Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Integration der Differentialgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Integration der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen Verschiebungszustand und Schnittkräften. Sie wird durch zweimalige Integration gelöst, wenn Biegungsmoment M und Querkraft Q als Funktionen von x bekannt sind. Die Integrationskonstanten C_1, C_2 ergeben sich aus den Bedingungen für w und φ an den Stützpunkten oder Anschlußquerschnitten.

$$-\varphi = -\frac{dw}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx - \frac{\varkappa Q}{GF} + \int \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx + C_1, \tag{198}$$

$$-w = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx - \int \frac{\varkappa Q}{GF} dx + \int dx \int \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dx + C_1 x + C_2. \tag{199}$$

Die Aufteilung einer beliebigen Belastung nach $(P_1 \ldots P_m \ldots)$ führt zur Superposition $(M_1 \ldots M_m \ldots)$ und $(Q_1 \ldots Q_m \ldots)$, so daß der Verdrehungswinkel φ und die Ausbiegung w aus einzelnen Anteilen durch Superposition nach

$$\varphi = \varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + \cdots + \varphi_m P_m + \cdots, \quad w = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \cdots + w_m P_m + \cdots$$

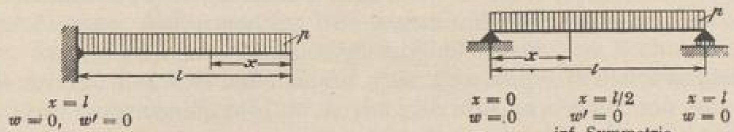
entwickelt werden können.

Bei konstanter Querschnittsfläche treten die Steifigkeitsziffern EJ und GF vor das Integrationszeichen. Dann sind die Anteile des Verdrehungswinkels φ_0 und der Ausbiegung w_0 aus Querkraft und Temperaturveränderung in (198), (199)

$$\varphi_0 = \frac{\varkappa Q}{GF} - \frac{\alpha_t \Delta t}{h} x, \qquad w_0 = \frac{\varkappa M}{GF} - \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \frac{x^2}{2}. \tag{200}$$

Sie werden mit Rücksicht auf die Fehlerquellen des Ansatzes oft auch bei veränderlichem Querschnitt verwendet. Die Schubverteilungszahl $\varkappa$ ist durch die Form des Querschnitts bestimmt, für die Fläche F wird ein mittlerer Betrag verwendet.

Die Formänderung des geraden Stabes mit gleichförmig verteilter Belastung. Statisch bestimmte Stützung. $J = J_c$ Ansatz: $EJw'' = -M(x)$



Randbedingungen der Formänderungen.
Abb. 111.

$$M = -\frac{px^2}{2}, \qquad\qquad M = \frac{px(l-x)}{2},$$

$$-EJw'' = -\frac{pl^2}{2}\xi^2, \qquad\qquad -EJw'' = \frac{pl^2}{2}\xi(1-\xi),$$

$$w = \frac{pl^4}{24EJ}(3 - 4\xi + \xi^4), \qquad\qquad w = \frac{pl^4}{24EJ}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4),$$

$$w' = \varphi = -\frac{pl^3}{6EJ}(1 - \xi^3), \qquad\qquad w' = \varphi = \frac{pl^3}{24EJ}(1 - 6\xi^2 + 4\xi^3).$$

Rechnerische und zeichnerische Entwicklung der Biegelinie. Der Kontingenzwinkel der Biegelinie ist nach S. 122 $-d\varphi = \mathfrak{w}\,dx = +d\psi$, so daß die Differentialgleichung (197) in der folgenden Weise gelöst werden kann:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\mathfrak{w} = -\frac{d\psi}{dx}; \quad \frac{dw}{dx} = \varphi = -\psi + C_1; \quad w = -\int \psi\,dx + C_1 x + C_2. \tag{201a}$$

An einer beliebigen Stelle $x = x_k$ der Biegelinie ist

$$w = w_k, \quad \psi = \int_{x_a}^{x_k} \mathfrak{w}\,dx = \psi_k, \quad \varphi_k = -\psi_k + C_1, \tag{201b}$$