



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Rechnerische und zeichnerische Entwicklung der Biegelinie

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Integration der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen Verschiebungszustand und Schnittkräften. Sie wird durch zweimalige Integration gelöst, wenn Biegemoment M und Querkraft Q als Funktionen von x bekannt sind. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 ergeben sich aus den Bedingungen für w und φ an den Stützpunkten oder Anschlußquerschnitten.

$$-\varphi = -\frac{dw}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx - \frac{\kappa Q}{GF} + \int \frac{\alpha_i \Delta t}{h} dx + C_1, \quad (198)$$

$$-w = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{\kappa Q}{GF} dx + \int dx \int \frac{\alpha_i \Delta t}{h} dx + C_1 x + C_2. \quad (199)$$

Die Aufteilung einer beliebigen Belastung nach $(P_1 \dots P_m \dots)$ führt zur Superposition $(M_1 \dots M_m \dots)$ und $(Q_1 \dots Q_m \dots)$, so daß der Verdrehungswinkel φ und die Ausbiegung w aus einzelnen Anteilen durch Superposition nach

$$\varphi = \varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + \dots + \varphi_m P_m + \dots, \quad w = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \dots + w_m P_m + \dots$$

entwickelt werden können.

Bei konstanter Querschnittsfläche treten die Steifigkeitsziffern EJ und GF vor das Integrationszeichen. Dann sind die Anteile des Verdrehungswinkels φ_0 und der Ausbiegung w_0 aus Querkraft und Temperaturveränderung in (198), (199)

$$\varphi_0 = \frac{\kappa Q}{GF} - \frac{\alpha_i \Delta t}{h} x, \quad w_0 = \frac{\kappa M}{GF} - \frac{\alpha_i \Delta t}{h} \frac{x^2}{2}. \quad (200)$$

Sie werden mit Rücksicht auf die Fehlerquellen des Ansatzes oft auch bei veränderlichem Querschnitt verwendet. Die Schubverteilungszahl κ ist durch die Form des Querschnitts bestimmt, für die Fläche F wird ein mittlerer Betrag verwendet.

Die Formänderung des geraden Stabes mit gleichförmig verteilter Belastung. Statisch bestimmte Stützung. $J = J_e$. Ansatz: $EJw'' = -M(x)$



Randbedingungen der Formänderungen.
Abb. 111.

$M = -\frac{p x^2}{2},$ $-EJw'' = -\frac{p l^2}{2} \xi^2,$ $w = \frac{p l^4}{24 EJ} (3 - 4\xi + \xi^4),$ $w' = \varphi = -\frac{p l^3}{6 EJ} (1 - \xi^3),$	$M = \frac{p x (l-x)}{2},$ $-EJw'' = \frac{p l^2}{2} \xi (1 - \xi),$ $w = \frac{p l^4}{24 EJ} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4),$ $w' = \varphi = \frac{p l^3}{24 EJ} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3).$
--	--

Rechnerische und zeichnerische Entwicklung der Biegelinie. Der Kontingenzwinkel der Biegelinie ist nach S. 122 $-d\varphi = w dx = +d\psi$, so daß die Differentialgleichung (197) in der folgenden Weise gelöst werden kann:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -w = -\frac{d\psi}{dx}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi = -\psi + C_1; \quad w = -\int \psi dx + C_1 x + C_2. \quad (201a)$$

An einer beliebigen Stelle $x = x_k$ der Biegelinie ist

$$w = w_k, \quad \psi = \int_{x_a}^{x_k} w dx = \psi_k, \quad \varphi_k = -\psi_k + C_1, \quad (201b)$$

am Randpunkt $x = x_a$ (Abb. 112) ist $w = w_a$, $\varphi = \varphi_a$, $\psi = \psi_a = 0$. Daher wird

$$C_1 = \varphi_a, \quad C_2 = w_a - x_a \varphi_a, \quad w_k = w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} \psi dx.$$

Die partielle Integration der Lösung liefert

$$\begin{aligned} w_k &= w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - x_k \int_{x_a}^{x_k} d\psi + \int_{x_a}^{x_k} x d\psi \\ &= w_a + \varphi_a(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) d\psi. \end{aligned} \quad (201c)$$

Wird $k \rightarrow b$ und $(w_b - w_a)$ Null oder zunächst Null gesetzt, so ist mit

$$\left. \begin{aligned} d\psi &= w dx \quad \text{und} \quad x_b - x_a = l \\ \varphi_a = \varphi_{a,0} &= \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) w dx = A_w, \quad \varphi_k = \varphi_{k,0} = A_w - \int_{x_a}^{x_k} w dx = Q_{w,k}, \\ w_k - w_a &= w_{k,0} = A_w(x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) w dx = M_{w,k}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Erhält demnach der Ausdruck $w(x)$ die Bedeutung einer ideellen, von den elastischen Eigenschaften des Stabes abhängigen Streckenlast, so kann für $w_b - w_a = 0$ die Verdrehung φ_a des Endquerschnitts a des Stabes als Stützkraft A_w eines Trägers l auf frei drehbaren Stützen, die Verdrehung φ_k eines Querschnitts k als dessen Querkraft $Q_{w,k}$, die Ausbiegung w_k eines Punktes k der Achse als Biegemoment $M_{w,k}$ des Stabes infolge der ideellen Belastung $w(x)$ berechnet werden. Hierfür stehen die zeichnerischen oder rechnerischen Methoden des Abschn. 13 zur Verfügung.

Diese Rechenvorschrift ergibt sich auch unmittelbar durch Vergleich der Differentialgleichung der Biegelinie mit derjenigen für das Biegemoment M eines Stabes als Funktion der Streckenlast $p(x)$ (48).

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -w(x), \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x). \quad (203)$$

Aus (201) wird mit dem Ausdruck $w(x)$ nach (197)

$$E J_c \varphi_k = E J_c \varphi_a - \int_{x_a}^{x_k} M \frac{J_c}{J} dx + \kappa \frac{E J_c}{G F_c} \left(Q_k \frac{F_c}{F_k} - Q_a \frac{F_c}{F_a} \right) - E J_c \int_{x_a}^{x_k} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx, \quad (204a)$$

$$\begin{aligned} E J_c w_k &= E J_c w_a + E J_c \varphi_a (x_k - x_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) M \frac{J_c}{J} dx + \frac{E J_c}{G F_c} \int_{x_a}^{x_k} \kappa Q \frac{F_c}{F} dx \\ &\quad - E J_c \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx. \end{aligned} \quad (204b)$$

Werden die Verdrehung und die Verschiebung der Querschnitte k bei $w_b = w_a = 0$ mit $\varphi_{k,0}$, $w_{k,0}$ bezeichnet (Abb. 112), so ist mit

$$\begin{aligned} l &= x_b - x_a, \quad \xi = \frac{x_k - x_a}{l}, \quad \xi' = \frac{l - (x_k - x_a)}{l}, \\ \varphi_k &= \frac{w_b - w_a}{l} + \varphi_{k,0}, \quad w_k = w_b \xi + w_a \xi' + w_{k,0}. \end{aligned} \quad (205)$$

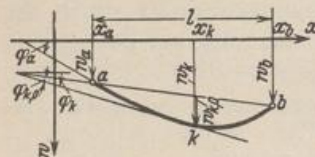


Abb. 112.

Um diese einfache Rechnung auch bei Stäben mit anderen Randbedingungen beizubehalten, werden die Verschiebungen der Endquerschnitte zunächst Null gesetzt und die auf die Sehne der Biegelinie bezogenen relativen Verschiebungen und Verdrehungen $w_{k,0}$, und $\varphi_{k,0}$ bestimmt. Der wirkliche Verschiebungszustand mit den absoluten Verschiebungen und Winkeländerungen ergibt sich durch die nachträgliche Erfüllung der Stützenbedingungen.

Die Biegelinie kann demnach zeichnerisch ebenso wie die Linie der Biegemomente nach (93) aus der gedachten Belastung $EJ_c \cdot w(x)$ oder der zu ihr äquivalenten Gruppe von Einzelkräften $EJ_c \cdot \mathfrak{B}_m$ mit Kraft- und Seileck entwickelt werden. Die Polweite ist in beiden Ansätzen (93) und (203) gleich der Einheit mit der Dimension $m \cdot t/m$ und $m \cdot mt$. Die Ordinate des Seilecks wird in beiden Fällen im Maßstab der Zeichnung gemessen und liefert mit $H = 1 t$ oder mit $H_w = 1 tm^2$ multipliziert das Moment in mt oder die Durchbiegung $EJ_c w$ in tm^3 . Die Wahl einer Polweite H in t oder H_w in tm^2 ändert nur den Maßstab. Die Polweite $H_w = EJ_c$ ergibt mit der Belastung $EJ_c w(x)$ als Ordinate der Seilkurve $\eta = \frac{EJ_c w}{EJ_c} = w$ im Maßstab der Zeichnung. Die Polweite EJ_c/n liefert dann als Ordinate der Seilkurve $EJ_c w : (EJ_c/n)$. Dies ist bei dem Zeichnungsmaßstab $1:n$ die wirkliche Größe der Ausbiegung w . Um demnach eine Biegelinie als Seilkurve zu entwickeln, deren Abszissen im Maßstab $1:n$ aufgetragen sind und deren Ordinaten w_k natürliche Größe erhalten sollen, wird zu den ideellen Kräften (elastischen Gewichten) $EJ_c \mathfrak{B}_m$ ein Richtungsbüschel mit einer Polweite EJ_c/n gezeichnet. Die Bezugsachse für die absoluten Verschiebungen ist durch die Bewegung der Stützpunkte bestimmt.

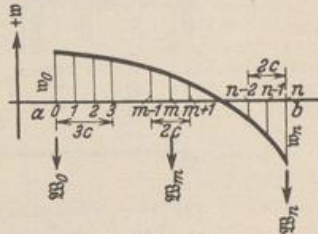


Abb. 113.

Diese zeichnerische Darstellung kann auch unmittelbar eingesehen werden, wenn $w(x)dx$ nach (197) als der Kontingenzwinkel zweier um dx benachbarter Tangenten der Biegelinie verwendet wird. Sie ergeben ein Richtungsbüschel, das die erwähnten ideellen Gewichte $w(x)dx$ als Strecken auf einer Parallelen zur Ausbiegungsrichtung im Abstand 1 vom Pol abschneidet.

Die EJ_c -fachen Verdrehungen und Verschiebungen werden in der Regel nur für den Anteil der Biegemomente angegeben. Daher wird zunächst die der vorgelegten Belastung zugeordnete Funktion des reduzierten Moments $EJ_c w(x) = MJ_c/J$ punktweise gebildet, und durch eine Gruppe von äquivalenten Einzelkräften $\dots EJ_c \mathfrak{B}_{m-1}, EJ_c \mathfrak{B}_m \dots$ ersetzt, die in den Intervallgrenzen $\dots (m-1), m \dots$ einer Unterteilung des Integrationsbereiches a, b wirken. Die Angleichung der Funktion $w(x)$ durch einen Geradenzug liefert ebenso wie in (91)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= \frac{c_m}{6} (w_{m-1} + 2w_m) + \frac{c_{m+1}}{6} (2w_m + w_{m+1}) = \mathfrak{B}_{m,1} + \mathfrak{B}_{m,2}, \\ \mathfrak{B}_0 &= \frac{c_1}{6} (2w_0 + w_1); \quad \mathfrak{B}_n = \frac{c_n}{6} (w_{n-1} + 2w_n). \end{aligned} \right\} (206)$$

Bei gleichgroßen Intervallen $c_m = c_{m+1} = c$ ist

$$\frac{6}{c} \mathfrak{B}_m = w_{m-1} + 4w_m + w_{m+1}.$$

Die Angleichung der Funktion als Parabelabschnitt durch 3 aufeinanderfolgende Punkte führt nach (92) bei gleichgroßen Intervallen c zur Verwendung von

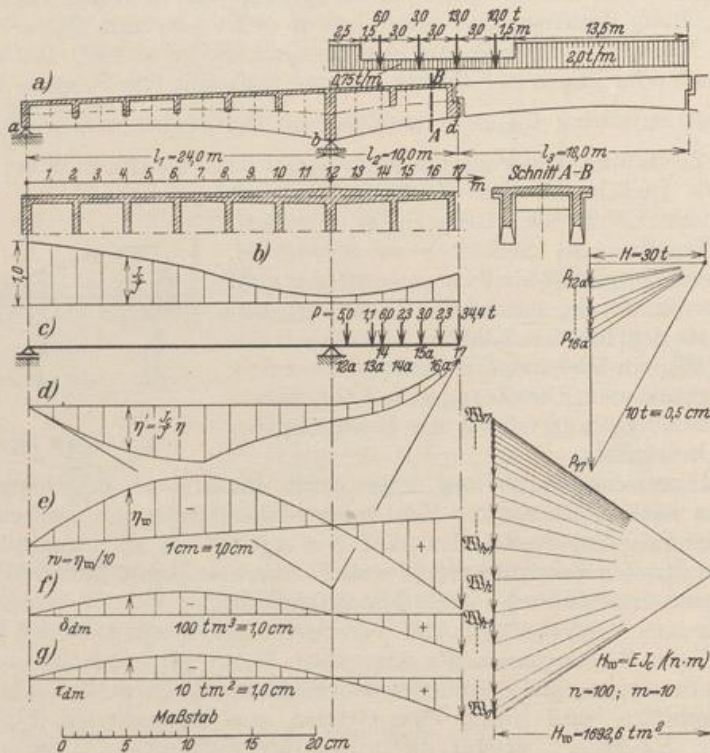
$$\left. \begin{aligned} \frac{12 \mathfrak{B}_m}{c} &= w_{m-1} + 10w_m + w_{m+1}, \\ \frac{12 \mathfrak{B}_0}{c} &= \frac{1}{2} (7w_0 + 6w_1 - w_2), \quad \frac{12 \mathfrak{B}_n}{c} = \frac{1}{2} (7w_n + 6w_{n-1} - w_{n-2}). \end{aligned} \right\} (207)$$

Damit ist die Grundlage gefunden, um die Form der Biegelinie mit $w_a = 0, w_b = 0$ durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Die Strecke ab wird als einfacher Träger angesehen, an dem eine Gruppe von positiven oder negativen Kräften $\mathfrak{B}_0 \dots \mathfrak{B}_m \dots \mathfrak{B}_n$ angreift. Die Rechnung liefert nach (202)

$$A_w = \varphi_{a,0}, \quad B_w = \varphi_{b,0}, \quad Q_{w,k} = \varphi_{k,0}, \quad M_{w,k} = w_{k,0}.$$

Der wirkliche Verschiebungszustand $\varphi_a, \varphi_b, w_k$ entsteht durch Berücksichtigung der Stützenbedingungen nach (205).

Untersuchung der Formänderung eines Auslegeträgers.



Die Einflußlinien f) und g) sind im Bereich des Schleppträgers gerade Linien.

Abb. 114.

1. Zeichnerische Entwicklung der Biegelinie für eine vorgeschriebene Belastung (Abb. 114a):

Querschnittsgestaltung: J_c/J (Abb. 114b), $J_c = J_a = 0,806 m^4$.

Angabe der Momente: graphisch oder rechnerisch nach Abschn. 13.

Reduzierte Ordinaten des Seilecks: $\eta' = \eta \cdot J_c/J$ (Abb. 114d).

Reduzierte Momente: $M' = M \cdot J_c/J = \eta' \cdot H = w_m$.

Berechnung der $E J_c$ -fachen elastischen Gewichte aus der ideellen Belastung M' nach (206):

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{c_1}{6} (2 w_0 + w_1), \quad \mathfrak{B}_n = \frac{c_n}{6} (w_{n-1} + 2 w_n),$$

$$\mathfrak{B}_m = \frac{c_m}{6} (w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}).$$

Abbildung der elastischen Gewichte mit Hilfe der Werte $\sum_0^m \mathfrak{B}_k$ in einem Richtungsbüschel mit der Polweite H_w .