



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Ableitung der Biegelinie aus der Belastung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

3. Einflußlinie der  $EJ_c$  fachen Verdrehung  $\tau_m$  des Querschnittes  $d$ . Biegelinie des Trägers unter dem Angriff des Momentes  $M_d = 1,0$  mt. Ermittlung der Gewichte wie unter 1. Die Verdrehungen  $\varphi_a, \varphi_b$  der Querschnitte  $a$  und  $b$  werden im Gegensatz zu 2. unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Stützenbedingungen berechnet.

$$A_{w,0} - \mathfrak{B}_0 = \sum_1^{12} \mathfrak{B}_m \xi_m = -2,25914 \text{ tm}^3. \quad Q_{w,12} = \sum_0^{11} \mathfrak{B}_m \xi'_m = -2,37209 \text{ tm}^3;$$

$m$	$\xi_m$	$-M_m$	$J_c/J_m$	$-w_m$	$-\mathfrak{B}_m$	$\xi_m$	$\xi'_m$	$-\mathfrak{B}_m \xi_m$	$-\mathfrak{B}_m \xi'_m$	$-Q_{w,m}$	$-Q_{w,m} c_m$	$-\delta_m$
0	0	0,00000	1,0000	0,00000	(0,02625)	0,00000	1,00000	—	—	0,00000	0,00000	0,0000
1	1/12	0,08333	0,9449	0,07874	0,15366	0,08333	0,91667	0,01280	0,14086	2,25914	4,51829	4,5183
2	2/12	0,16667	0,8761	0,14602	0,28961	0,16667	0,83333	0,04827	0,24134	2,10548	4,21097	8,7293
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$$EJ_c \text{ fache Verdrehung } \tau_m = \frac{\delta_m (\text{tm}^3)}{1,0 (\text{m})} : \text{Abb. 114g.}$$

**Ableitung der Biegelinie aus der Belastung.** Die Biegelinie des geraden Stabes ist bisher aus den Schnittkräften  $M, Q$  entwickelt worden, die oft jedoch selbst nicht bekannt sind, sondern nur als Differentialbeziehung verwendet werden können.

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p(x).$$

Mit diesen lautet dann die Gleichung (197) der Biegelinie für  $\Delta t = 0$  ohne Berücksichtigung der Querkraft:

$$\frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} = -M, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} \right) = -Q, \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{J}{J_c} \frac{d^2(EJ_c w)}{dx^2} \right) = p(x), \quad (208)$$

$$\text{für } J = J_c = \text{const} \quad EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q, \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x). \quad (209)$$

Damit ist eine Differentialbeziehung zwischen Belastungsfunktion und Ausbiegung entstanden, deren Lösung für jeden stetigen Bereich getrennt mit vier Konstanten angeschrieben wird. Diese sind durch Bedingungen für die Formänderung und für die Schnittkräfte an den Stützen, den Stabenden und an den Unstetigkeitsstellen bestimmt.

Die Formänderung des geraden Stabes mit statisch unbestimmter Stützung.  
a) Gleichförmige Belastung  $p, J = J_c$ . Ansatz  $EJ w^{(IV)} = p$ .



Abb. 115.

$$w = \frac{p l^4}{48 EJ} (\xi - 3\xi^3 + 2\xi^4),$$

$$w' = \varphi = \frac{p l^3}{48 EJ} (1 - 9\xi^2 + 8\xi^3),$$

$$-EJw'' = M = \frac{p l^2}{8} (-4\xi^2 + 3\xi),$$

$$-EJw''' = Q = \frac{p l}{8} (-8\xi + 3),$$

$$w = \frac{p l^4}{24 EJ} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4),$$

$$w' = \varphi = \frac{p l^3}{12 EJ} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3),$$

$$-EJw'' = M = \frac{p l^2}{12} (6\xi - 6\xi^2 - 1),$$

$$-EJw''' = Q = \frac{p l}{2} (1 - 2\xi).$$

b) Unstetige Belastung durch eine Einzellast  $P$ . Der Angriffspunkt  $C$  der Last  $P$  teilt den Integrationsbereich in die Abschnitte  $a$  und  $b$  mit  $w_1$  und  $w_2$ . Für beide ist  $EJ w^{(IV)} = 0$ . Die 8 Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen in  $A, B$  und  $C$  bestimmt.  $w$  und  $w'$  sind an den Stützpunkten Null, Auslenkung  $w$  und Biegemoment  $M$  an der Unstetigkeits-

stelle  $C$  stetig und die Differenz der beiden Querkräfte  $Q_c$  gleich der Last  $P$  (Abb. 116).

$$x_1 = 0: w_1 = 0, w_1' = 0; \quad x_2 = l: w_2 = 0, w_2' = 0;$$

$$x_1 = a \text{ und } x_2 = b: w_1 = w_2, w_1' = -w_2', w_1'' = w_2'', w_1''' - w_2''' = -\frac{P}{EJ}.$$

$$c_1 = \left(1 - 2\left(\frac{a}{l}\right) + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right),$$

$$c_3 = \left(1 - 2\left(\frac{b}{l}\right) + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right),$$

$$c_2 = \left(1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{l}\right)^3\right),$$

$$c_4 = \left(1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{l}\right)^3\right),$$

$$EJ w_1 = \frac{P a^3}{6} \left\{ 3 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_2 = \frac{P b^3}{6} \left\{ 3 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_1' = \frac{P a^2}{2} \left\{ 2 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \right\},$$

$$EJ w_2' = \frac{P b^2}{2} \left\{ 2 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \right\},$$

$$-EJ w_1'' = M_1 = P a \left\{ c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_1 \right\},$$

$$-EJ w_2'' = M_2 = P b \left\{ c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_3 \right\},$$

$$-EJ w_1''' = Q_1 = P c_2, \quad -EJ w_2''' = Q_2 = P c_4.$$

Bereich  $a$ :  $\varphi = w_1', \quad Q = Q_1;$

Bereich  $b$ :  $\varphi = -w_2', \quad Q = -Q_2.$

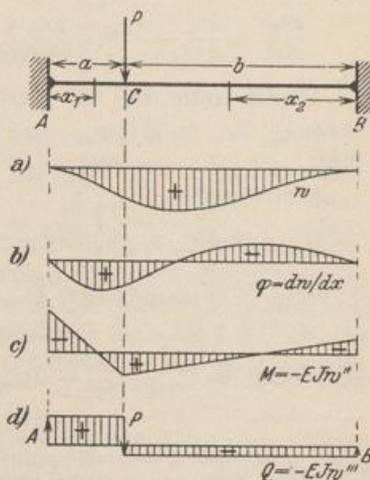


Abb. 116.

**Lösung der Differentialgleichung mit Differenzen.** Da ein geschlossenes Integral der Differentialgleichung in der Regel nicht angegeben werden kann, wird in diesem und ähnlichen Fällen eine Näherung verwendet, um die Funktionswerte  $w_m$  einer regelmäßigen Punktfolge  $\dots (m-1), m, \dots$  des Integrationsbereiches  $l$  zu berechnen. An die Stelle der stetigen Integralkurve tritt damit ein der Kurve einbeschriebenes Vieleck. Die Differentialquotienten der stetigen Funktion werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Die Differentialgleichung wird zur Differenzengleichung, deren Randbedingungen in bezug auf Richtung und Krümmung der elastischen Linie ebenfalls durch Differenzen ausgedrückt werden.

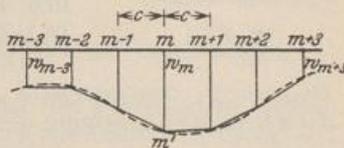


Abb. 117.

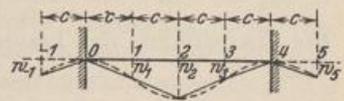


Abb. 118.

Der Integrationsbereich  $l$  der Funktion wird durch die regelmäßige Punktfolge  $\dots (m-1), m, \dots$  in  $n$  gleiche Strecken geteilt. Der Teilpunkt  $m$  erhält die Abszisse  $m \cdot \Delta x$  und die Ordinate  $\overline{m m'} = w_m$ . Wird die Integralkurve im Bereich von  $(m-1), m, (m+1)$  angenähert durch einen Parabelabschnitt durch die Punkte  $(m-1)', m', (m+1)'$  ersetzt, so ist im Punkte  $m$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \Delta x}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{m-1} - 2 w_m + w_{m+1}}{\Delta x^2}. \quad (210)$$

Die Richtung der Kurve in  $m'$ , bestimmt durch  $dw/dx$ , wird damit angenähert durch die Richtung  $(m-1)', (m+1)'$  der Sehne beschrieben. Der zweite Differentialquotient kann bei flachen Kurven aus dem Kontingenzwinkel der Kurve in  $m'$