Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

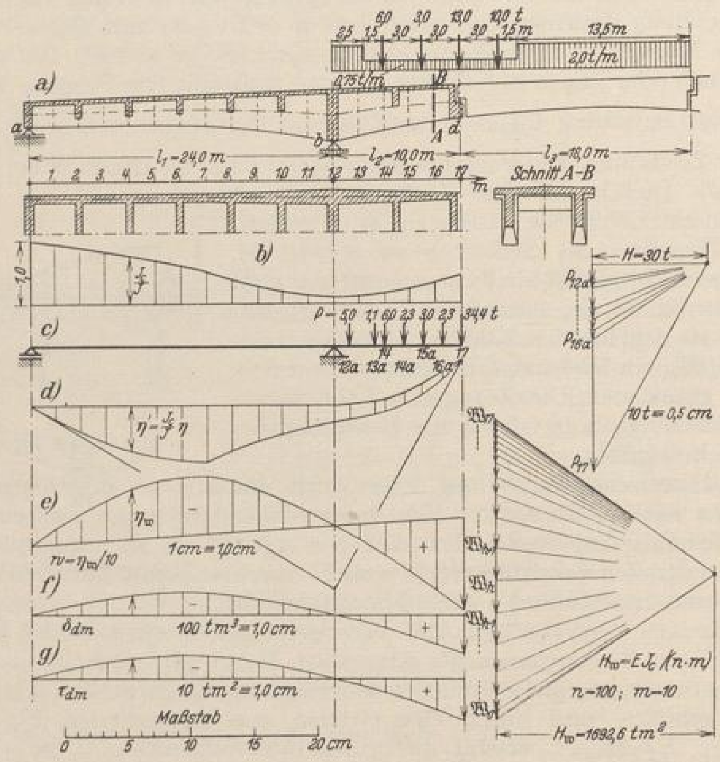
Zahlenbeispiel

Damit ist die Grundlage gefunden, um die Form der Biegelinie mit $w_a = 0$, $w_b = 0$ durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen. Die Strecke ab wird als einfacher Träger angesehen, an dem eine Gruppe von positiven oder negativen Kräften $\mathfrak{W}_0, \ldots, \mathfrak{W}_m, \ldots, \mathfrak{W}_n$ angreift. Die Rechnung liefert nach (202)

$$A_{\mathfrak{w}} = \varphi_{a,0}, \qquad B_{\mathfrak{w}} = \varphi_{b,0}, \qquad Q_{\mathfrak{w},k} = \varphi_{k,0}, \qquad M_{\mathfrak{w},k} = w_{k,0}.$$

Der wirkliche Verschiebungszustand $\varphi_a, \varphi_b, w_k$ entsteht durch Berücksichtigung der Stützenbedingungen nach (205).

Untersuchung der Formänderung eines Auslegeträgers.



Die Einflußlinien *f*) und *g*) sind im Bereich des Schleppträgers gerade Linien.

Abb. 114.

1. Zeichnerische Entwicklung der Biegelinie für eine vorgeschriebene Belastung (Abb. 114a):

Querschnittsgestaltung: J_c/J (Abb. 114b), $J_c = J_a = 0{,}806\ \mathrm{m}^4$.
Angabe der Momente: graphisch oder rechnerisch nach Abschn. 13.
Reduzierte Ordinaten des Seilecks: $\eta' = \eta \cdot J_c/J$ (Abb. 114d).
Reduzierte Momente: $M' = M \cdot J_c/J = \eta' \cdot H = \mathfrak{w}_m$.
Berechnung der EJ_cfachen elastischen Gewichte aus der ideellen Belastung M' nach (206):

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{c_1}{6}\,(2\,\mathfrak{w}_0 + \mathfrak{w}_1), \qquad \mathfrak{W}_n = \frac{c_n}{6}\,(\mathfrak{w}_{n-1} + 2\,\mathfrak{w}_n),$$

$$\mathfrak{W}_m = \frac{c_m}{6}\,(\mathfrak{w}_{m-1} + 4\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}).$$

Abbildung der elastischen Gewichte mit Hilfe der Werte $\sum_0^m \mathfrak{W}_k$ in einem Richtungsbüschel mit der Polweite $H_{\mathfrak{w}}$.

m	c_m	M_m	$\frac{J_c}{J_m}$	$\mathfrak{w}_m = M_m J_c/J_m$	$\mathfrak{w}_{m-1} + 2\,\mathfrak{w}_m$	$c_m/6$	$2\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}$	$c_{m+1}/6$	$\mathfrak{W}_{m,1}$	$\mathfrak{W}_{m,2}$	$\mathfrak{W}_m$	$\sum_0^m \mathfrak{W}_k$
					$\mathfrak{w}_{m-1} + 4\,\mathfrak{w}_m + \mathfrak{w}_{m+1}$					$c_m/6$		
0	—	0,0	1,000	0,0	—	—	33,9	0,333	—	11,3	11,3	11,3
1	2,00	35,9	0,945	33,9	198,5					0,333	66,2	77,5
2	2,00	71,8	0,876	62,9	374,2					0,333	124,7	202,2
3	2,00	107,6	0,824	88,7	526,9					0,333	175,6	377,8
4	2,00	143,5	0,761	109,2	648,7					0,333	216,2	594,0
5	2,00	179,4	0,687	123,2	733,8					0,333	244,6	838,6
6	2,00	215,3	0,612	131,8	783,2					0,333	261,0	1099,6
7	2,00	251,1	0,529	132,8	774,6					0,333	258,2	1357,8
8	2,00	287,0	0,389	111,6	669,3					0,333	223,1	1580,9
9	2,00	322,9	0,279	90,1	541,2					0,333	180,4	1761,3
10	2,00	358,8	0,193	69,2	419,0					0,333	139,7	1901,0
11	2,00	394,7	0,132	52,1	314,2					0,333	104,7	2005,7
12	2,00	430,5	0,085	36,6	125,3	0,333	110,7	0,208	41,8	23,1	64,9	2070,6
12a	1,25	364,5	0,103	37,5	224,5					0,208	46,8	2117,4
13	1,25	300,8	0,126	37,9	113,3	0,208	113,1	0,250	23,6	28,3	51,9	2169,3
14	1,50	229,0	0,163	37,3	221,8					0,250	55,5	2224,8
14a	1,50	166,9	0,208	34,7	205,4					0,250	51,4	2276,2
15a	1,50	106,6	0,275	29,3	170,3					0,250	42,6	2318,8
16a	1,50	52,5	0,351	18,4	102,9					0,250	25,7	2344,5
17	1,50	0,0	0,463	0,0	18,4	0,250	—	—	4,6	—	4,6	2349,1

Mit $H_{\mathfrak{w}} = E J_c/(n \cdot m)$ ergeben nach S. 125 die Ordinaten $\eta_{\mathfrak{w}}$ des Seileckes unmittelbar die $m$fach verzerrten Durchbiegungen w (Abb. 114e).

$$E = 2100000 \text{ t/m}^2; \qquad E J_c = 1692600 \text{ tm}^2;$$
$$n = 100; \qquad m = 10; \qquad H_{\mathfrak{w}} = 1692{,}6 \text{ tm}^2;$$

Durchbiegungen $w = \eta_{\mathfrak{w}}/10$ in mm:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12a	13a	14	14a	15a	16a	17
w	0,0	−1,2	−2,2	−3,2	−3,9	−4,3	−4,5	−4,4	−3,9	−3,2	−2,3	−1,2	0,0	0,8	1,6	2,7	3,8	4,9	6,1	7,3

2. Einflußlinie der EJ_cfachen Durchbiegung δ_m des Querschnittes d. Biegelinie des Trägers unter der Last 1 t in d nach (168). Ermittlung der $\mathfrak{W}$-Gewichte wie unter 1. Berechnung von $A_{\mathfrak{w}}$, $D_{\mathfrak{w}}$, $\delta_{m,1}$ unabhängig von der vorgeschriebenen Stützung des Trägers als Auflagerkräfte und Durchbiegungen eines Balkens auf den Stützen a und d. Nachträgliche Einführung der Stützenbedingung $\delta_b = 0$ durch Drehen der Achse um a:

$$\delta_b = \delta_{b,1} + \delta_{b,2} = \delta_{b,1} + \vartheta \cdot l_1 = 0; \qquad \vartheta = -\,\delta_{b,1}/l_1; \qquad \delta_{m,2} = -\,\vartheta \cdot x = -\,\delta_{b,1} \cdot \xi;$$
$$\delta_m = \delta_{m,1} + \delta_{m,2}; \qquad \xi = x/l_1; \qquad \zeta = x/(l_1 + l_2);$$

m	ζ_m	ξ_m	$-M_m$	J_c/J_m	$-\mathfrak{w}_m = -M_m J_c/J_m$	$-\mathfrak{W}_m$	ζ_m	ζ'_m	$-\mathfrak{W}_m \zeta_m$	$-\mathfrak{W}_m \zeta'_m$
0	0,0	0,0	0,00000	1,0000	0,00000	(0,26247)	0,00000	1,00000	—	—
1	1/17	1/12	0,83333	0,9449	0,78741	1,53660	0,05882	0,94118	0,09038	1,44622
2	2/17	2/12	1,66667	0,8761	1,46017	2,89611	0,11765	0,88235	0,34073	2,55538
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

m	$-Q_{\mathfrak{w}m}$	$-Q_{\mathfrak{w}m} c_m$	$-\delta_{m,1} = -M_{\mathfrak{w}m,1}$	$-\delta_{m,2} = +\delta_{b,1} \cdot \xi$	$-\delta_m$
0	0,00000	0,00000	0,0000	− 0,0000	0,0000
1	31,17220	62,34440	62,3444	−17,1615	45,1829
2	29,63560	59,27120	121,6156	−34,3231	87,2925
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

$$D_{\mathfrak{w},1} - \mathfrak{W}_{17} = \sum_0^{16} \mathfrak{W}_m \zeta_m = -\,23{,}73446\,,$$
$$A_{\mathfrak{w},1} - \mathfrak{W}_0 = \sum_1^{17} \mathfrak{W}_m \zeta'_m = -\,31{,}17220\,,$$

$$-\,\delta_{b,1} = 205{,}9384 \text{ tm}^3, \qquad \delta_m : \text{Abb. 114 f.}$$

3. Einflußlinie der EJ_cfachen Verdrehung τ_m des Querschnittes d. Biegelinie des Trägers unter dem Angriff des Momentes $M_d = 1{,}0$ mt. Ermittlung der Gewichte wie unter 1. Die Verdrehungen φ_a, φ_b der Querschnitte a und b werden im Gegensatz zu 2. unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Stützenbedingungen berechnet.

$$A_w - \mathfrak{W}_0 = \sum_1^{12} \mathfrak{W}_m \xi_m = -2{,}25914 \text{ tm}^3. \qquad Q_{w,12} = \sum_0^{11} \mathfrak{W}_m \xi'_m = -2{,}37209 \text{ tm}^3;$$

m	ξ_m	$-M_m$	J_c/J_m	$-w_m$	$-\mathfrak{W}_m$	ξ_m	ξ'_m	$-\mathfrak{W}_m \xi_m$	$-\mathfrak{W}_m \xi'_m$	$-Q_{w,m}$	$-Q_{w,m} c_m$	$-\delta_m$
0	0	0,00000	1,0000	0,00000	(0,02625)	0,00000	1,00000	—	—	0,00000	0,00000	0,0000
1	1/12	0,08333	0,9449	0,07874	0,15366	0,08333	0,91667	0,01280	0,14086	2,25914	4,51829	4,5183
2	2/12	0,16667	0,8761	0,14602	0,28961	0,16667	0,83333	0,04827	0,24134	2,10548	4,21097	8,7293
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$EJ_c\text{fache Verdrehung } \tau_m = \frac{\delta_m\,(\text{tm}^3)}{1{,}0\,(\text{m})} : \text{Abb. 114g.}$$

Ableitung der Biegelinie aus der Belastung. Die Biegelinie des geraden Stabes ist bisher aus den Schnittkräften M, Q entwickelt worden, die oft jedoch selbst nicht bekannt sind, sondern nur als Differentialbeziehung verwendet werden können.

$$\frac{dM}{dx} = Q, \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p(x).$$

Mit diesen lautet dann die Gleichung (197) der Biegelinie für $\Delta t = 0$ ohne Berücksichtigung der Querkraft:

$$\frac{J}{J_c}\frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} = -M, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{J}{J_c}\frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2}\right) = -Q, \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{J}{J_c}\frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2}\right) = p(x), \quad (208)$$

$$\text{für } J = J_c = \text{const} \quad EJ\frac{d^2w}{dx^2} = -M, \quad EJ\frac{d^3w}{dx^3} = -Q, \quad EJ\frac{d^4w}{dx^4} = p(x). \quad (209)$$

Damit ist eine Differentialbeziehung zwischen Belastungsfunktion und Ausbiegung entstanden, deren Lösung für jeden stetigen Bereich getrennt mit vier Konstanten angeschrieben wird. Diese sind durch Bedingungen für die Formänderung und für die Schnittkräfte an den Stützen, den Stabenden und an den Unstetigkeitsstellen bestimmt.

Die Formänderung des geraden Stabes mit statisch unbestimmter Stützung. a) Gleichförmige Belastung p, $J = J_c$, Ansatz $EJw^{(IV)} = p$.

Abb. 115.

$$w = \frac{pl^4}{48EJ}(\xi - 3\xi^3 + 2\xi^4), \qquad w = \frac{pl^4}{24EJ}(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4),$$

$$w' = \varphi = \frac{pl^3}{48EJ}(1 - 9\xi^2 + 8\xi^3), \qquad w' = \varphi = \frac{pl^3}{12EJ}(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3).$$

$$-EJw'' = M = \frac{pl^2}{8}(-4\xi^2 + 3\xi), \qquad -EJw'' = M = \frac{pl^2}{12}(6\xi - 6\xi^2 - 1),$$

$$-EJw''' = Q = \frac{pl}{8}(-8\xi + 3), \qquad -EJw''' = Q = \frac{pl}{2}(1 - 2\xi).$$

b) Unstetige Belastung durch eine Einzellast P. Der Angriffspunkt C der Last P teilt den Integrationsbereich in die Abschnitte a und b mit w_1 und w_2. Für beide ist $EJw^{(IV)} = 0$. Die 8 Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen in A, B und C bestimmt. w und w' sind an den Stützpunkten Null, Auslenkung w und Biegungsmoment M an der Unstetigkeits-