gelten auch bei einer Funktion $d^2w/dx^2 = r$ für $d^3w/dx^3 = dr/dx$ und $d^4w/dx^4 = d^2r/dx^2$, so daß zur Beschreibung der geometrischen Eigenschaften der Funktion w in der Umgebung des Punktes m folgende Übergänge vollzogen werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &\rightarrow \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2\Delta x}, & \frac{d^2w}{dx^2} &\rightarrow \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= \frac{dr}{dx} \rightarrow \frac{r_{m+1} - r_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2\Delta x^3}, \\ \frac{d^4w}{dx^4} &= \frac{d^2r}{dx^2} \rightarrow \frac{r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}}{\Delta x^2} = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta x^4} \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Damit treten mit der Bezeichnung w_m für den EJ_c -fachen Betrag der Durchbiegung ($w_m \equiv EJ_c w_m$) und mit $\bar{\zeta}_m$ für den reziproken Wert der Funktion ζ ($\bar{\zeta}_m = J_m/J_c$) die folgenden Differenzenbeziehungen an die Stelle der Differentialbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} -M_m \Delta x^2 &= \bar{\zeta}_m (w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}), \\ -2Q_m \Delta x^3 &= \bar{\zeta}_{m+1} w_{m+2} - 2\bar{\zeta}_{m+1} w_{m+1} + (\bar{\zeta}_{m+1} - \bar{\zeta}_{m-1}) w_m + 2\bar{\zeta}_{m-1} w_{m-1} \\ &\quad - \bar{\zeta}_{m-1} w_{m-2}, \\ p_m(x) \Delta x^4 &= \bar{\zeta}_{m+1} w_{m+2} - 2w_{m+1} (\bar{\zeta}_{m+1} + \bar{\zeta}_m) + w_m (\bar{\zeta}_{m+1} + 4\bar{\zeta}_m + \bar{\zeta}_{m-1}) \\ &\quad - 2w_{m-1} (\bar{\zeta}_m + \bar{\zeta}_{m-1}) + w_{m-2} \bar{\zeta}_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

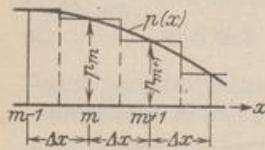


Abb. 110.

Biegemoment M_m und Querkraft Q_m sind daher aus den Durchbiegungen w_m einer ausgezeichneten Punktfolge m bestimmt. p_m ist die Ordinate der Belastungsfunktion im Punkt m . An die Stelle der stetigen Funktion $p(x)$ tritt die unstetige Belastung nach einer Stufenlinie, die durch eine in den Intervallgrenzen angreifende Gruppe von Einzellasten ($p\Delta x^3$) Δx ersetzt wird (Abb. 110).

Die Randbedingungen $w = 0$ und $M = 0$ bedürfen keiner Diskussion, dagegen wird die Integralkurve zur Einführung der Randbedingung dw/dx in der Umgebung des Punktes 0 durch eine kubische Parabel ersetzt:

$$w_{m+1} = w_m + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{dw}{dx} \right)_m + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_m + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_m \quad (213)$$

Bei Einspannung des Trägers im Querschnitt $m = 0$ ist $w_m = 0$ und $dw/dx_m = 0$, daher

$$w_1 = \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_0 + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_0.$$

Für die kubische Parabel gilt

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_0 = \frac{w_1 - 2w_0 + w_{-1}}{\Delta x^2}, \quad \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_0 = \text{const} = \frac{w_2 - 3w_1 + 3w_0 - w_{-1}}{\Delta x^3}, \quad (214)$$

so daß als Bedingung für die Einspannung des Trägers im Querschnitt $m = 0$ die folgende Beziehung entsteht:

$$w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \quad (215)$$

Die Rechenvorschrift wird an dem beiderseits eingespannten, gleichförmig belasteten Träger mit $\zeta = 1$ erläutert, um die Genauigkeit der Ergebnisse zu prüfen. Dabei wird der Integrationsbereich l durch die Punktreihe 0, 1, 2, 3, 4 in 4 Strecken Δx geteilt. Infolge

Symmetrie ist $w_1 = w_3$, so daß die Differenzgleichungen nur für die Punkte 1 und 2 aufgestellt werden (Abb. 118).

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3,$$

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4.$$

Hierzu treten die Randbedingungen $w_0 = 0$, $w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$. Die Verschiebungen w_1 und w_2 ergeben sich daher aus den folgenden beiden Gleichungen.

$$10w_1 - 4,5w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4, \quad -8w_1 + 6w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4$$

mit

$$w_1 = 0,00171 \frac{p l^4}{EJ}, \quad w_2 = 0,00293 \frac{p l^4}{EJ}.$$

Die Momente werden mit w_1 und w_2 nach (212) berechnet.

$$\text{Trägermitte: } M_2 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_1 - 2w_2 + w_3) = \frac{15}{16} \frac{p l^2}{24} \approx \frac{p l^2}{24}. \quad (216)$$

$$\text{Auflager: } M_0 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_{-1} - 2w_0 + w_1) = -\frac{33}{32} \frac{p l^2}{12} \approx -\frac{p l^2}{12}. \quad (217)$$

Die Näherungsrechnung führt also trotz der geringen Anzahl der Intervalle auch für die Schnittkräfte zu relativ guten Ergebnissen, da die Unterschiede zwischen den Differential- und Differenzenquotienten selbst dann noch klein sind. Die Untersuchung muß nur im Bereiche von singulären Stellen der Funktion mit einer engeren Teilung wiederholt werden.

Ritter, A.: Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Zürich 1883. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Hencky, H.: Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 58. — Marcus, H.: Armierter Beton 1919 S. 107; außerdem: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924. — Runge, C., u. H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925.

21. Die Biegelinie von gekrümmten Stäben und Stabzügen.

Die ebene Verschiebung eines Querschnitts wird auch bei gekrümmten Stäben als brauchbare Annahme verwendet, wenn eine Symmetrieebene vorhanden ist, die mit der Kräfteebene zusammenfällt. Sie wird dann ebenso wie beim geraden Stabe durch die bezogene Längenänderung ϵ_0 der Stabachse und durch die gegenseitige Verdrehung $d\psi$ zweier benachbarter Querschnitte beschrieben. Die Veränderlichkeit von ds mit z schließt hier zwar die lineare Abhängigkeit der Normalspannungen $\sigma_x(z)$ aus. Die Spannungen σ , τ und die Verzerrungskomponenten ϵ_0 , $d\psi$ sind aber nach (70), (71) trotzdem wieder Funktionen der Schnittkräfte N , M , Q und der Temperaturänderung t , $\Delta t = t_i - t_a$.

Ableitung der Differentialgleichung. Während sich die Querschnitte gerader Stäbe durch die Belastung mit großer Genauigkeit winkelrecht zur Stabachse bewegen, sind zur Beschreibung der Verschiebung der Querschnitte gekrümmter Stäbe zwei Komponenten u , w notwendig. Sie werden hier im Gegensatz zu der früheren Definition waagrecht und senkrecht angenommen, um das für die geometrische Darstellung von Stabzügen übliche Koordinatensystem (Abb. 120) beizubehalten. In diesem Fall ist

$$dy = ds \sin \alpha, \quad dx = ds \cos \alpha. \quad (218a)$$

Diese geometrischen Beziehungen ändern sich durch die Belastung des Stabes.

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad x \rightarrow x + \delta x, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha, \quad ds \rightarrow ds + \delta(ds).$$