



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Lösung der Differentialgleichung mit Differenzen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

stelle C stetig und die Differenz der beiden Querkräfte Q_c gleich der Last P (Abb. 116).

$$x_1 = 0: w_1 = 0, w_1' = 0; \quad x_2 = l: w_2 = 0, w_2' = 0;$$

$$x_1 = a \text{ und } x_2 = b: w_1 = w_2, w_1' = -w_2', w_1'' = w_2'', w_1''' - w_2''' = -\frac{P}{EJ}.$$

$$c_1 = \left(1 - 2\left(\frac{a}{l}\right) + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right),$$

$$c_3 = \left(1 - 2\left(\frac{b}{l}\right) + \left(\frac{b}{l}\right)^2\right),$$

$$c_2 = \left(1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{l}\right)^3\right),$$

$$c_4 = \left(1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{l}\right)^3\right),$$

$$EJ w_1 = \frac{P a^3}{6} \left\{ 3 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_2 = \frac{P b^3}{6} \left\{ 3 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 \right\},$$

$$EJ w_1' = \frac{P a^2}{2} \left\{ 2 c_1 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \right\},$$

$$EJ w_2' = \frac{P b^2}{2} \left\{ 2 c_3 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \right\},$$

$$-EJ w_1'' = M_1 = P a \left\{ c_2 \left(\frac{x_1}{a}\right) - c_1 \right\},$$

$$-EJ w_2'' = M_2 = P b \left\{ c_4 \left(\frac{x_2}{b}\right) - c_3 \right\},$$

$$-EJ w_1''' = Q_1 = P c_2, \quad -EJ w_2''' = Q_2 = P c_4.$$

Bereich a : $\varphi = w_1', \quad Q = Q_1$;

Bereich b : $\varphi = -w_2', \quad Q = -Q_2$.

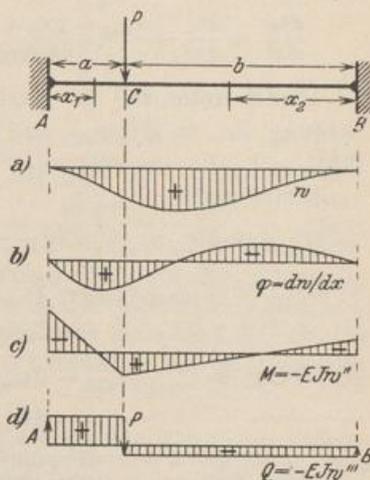


Abb. 116.

Lösung der Differentialgleichung mit Differenzen. Da ein geschlossenes Integral der Differentialgleichung in der Regel nicht angegeben werden kann, wird in diesem und ähnlichen Fällen eine Näherung verwendet, um die Funktionswerte w_m einer regelmäßigen Punktfolge $\dots (m-1), m, \dots$ des Integrationsbereiches l zu berechnen. An die Stelle der stetigen Integralkurve tritt damit ein der Kurve einbeschriebenes Vieleck. Die Differentialquotienten der stetigen Funktion werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Die Differentialgleichung wird zur Differenzengleichung, deren Randbedingungen in bezug auf Richtung und Krümmung der elastischen Linie ebenfalls durch Differenzen ausgedrückt werden.

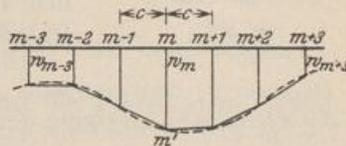


Abb. 117.

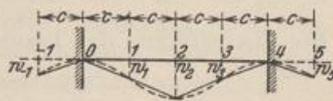


Abb. 118.

Der Integrationsbereich l der Funktion wird durch die regelmäßige Punktfolge $\dots (m-1), m, \dots$ in n gleiche Strecken geteilt. Der Teilpunkt m erhält die Abszisse $m \cdot \Delta x$ und die Ordinate $\overline{m m'} = w_m$. Wird die Integralkurve im Bereich von $(m-1), m, (m+1)$ angenähert durch einen Parabelabschnitt durch die Punkte $(m-1)', m', (m+1)'$ ersetzt, so ist im Punkte m

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \Delta x}, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{m-1} - 2 w_m + w_{m+1}}{\Delta x^2}. \quad (210)$$

Die Richtung der Kurve in m' , bestimmt durch dw/dx , wird damit angenähert durch die Richtung $(m-1)', (m+1)'$ der Sehne beschrieben. Der zweite Differentialquotient kann bei flachen Kurven aus dem Kontingenzwinkel der Kurve in m'

abgeleitet und angenähert durch den Unterschied der Richtungen der dem Punkte m benachbarten Sehnen ausgedrückt werden. Die gleichen Beziehungen gelten auch bei einer Funktion $d^2w/dx^2 = r$ für $d^3w/dx^3 = dr/dx$ und $d^4w/dx^4 = d^2r/dx^2$, so daß zur Beschreibung der geometrischen Eigenschaften der Funktion w in der Umgebung des Punktes m folgende Übergänge vollzogen werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &\rightarrow \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2\Delta x}, & \frac{d^2w}{dx^2} &\rightarrow \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= \frac{dr}{dx} \rightarrow \frac{r_{m+1} - r_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2\Delta x^3}, \\ \frac{d^4w}{dx^4} &= \frac{d^2r}{dx^2} \rightarrow \frac{r_{m+1} - 2r_m + r_{m-1}}{\Delta x^2} = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{\Delta x^4} \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Damit treten mit der Bezeichnung w_m für den EJ_c -fachen Betrag der Durchbiegung ($w_m \equiv EJ_c w_m$) und mit $\bar{\zeta}_m$ für den reziproken Wert der Funktion ζ ($\bar{\zeta}_m = J_m/J_c$) die folgenden Differenzenbeziehungen an die Stelle der Differentialbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} -M_m \Delta x^2 &= \bar{\zeta}_m (w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}), \\ -2Q_m \Delta x^3 &= \bar{\zeta}_{m+1} w_{m+2} - 2\bar{\zeta}_{m+1} w_{m+1} + (\bar{\zeta}_{m+1} - \bar{\zeta}_{m-1}) w_m + 2\bar{\zeta}_{m-1} w_{m-1} \\ &\quad - \bar{\zeta}_{m-1} w_{m-2}, \\ p_m(x) \Delta x^4 &= \bar{\zeta}_{m+1} w_{m+2} - 2w_{m+1} (\bar{\zeta}_{m+1} + \bar{\zeta}_m) + w_m (\bar{\zeta}_{m+1} + 4\bar{\zeta}_m + \bar{\zeta}_{m-1}) \\ &\quad - 2w_{m-1} (\bar{\zeta}_m + \bar{\zeta}_{m-1}) + w_{m-2} \bar{\zeta}_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

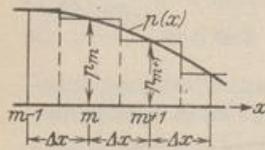


Abb. 110.

Biegemoment M_m und Querkraft Q_m sind daher aus den Durchbiegungen w_m einer ausgezeichneten Punktfolge m bestimmt. p_m ist die Ordinate der Belastungsfunktion im Punkt m . An die Stelle der stetigen Funktion $p(x)$ tritt die unstetige Belastung nach einer Stufenlinie, die durch eine in den Intervallgrenzen angreifende Gruppe von Einzellasten ($p\Delta x^3$) Δx ersetzt wird (Abb. 110).

Die Randbedingungen $w = 0$ und $M = 0$ bedürfen keiner Diskussion, dagegen wird die Integralkurve zur Einführung der Randbedingung dw/dx in der Umgebung des Punktes 0 durch eine kubische Parabel ersetzt:

$$w_{m+1} = w_m + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{dw}{dx} \right)_m + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_m + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_m \quad (213)$$

Bei Einspannung des Trägers im Querschnitt $m = 0$ ist $w_m = 0$ und $dw/dx_m = 0$, daher

$$w_1 = \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_0 + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_0.$$

Für die kubische Parabel gilt

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_0 = \frac{w_1 - 2w_0 + w_{-1}}{\Delta x^2}, \quad \left(\frac{d^3w}{dx^3} \right)_0 = \text{const} = \frac{w_2 - 3w_1 + 3w_0 - w_{-1}}{\Delta x^3}, \quad (214)$$

so daß als Bedingung für die Einspannung des Trägers im Querschnitt $m = 0$ die folgende Beziehung entsteht:

$$w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2 \quad (215)$$

Die Rechenvorschrift wird an dem beiderseits eingespannten, gleichförmig belasteten Träger mit $\zeta = 1$ erläutert, um die Genauigkeit der Ergebnisse zu prüfen. Dabei wird der Integrationsbereich l durch die Punktreihe 0, 1, 2, 3, 4 in 4 Strecken Δx geteilt. Infolge

Symmetrie ist $w_1 = w_3$, so daß die Differenzgleichungen nur für die Punkte 1 und 2 aufgestellt werden (Abb. 118).

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3,$$

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4.$$

Hierzu treten die Randbedingungen $w_0 = 0$, $w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$. Die Verschiebungen w_1 und w_2 ergeben sich daher aus den folgenden beiden Gleichungen.

$$10w_1 - 4,5w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4, \quad -8w_1 + 6w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4$$

mit

$$w_1 = 0,00171 \frac{p l^4}{EJ}, \quad w_2 = 0,00293 \frac{p l^4}{EJ}.$$

Die Momente werden mit w_1 und w_2 nach (212) berechnet.

$$\text{Trägermitte: } M_2 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_1 - 2w_2 + w_3) = \frac{15}{16} \frac{p l^2}{24} \approx \frac{p l^2}{24}. \quad (216)$$

$$\text{Auflager: } M_0 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_{-1} - 2w_0 + w_1) = -\frac{33}{32} \frac{p l^2}{12} \approx -\frac{p l^2}{12}. \quad (217)$$

Die Näherungsrechnung führt also trotz der geringen Anzahl der Intervalle auch für die Schnittkräfte zu relativ guten Ergebnissen, da die Unterschiede zwischen den Differential- und Differenzenquotienten selbst dann noch klein sind. Die Untersuchung muß nur im Bereiche von singulären Stellen der Funktion mit einer engeren Teilung wiederholt werden.

Ritter, A.: Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Zürich 1883. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Hencky, H.: Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 58. — Marcus, H.: Armierter Beton 1919 S. 107; außerdem: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924. — Runge, C., u. H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925.

21. Die Biegelinie von gekrümmten Stäben und Stabzügen.

Die ebene Verschiebung eines Querschnitts wird auch bei gekrümmten Stäben als brauchbare Annahme verwendet, wenn eine Symmetrieebene vorhanden ist, die mit der Kräfteebene zusammenfällt. Sie wird dann ebenso wie beim geraden Stabe durch die bezogene Längenänderung ϵ_0 der Stabachse und durch die gegenseitige Verdrehung $d\psi$ zweier benachbarter Querschnitte beschrieben. Die Veränderlichkeit von ds mit z schließt hier zwar die lineare Abhängigkeit der Normalspannungen $\sigma_x(z)$ aus. Die Spannungen σ , τ und die Verzerrungskomponenten ϵ_0 , $d\psi$ sind aber nach (70), (71) trotzdem wieder Funktionen der Schnittkräfte N , M , Q und der Temperaturänderung t , $\Delta t = t_i - t_a$.

Ableitung der Differentialgleichung. Während sich die Querschnitte gerader Stäbe durch die Belastung mit großer Genauigkeit winkelrecht zur Stabachse bewegen, sind zur Beschreibung der Verschiebung der Querschnitte gekrümmter Stäbe zwei Komponenten u , w notwendig. Sie werden hier im Gegensatz zu der früheren Definition waagrecht und senkrecht angenommen, um das für die geometrische Darstellung von Stabzügen übliche Koordinatensystem (Abb. 120) beizubehalten. In diesem Fall ist

$$dy = ds \sin \alpha, \quad dx = ds \cos \alpha. \quad (218a)$$

Diese geometrischen Beziehungen ändern sich durch die Belastung des Stabes.

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad x \rightarrow x + \delta x, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha, \quad ds \rightarrow ds + \delta(ds).$$