



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

21. Die Biegelinie von gekrümmten Stäben und Stabzügen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Symmetrie ist  $w_1 = w_3$ , so daß die Differenzgleichungen nur für die Punkte 1 und 2 aufgestellt werden (Abb. 118).

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3,$$

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4.$$

Hierzu treten die Randbedingungen  $w_0 = 0$ ,  $w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$ . Die Verschiebungen  $w_1$  und  $w_2$  ergeben sich daher aus den folgenden beiden Gleichungen.

$$10w_1 - 4,5w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4, \quad -8w_1 + 6w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4$$

mit

$$w_1 = 0,00171 \frac{p l^4}{EJ}, \quad w_2 = 0,00293 \frac{p l^4}{EJ}.$$

Die Momente werden mit  $w_1$  und  $w_2$  nach (212) berechnet.

$$\text{Trägermitte: } M_2 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_1 - 2w_2 + w_3) = \frac{15}{16} \frac{p l^2}{24} \approx \frac{p l^2}{24}. \quad (216)$$

$$\text{Auflager: } M_0 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_{-1} - 2w_0 + w_1) = -\frac{33}{32} \frac{p l^2}{12} \approx -\frac{p l^2}{12}. \quad (217)$$

Die Näherungsrechnung führt also trotz der geringen Anzahl der Intervalle auch für die Schnittkräfte zu relativ guten Ergebnissen, da die Unterschiede zwischen den Differential- und Differenzenquotienten selbst dann noch klein sind. Die Untersuchung muß nur im Bereiche von singulären Stellen der Funktion mit einer engeren Teilung wiederholt werden.

Ritter, A.: Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Zürich 1883. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Hencky, H.: Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 58. — Marcus, H.: Armierter Beton 1919 S. 107; außerdem: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924. — Runge, C., u. H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925.

## 21. Die Biegelinie von gekrümmten Stäben und Stabzügen.

Die ebene Verschiebung eines Querschnitts wird auch bei gekrümmten Stäben als brauchbare Annahme verwendet, wenn eine Symmetrieebene vorhanden ist, die mit der Kräfteebene zusammenfällt. Sie wird dann ebenso wie beim geraden Stabe durch die bezogene Längenänderung  $\epsilon_0$  der Stabachse und durch die gegenseitige Verdrehung  $d\psi$  zweier benachbarter Querschnitte beschrieben. Die Veränderlichkeit von  $ds$  mit  $z$  schließt hier zwar die lineare Abhängigkeit der Normalspannungen  $\sigma_x(z)$  aus. Die Spannungen  $\sigma$ ,  $\tau$  und die Verzerrungskomponenten  $\epsilon_0$ ,  $d\psi$  sind aber nach (70), (71) trotzdem wieder Funktionen der Schnittkräfte  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  und der Temperaturänderung  $t$ ,  $\Delta t = t_i - t_a$ .

**Ableitung der Differentialgleichung.** Während sich die Querschnitte gerader Stäbe durch die Belastung mit großer Genauigkeit winkelrecht zur Stabachse bewegen, sind zur Beschreibung der Verschiebung der Querschnitte gekrümmter Stäbe zwei Komponenten  $u$ ,  $w$  notwendig. Sie werden hier im Gegensatz zu der früheren Definition waagrecht und senkrecht angenommen, um das für die geometrische Darstellung von Stabzügen übliche Koordinatensystem (Abb. 120) beizubehalten. In diesem Fall ist

$$dy = ds \sin \alpha, \quad dx = ds \cos \alpha. \quad (218a)$$

Diese geometrischen Beziehungen ändern sich durch die Belastung des Stabes.

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad x \rightarrow x + \delta x, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha, \quad ds \rightarrow ds + \delta(ds).$$

Nach Abb. 120 ist

$$\delta x = u, \quad \delta y = -w, \quad \delta \alpha = -\varphi, \quad \delta(d\alpha) = d(\delta\alpha) = d\psi.$$

Durch Variation von (218a) entsteht

$$\left. \begin{aligned} \delta(dy) &= \delta(ds) \sin \alpha + ds \cos \alpha \delta \alpha = d(\delta y) = -dw, \\ \delta(dx) &= \delta(ds) \cos \alpha - ds \sin \alpha \delta \alpha = d(\delta x) = du, \\ \frac{d}{dx}(\delta y) &= \varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha + \delta \alpha, \quad \frac{d}{dy}(\delta x) = \varepsilon_0 \operatorname{ctg} \alpha - \delta \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (218b)$$

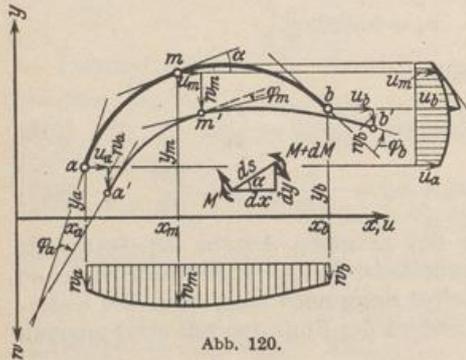


Abb. 120.

Damit sind die Differentialgleichungen für die senkrechte und waagerechte Ausbiegung gefunden:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\delta \alpha) + \frac{d}{dx}(\varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha); \\ -\frac{d^2 u}{dy^2} &= \frac{d}{dy}(\delta \alpha) - \frac{d}{dy}(\varepsilon_0 \operatorname{ctg} \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Die Verzerrungskomponenten  $d(\delta\alpha) = d\psi$  und  $\varepsilon_0$  sind in Abschnitt 10 für den gekrümmten Stab als Funktionen der Schnittkräfte abgeleitet worden. Bei  $\rho \gg h$  ist jedoch mit großer Genauigkeit ebenso wie für den geraden Stab

$$d\psi = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) ds, \quad d\varepsilon_0 = d \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right)$$

also

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right) \frac{dy}{dx} \right], \quad (220)$$

$$-\frac{d^2 u}{dy^2} = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{d}{dy} \left[ \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right) \frac{dx}{dy} \right]. \quad (221)$$

Der Ansatz wird bei gleichbleibender Temperatur ( $t = 0, \Delta t = 0$ ) und kleinem  $\varepsilon_0$  meist in der folgenden Abkürzung verwendet:

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EJ \cos \alpha}; \quad -\frac{d^2(EJ_\varepsilon w)}{dx^2} = M \frac{J_\varepsilon}{J \cos \alpha}, \quad (222)$$

$$-\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{M}{EJ \sin \alpha}; \quad -\frac{d^2(EJ_\varepsilon u)}{dy^2} = M \frac{J_\varepsilon}{J \sin \alpha}. \quad (223)$$

Die Ausbiegungen  $u_k, w_k$  werden daraus formal ebenso wie in (199) berechnet oder durch Integration von (220) und (221) nach (201) entwickelt. Die Integrationskonstanten sind wie in (201) durch die Verschiebungskomponenten  $u_a, w_a, \varphi_a$  des linken Endquerschnitts  $a$  bestimmt. Auf diese Weise entsteht mit  $\varepsilon_a = N_a/EF_a + \alpha_t t$

$$\left. \begin{aligned} w_k &= w_a + (x_k - x_a) \varphi_a - \varepsilon_a (y_k - y_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) d\psi - \int_{x_a}^{x_k} (y_k - y) d\varepsilon_0, \\ u_k &= u_a + (y_k - y_a) \varphi_a + \varepsilon_a (x_k - x_a) - \int_{y_a}^{y_k} (y_k - y) d\psi + \int_{y_a}^{y_k} (x_k - x) d\varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

$$\varphi_k = \varphi_a - \int_{x_a}^{x_k} d\psi. \quad (225)$$

Die Verdrehung des Endquerschnitts  $a$  ist für  $w_b - w_a = 0$  und mit  $x_b - x_a = l$ ,  $y_b - y_a = e$

$$\varphi_a = \varphi_{a,0} = \frac{c}{l} \varepsilon_a + \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) d\psi + \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (y_b - y) d\varepsilon_0. \quad (226)$$

Sie erhält wiederum die Bedeutung des Stützendruckes  $A_w$  eines Stabzuges  $\vec{ab}$  aus einer Gruppe von senkrecht gerichteten ideellen Drehungsgewichten  $d\psi$  und einer Gruppe von waagrecht gerichteten ideellen Dehnungsgewichten  $\varepsilon_a, d\varepsilon_0$ . Demnach darf die Verdrehung  $\varphi_k$  eines beliebigen Querschnitts  $k$  des Stabes als die Querkraft  $Q_{w,k}$  der Drehungsgewichte  $d\psi$ , die Ausbiegung  $w_k$  als das statische Moment  $M'_{w,k}$  von  $A_w$ , den senkrecht gerichteten Drehungsgewichten  $d\psi$  und den waagrecht gerichteten Dehnungsgewichten  $d\varepsilon_0$ , die Ausbiegung  $u_k$  als das statische Moment  $M''_{w,k}$  derselben, jedoch um  $90^\circ$  im Sinne von  $\delta\alpha$  gedrehten Kräftegruppe  $d\psi, d\varepsilon_0$  berechnet werden.

Die Dehnungsgewichte  $\varepsilon_a, d\varepsilon_0$  sind im Vergleich zu den Drehungsgewichten  $d\psi$  meist ohne großen Einfluß auf die Verschiebungen  $w_k, u_k$ . Sie werden daher in der Regel vernachlässigt. Die  $EJ_c$ -fachen Verschiebungen werden für  $\Delta t = 0$  folgendermaßen bezeichnet:

$$EJ_c w_k = w_k^*, \quad EJ_c u_k = u_k^*, \quad EJ_c \varphi_a = \varphi_a^*,$$

$$w_k^* = w_a^* + (x_k - x_a) \varphi_a^* - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) M \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \quad (227)$$

$$u_k^* = u_a^* + (y_k - y_a) \varphi_a^* - \int_{y_a}^{y_k} (y_k - y) M \frac{J_c}{J \sin \alpha} dy, \quad (228)$$

$$\text{für } w_a = w_b = 0 \text{ ist } \varphi_a^* = \varphi_{a,0}^* = \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) M \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx. \quad (229)$$

Für die zeichnerische und rechnerische Auswertung der Ansätze dienen die Angaben auf S. 125, so daß

$$M \frac{J_c}{J \cos \alpha} = w', \quad M \frac{J_c}{J \sin \alpha} = w''$$

wiederum ideale Streckenlasten bedeuten, welche nach (206) und (207) durch zwei Gruppen äquivalenter Einzellasten  $\mathfrak{B}'_m, \mathfrak{B}''_m$  ersetzt werden. Mit diesen wird dann

$$\text{für } w_a = w_b = 0 \quad \varphi_{a,0}^* = A'_w; \quad \varphi_{k,0}^* = Q'_{w,k}; \quad w_{k,0}^* = M'_{w,k}; \quad u_{k,0}^* = M''_{w,k}$$

nach bekannten Regeln (Abschn. 13) numerisch berechnet oder graphisch durch Kraft- und Seileck bestimmt. Um hierbei  $w_k$  und  $u_k$  in natürlicher Größe anzugeben, wird nach S. 125 die Polweite  $H_w = EJ_c/n$  gewählt. Da unter den Voraussetzungen der Rechnung  $t, \Delta t = 0, \varepsilon_0 \approx 0$ , also nach (218b)

$$\frac{dw}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = 1 \quad (230)$$

ist, stehen einander zugeordnete Tangenten der beiden Biegelinien, also auch einander zugeordnete Seilstrahlen der beiden Richtungsbüschel senkrecht aufeinander, so daß die waagerechte Biegelinie als Normalenzug zu den Tangenten der senkrechten Biegelinie oder zu den Seilstrahlen ihres Richtungsbüschels gezeichnet werden kann.

**Längenänderung einer Stabzugsehne.** Zur Bestimmung der Längenänderung einer Stabzugsehne wird die  $x$ -Achse mit dieser zusammengelegt. Dann ist in (224)

$$y_k = y_b, y_b = y_a = 0, y_b - y = -y, \\ x_a = 0, x_k = x_b = l \quad (\text{Abb. 121})$$

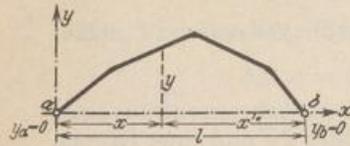


Abb. 121.

$$u_b - u_a = \Delta l = l \varepsilon_a + \int_0^l y d\psi + \int_0^l (l-x) d\varepsilon_0. \quad (231)$$

**Biegelinie des Dreigelenkbogens.** Die Biegelinie kann ebenfalls nach der Anweisung auf S. 133 gezeichnet werden, wenn die Verschiebungen  $u_c, w_c$  des Gelenkpunktes  $c$  oder die relative Drehung  $\psi_c$  der beiden Bogenschenkel bekannt sind. Diese wird dann als Drehungsgewicht  $\mathfrak{B}_c$  ebenso verwendet wie die übrigen Drehungsgewichte  $\mathfrak{B}'_m, \mathfrak{B}''_m$  (Abb. 122). Aus diesem Grunde kann  $\psi_c = \mathfrak{B}_c$  auch aus der als Stützenbedingung vorgeschriebenen Längenänderung  $\Delta l$  der Sehne des Dreigelenkbogens berechnet werden. Bei unverschieblichen Widerlagern ist  $\Delta l = 0$  und

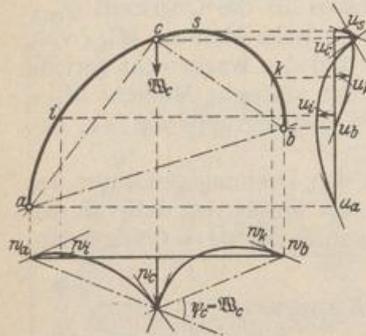


Abb. 122.  
Bezeichnungen s. Abb. 121;  
 $y_c = f \perp ab, x'_c = l_2$

$$\left. \begin{aligned} \psi_c &= -\frac{1}{f} \left( l \varepsilon_a + \int_0^l y d\psi + \int_0^l (l-x) d\varepsilon_0 \right); \\ \varphi_a &= \frac{1}{l} \left( \psi_c l_2 + \int_0^l (l-x) d\psi - \int_0^l y d\varepsilon_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

**Ableitung aus einem Differenzenansatz.** Die Verschiebung  $w_m$  und  $u_m$  einer ausgezeichneten Punktfolge  $\dots m, m+1 \dots$  des Stabes können auch als die Unbekannten von Differenzgleichungen abgeleitet werden. Der Stab wird in diesem Falle durch eine Stabkette aus geraden Elementen  $\dots s_m, s_{m+1} \dots$  ersetzt, welche konstantes Trägheitsmoment  $\dots J_m, J_{m+1} \dots$  besitzen und gelenkig verbunden sind (Abb. 123). An dem Spannungszustand ändert sich nichts, wenn an der Gelenkkette neben der vorgegebenen Belastung  $\mathfrak{B}$  die Biegemomente des Stabes in den Punkten  $\dots m, m+1 \dots$  als äußere Kräfte wirken. Die Belastung besteht dann aus zwei Teilen.

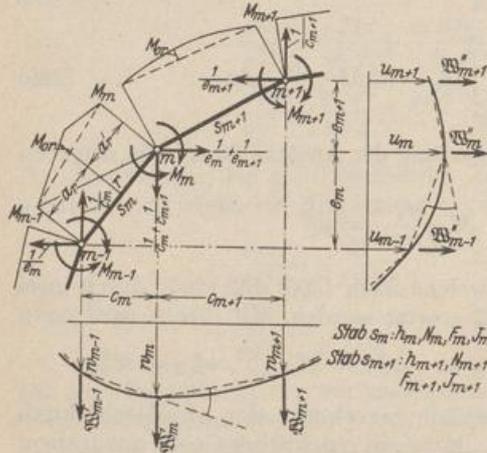


Abb. 123.

Die Endpunkte der senkrechten und waagerechten Verschiebungen  $w_m, u_m$  der Gelenkpunkte  $m$  werden durch je einen Geradenzug miteinander verbunden, dessen Elemente Sehnen der Biegelinien des Stabes sind. Ihre Richtungen schließen Winkel  $\mathfrak{B}'_m, \mathfrak{B}''_m$  ein, die aus den Verschiebungen  $w_m, u_m$  berechnet werden können.

Die Belastung besteht dann aus zwei Teilen.

$$\mathfrak{B}'_m = \frac{w_m - w_{m-1}}{c_m} - \frac{w_{m+1} - w_m}{c_{m+1}}, \quad \mathfrak{B}''_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{e_m} - \frac{u_{m+1} - u_m}{e_{m+1}}. \quad (233)$$

Werden beide Seiten des Ansatzes durch Multiplikation mit der Belastungseinheit des anliegenden Sehnenpaares (in mt) erweitert, so ist der Ausdruck für die virtuelle Arbeit auf der rechten Seite das Produkt der virtuellen äußeren Kräfte  $1/c_m, 1/c_{m+1}$

und  $1/e_m, 1/e_{m+1}$  mit den senkrechten oder waagerechten Verschiebungen  $w_m, u_m$  (Abb. 123). Sie kann in beiden Fällen als Funktion der Stabdrehwinkel  $\vartheta_m, \vartheta_{m+1}$  und der Längenänderung der Stäbe  $\Delta s_m, \Delta s_{m+1}$  angegeben werden.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}'_m &= \vartheta_m - \vartheta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \alpha_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \alpha_{m+1}, \\ \mathfrak{B}''_m &= \vartheta_m - \vartheta_{m+1} + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{ctg} \alpha_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{ctg} \alpha_{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Die Differenz der Stabdrehwinkel, gleichbedeutend mit der Änderung der Stabzugwinkel, wird für die beiden Belastungsanteile getrennt berechnet. Der Anteil  $\vartheta_{m,1} - \vartheta_{(m+1),1} = \psi_{m,1}$  wird von den Biegemomenten  $\dots M_m, M_{m+1} \dots$ , nimmend äußeren Kräften der Stabketten, hervorgerufen (Tabelle 12). Die Belastung  $\mathfrak{P}$  der einzelnen Elemente  $s_m, s_{m+1}$  erzeugt den Anteil  $(\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \psi_{m,2}$ . Jedes Element wirkt nach Abb. 123 als frei drehbar gestützter Stab.

$$\psi_m = \psi_{m,1} + \psi_{m,2}; \quad M_r = M_{m-1} \frac{a'_r}{s_m} + M_m \frac{a_r}{s_m} + M_{0r}; \quad (235)$$

$$6EJ_c (\vartheta_{m,1} - \vartheta_{(m+1),1}) = \frac{J_c}{J_m} \frac{c_m}{\cos \alpha_m} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}} \frac{c_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} (2M_m + M_{m+1}); \quad (236)$$

$$6EJ_c (\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{J_m} \frac{c_m}{\cos \alpha_m} \int_m M_{or} \xi d\xi + \frac{J_c}{J_{m+1}} \frac{c_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} \int_{m+1} M_{or} \xi' d\xi'. \quad (237)$$

Der Ansatz kann nach S. 96 ff. auch für stetig veränderliches Trägheitsmoment der Elemente  $s_m$  angeschrieben werden. Besteht  $\mathfrak{P}$  aus einer Gruppe von Einzellasten, deren Angriffspunkte mit  $\dots m, m+1 \dots$  zusammenfallen, so ist  $\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2} = \psi_{m,2} = 0$  und mit Berücksichtigung der Längskräfte  $N$  und einer Temperaturänderung  $t, \Delta t$

$$\begin{aligned} 6EJ_c \mathfrak{B}'_m &= \frac{J_c}{J_m} \frac{c_m}{\cos \alpha_m} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}} \frac{c_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} (2M_m + M_{m+1}) \\ &\quad - 6 \frac{J_c}{F_c} \left( N_m \frac{F_c}{F_m} \operatorname{tg} \alpha_m - N_{m+1} \frac{F_c}{F_{m+1}} \operatorname{tg} \alpha_{m+1} \right) \\ &\quad - 6EJ_c \left[ \alpha_t t (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) - \frac{\alpha_t \Delta t}{2} \left( \frac{s_m}{h_m} + \frac{s_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \right], \end{aligned} \quad (238)$$

$$\begin{aligned} 6EJ_c \mathfrak{B}''_m &= \frac{J_c}{J_m} \frac{c_m}{\cos \alpha_m} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}} \frac{c_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} (2M_m + M_{m+1}) \\ &\quad + 6 \frac{J_c}{F_c} \left( N_m \frac{F_c}{F_m} \operatorname{ctg} \alpha_m - N_{m+1} \frac{F_c}{F_{m+1}} \operatorname{ctg} \alpha_{m+1} \right) \\ &\quad + 6EJ_c \left[ \alpha_t t (\operatorname{ctg} \alpha_m - \operatorname{ctg} \alpha_{m+1}) + \frac{\alpha_t \Delta t}{2} \left( \frac{s_m}{h_m} + \frac{s_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (239)$$

Die Integrale für  $\vartheta_{m,2}, \vartheta_{(m+1),2}$  sind in der Tabelle 12 enthalten und werden hier für lotrechte Einzellasten und lotrechte, gleichförmige Streckenlast wiederholt:

Einzellasten:

$$6EJ_c (\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{J_m} \frac{c_m^2}{\cos \alpha} \sum_m P \omega_D + \frac{J_c}{J_{m+1}} \frac{c_{m+1}^2}{\cos \alpha_{m+1}} \sum_{m+1} P \omega'_D. \quad (240)$$

Gleichförmige Streckenlast:

$$6EJ_c (\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{4J_m} \frac{c_m^3}{\cos^2 \alpha_m} \hat{p}_m + \frac{J_c}{4J_{m+1}} \frac{c_{m+1}^3}{\cos^2 \alpha_{m+1}} \hat{p}_{m+1}. \quad (241)$$

Sind die Abschnitte  $s_m$  des Stabzugs gekrümmt, so erzeugen die Längskräfte Biegemomente, welche bei der Berechnung der Stabdrehwinkel in einem Anteil  $\vartheta_{m,3}$  berücksichtigt werden. Ähnliches gilt von der Entwicklung der Biegelinie für den Gurt eines mehrteiligen Stabwerks. Bei geraden Abschnitten  $s_m$  sind die Beiträge der Längskräfte  $N_m$  zu den Stabdrehwinkeln in der Regel so unbedeutend, daß sie vernachlässigt werden. In diesem Falle ist  $\mathfrak{B}'_m = \mathfrak{B}''_m$ .

Die Größen  $\mathfrak{W}'_m, \mathfrak{W}''_m$  sind Kontingenzwinkel der Sehnen der Biegelinien  $w, u$ . Um sie in einem Richtungsbüschel zusammenzufassen, werden ihre positiven Werte als gerichtete Strecken  $\mathfrak{W}'_m, \mathfrak{W}''_m$  im Sinne von  $\vec{w}, \vec{u}$  auf einer Parallelen im Abstand 1 vom Pol des Richtungsbüschels und zwar in der Regel mit dem  $6 EJ_c$ -fachen Betrage aufgetragen. Wird daher bei einem Längenmaßstab 1:n die Polweite  $6 EJ_c/n$  an Stelle der Einheit verwendet, so liefert das Seileck wie auf S. 125 unter Beachtung der Stützenbedingungen die absoluten Verschiebungen in natürlicher Größe. Ebenso gelten die übrigen Bemerkungen der S. 125 zur rechnerischen Lösung der Aufgabe. Die Längenänderung der Stabzugssehne ist z. B.

$$\Delta l = \sum \mathfrak{W}''_m y_m \quad (\text{Abb. 121}). \quad (242)$$

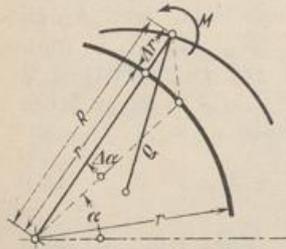


Abb. 124.

**Die Biegelinie eines gekrümmten Trägers mit  $r = \text{const}$ .** Der Verschiebungszustand eines Bogenträgers mit  $r = \text{const}$  läßt sich einfacher durch die radiale Ausbiegung  $\Delta r (r \rightarrow r + \Delta r)$  beschreiben (Abb. 124). Die Biegelinie mit  $\rho$  als Krümmungshalbmesser wird dann auf Polarkoordinaten  $(R, \alpha + \Delta\alpha, \Delta\alpha \approx 0)$  bezogen. Nach bekannten Regeln der Geometrie ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{R^2 + 2R\rho - R\rho''}{(R^2 + R\rho^2)^{3/2}}; \quad R = r + \Delta r, \\ R' &= \frac{dR}{d\alpha} = \Delta r', \quad R'' = \frac{d^2R}{d\alpha^2} = \Delta r''. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung entsteht daher die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{-\Delta r - \Delta r''}{r^2} = \frac{1}{EJ} M(\alpha). \quad (244)$$

Um ihre Lösung mit den Ergebnissen (224) und (225) zu vergleichen, wird  $\Delta r$  durch Integration nach bekannten Regeln berechnet (Abb. 125).

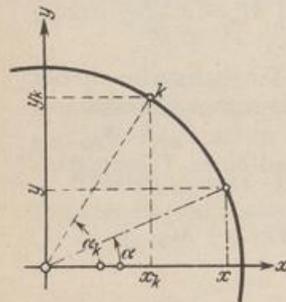


Abb. 125.

$$\Delta r = \left( C_1 - \int_0^\alpha M \frac{r^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha \right) \cos \alpha + \left( C_2 + \int_0^\alpha M \frac{r^2}{EJ} \cos \alpha d\alpha \right) \sin \alpha. \quad (245)$$

$$r d\alpha = ds, \quad r \sin \alpha = r \sin \alpha_k - (y_k - y), \quad r \cos \alpha = r \cos \alpha_k + (x - x_k),$$

$$\Delta r_k = \left( C_1 + \int_0^{y_k} M \frac{y_k - y}{EJ} ds \right) \cos \alpha_k + \left( C_2 + \int_0^{x_k} M \frac{x - x_k}{EJ} ds \right) \sin \alpha_k, \quad (246)$$

$$\Delta r_k = \Delta x_k \cos \alpha_k + \Delta y_k \sin \alpha_k.$$

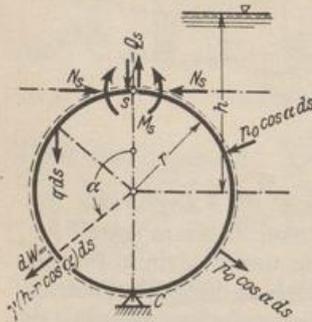


Abb. 126.

**Spannungszustand in Rohren und Ringen.** Um die Differentialgleichung (244) zur eindimensionalen Berechnung der Spannungen in Rohren und Ringen zu verwenden, werden die statisch unbekanntes Schnittkräfte  $M_s, N_s, Q_s$  im Scheitelquerschnitt (Abb. 126) zunächst bekannt angenommen und zu den Integrationskonstanten gezählt. Bei einer zur senkrechten Achse symmetrischen Belastung und Punktstützung in C nach Abb. 126 sind  $Q_s = 0$  und mit  $-\pi < \alpha < \pi$  die

Biegemomente aus Eigengewicht  $\gamma_0 \delta = q$ :

$$M = (M_s + N_s r - q r^2) - (N_s r - q r^2) \cos \alpha + q r^2 \alpha \sin \alpha;$$

Biegemomente aus Wasserdruck  $\gamma(h - r \cos \alpha)$ :

$$M = (M_s + N_s r - \gamma h r^2) - (N_s r - \gamma h r^2) \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma r^3 \alpha \sin \alpha ;$$

Biegemomente aus einer zur waagerechten Achse antisymmetrischen Windbelastung  $p = p_0 \cos \alpha$ :

$$M = (M_s + N_s r) - N_s r \cos \alpha + \frac{1}{2} p_0 r^2 \alpha \sin \alpha .$$

Mit der Abkürzung für  $M = A_0 + A_1 \cos \alpha + A_2 \alpha \sin \alpha$  wird aus (245)

$$\frac{EJ}{r^2} \Delta r_k = A_0 + \frac{1}{4} (2A_1 + A_2) \alpha_k \sin \alpha_k - \frac{A_2}{4} \alpha_k^2 \cos \alpha_k + (C_1 - A_0) \cos \alpha_k + C_2 \sin \alpha_k, \quad (247)$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} \Delta r'_k &= \frac{1}{4} (2A_1 + A_2) (\sin \alpha_k + \alpha_k \cos \alpha_k) - \frac{A_2}{4} (2\alpha_k \cos \alpha_k - \alpha_k^2 \sin \alpha_k) \\ &\quad - (C_1 - A_0) \sin \alpha_k + C_2 \cos \alpha_k. \end{aligned} \quad (248)$$

Die vier Konstanten  $M_s, N_s, C_1, C_2$  der Lösung sind zunächst durch drei Bedingungen:

$$\Delta r' = 0 \text{ für } \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Delta r = 0, \quad \Delta r' = 0 \text{ für } \alpha = \pi$$

bestimmt. Wird außerdem die Längenänderung der Mittelebene des Rohres vernachlässigt, so gilt als vierte Bedingung  $\int_0^\pi \Delta r d\alpha = 0$ . Daher ist

$$A_0 = -A_2, \quad A_1 = \frac{1}{2} A_2, \quad -C_1 = \frac{8 - \pi^2}{4} A_2, \quad C_2 = 0.$$

Eigengewicht:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{q r^2}{2}, & N_s &= +\frac{q r}{2}, \\ M &= -q r^2 (1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha), & \max M &= +0,6408 q r^2, \\ \Delta r &= -\frac{q r^4}{EJ} \left( 1 - \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha \right); \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Wasserdruck:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{\gamma r^3}{4}, & N_s &= +\frac{\gamma r}{4} (4h - r), \\ M &= -\frac{\gamma r^3}{2} \left( 1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right), & \max M &= +0,3204 \gamma r^3, \\ \Delta r &= \frac{\gamma r^5}{2EJ} \left( 1 - \left( \frac{\pi^2 - \alpha^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right); \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Windbelastung nach Abb. 126:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{1}{4} p_0 r^2, & N_s &= -\frac{1}{4} p_0 r, \\ M &= -\frac{1}{2} p_0 r^2 (1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Das Biegemoment erhält daher mit  $\mu_1 = 1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$  (Abb. 127) die Form von  $M = -\mu_1 R r / 2\pi$ . Die Biegemomente unterscheiden sich nur durch den Betrag der Resultierenden  $R$  aus der Belastung. Dieser ist bei Eigengewicht  $R = 2\pi r q$ , Wasserinhalt  $R = \pi \gamma r^2$ , Wind  $R = \pi p_0 r$ .

Die Lösung gelingt dank der besonderen Stützung ohne Unterteilung des Integrationsbereiches  $\pi$ . Um daraus den Spannungszustand  $M^*$  für die normale Abstützung (Abb. 128) zu entwickeln, werden geeignete Gleichgewichtsgruppen von

Kräften mit den Biegemomenten  $\bar{M}$  überlagert, für welche die Schnittkräfte nach S. 195 berechnet werden. Auf diese Weise entstehen die folgenden Ergebnisse:

a) Senkrechte Belastung:  $P = R/2$  (Abb. 128).

Eigengewicht:

$$R = 2\pi r q;$$

Wasserinhalt:

$$R = \pi \gamma r^2.$$

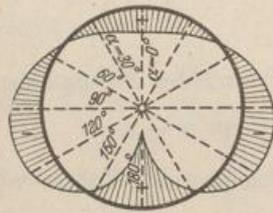
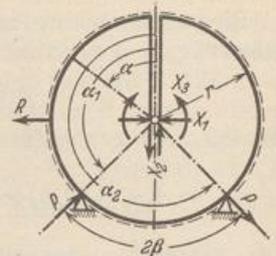
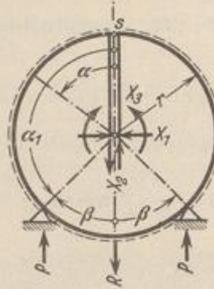


Abb. 127.  
Funktion:  $\mu_1$ .

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\mu_1$	+0,500	-0,571	+1,500

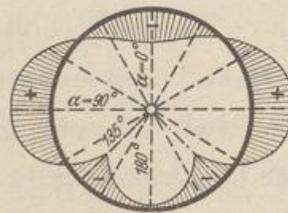


Abb. 128.  
Funktion:  $(\mu_2 - \mu_1)$  für  $(\beta = \frac{\pi}{4})$ .

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$
$\mu_2 - \mu_1$	-0,263	+0,308	-0,304

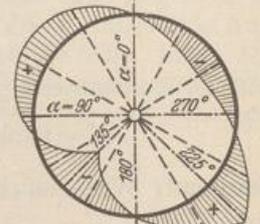


Abb. 129.  
Funktion:  $\mu_3$  für  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

$\alpha$	$30^\circ$	$60^\circ$	$135^\circ$
$\mu_3$	+0,596	+0,771	-1,462

$$0 < \alpha < \alpha_1: M_0 = 0, \quad \alpha_1 < \alpha < \pi: M_0 = +Pr(\sin \beta - \sin \alpha),$$

$$X_1 = -\frac{1}{\pi} P \sin^2 \beta, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = -\frac{1}{\pi} Pr(\beta \sin \beta + \cos \beta - 1).$$

$$M_s = +\frac{1}{2\pi} Rr(1 + \sin^2 \beta - \beta \sin \beta - \cos \beta), \quad N_s = X_1.$$

$$\bar{M} = M_0 + M_s + N_s r(1 - \cos \alpha);$$

$$M^* = M + \bar{M} = (\mu_2 - \mu_1) R \cdot r / 2\pi;$$

$$0 < \alpha < \alpha_1: \mu_2 = 1 - \beta \sin \beta - \cos \beta + \sin^2 \beta \cos \alpha;$$

$$\alpha_1 < \alpha < \pi: \mu_2 = 1 - \beta \sin \beta - \cos \beta + \sin^2 \beta \cos \alpha + \pi(\sin \beta - \sin \alpha).$$

(252)

b) Antimetrische Belastung durch Wind:  $R = \pi p_0 r$  (Abb. 129). Die Stützung ist ebenfalls antimetrisch  $P = R/2 \sin \beta$ .

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_1: M_0 = +Rr \cos \alpha; \quad \alpha_1 < \alpha < \alpha_2: M_0 = -Pr \sin(\alpha_2 - \alpha);$$

$$X_1 = +\frac{\pi}{4} p_0 r, \quad X_2 = +\frac{1}{2} p_0 r \beta \operatorname{ctg} \beta, \quad X_3 = +\frac{1}{2} p_0 r^2,$$

$$M_s = -\frac{1}{2} p_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad N_s = +\frac{\pi}{4} p_0 r, \quad Q_s = +\frac{1}{2} p_0 r \beta \operatorname{ctg} \beta$$

$$\bar{M} = M_0 + M_s + N_s r(1 - \cos \alpha) + Q_s r \sin \alpha.$$

$$M^* = M + \bar{M} = \mu_3 \cdot R \cdot r / 2\pi = \mu_3 \frac{p_0 r^2}{2};$$

$$-\alpha_1 < \alpha < +\alpha_1: \mu_3 = (\beta \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{2}) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha;$$

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2: \mu_3 = (\beta \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{2}) \sin \alpha + \alpha \cos \alpha - \pi(\operatorname{ctg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha).$$

(253)

In (253) bedeutet  $M$  das Biegemoment nach (251) für  $\alpha \rightarrow \alpha + 90^\circ$  und  $-\pi < (\alpha + 90^\circ) < \pi$ .

**Die wirkliche Verschiebung der Punkte des Stabzugs.** Die wirklichen Verschiebungen  $u_m \uparrow w_m$  der Punkte  $m$  des Stabzugs sind durch die Biegelinien für die senkrechte und waagerechte Richtung bestimmt. Sie können aber auch unmittelbar aufgezeichnet werden, nachdem der Stab in einen Stabzug mit  $n$  geraden Elementen  $s_1 \dots s_m \dots s_n$  unterteilt worden ist, deren Verschiebungskomponenten  $\Delta s_m, \vartheta_m$  berechnet sind. Dabei ergeben sich die Stabdrehwinkel  $\vartheta_m$  aus  $\vartheta_1$  und den Änderungen  $\Delta \varphi_m$  der Stabzugwinkel. Der Verschiebungsvektor des Endpunktes  $m$  des Stabes  $s_m$  wird aus der Verschiebung des Endpunktes  $(m-1)$ , der Längenänderung  $\Delta s_m$  und der Bogenlänge  $s_m \vartheta_m = \varrho_m$  erhalten (Abb. 130). Diese ist bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung als Abschnitt der Tangente senkrecht zu  $s_m$ . Der Verschiebungsplan kann daher durch Wiederholung dieser Konstruktion unabhängig vom Maßstab des Lageplans in einem Polplan entwickelt werden. In diesem muß daher die Verschiebung eines Punktes und die Verdrehung eines anschließenden Stabes bekannt sein oder angenommen werden. In der Regel ist das letztere nötig, so daß zunächst drei geeignete Parameter des Plans Null gesetzt werden. Ihre wirkliche Größe wird nachträglich aus einer Drehung des Stabzugs derart bestimmt, daß die Stützenbedingungen erfüllt sind. Die Punkte beschreiben dabei Wege, die den zweiten Verschiebungsplan bilden (Abb. 131).

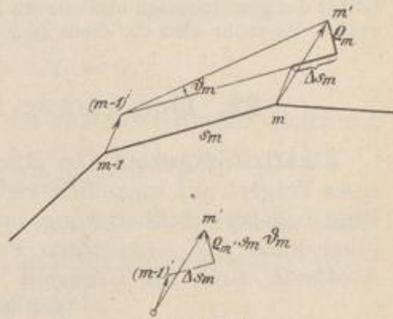


Abb. 130.

$(m-1) \overline{(m-1)}$  Verschiebung von  $(m-1)$ ,  
 $m \overline{m'}$  Verschiebung von  $m$ ,  
 $\varrho_m = (s_m + \Delta s_m) \vartheta_m \approx s_m \vartheta_m$

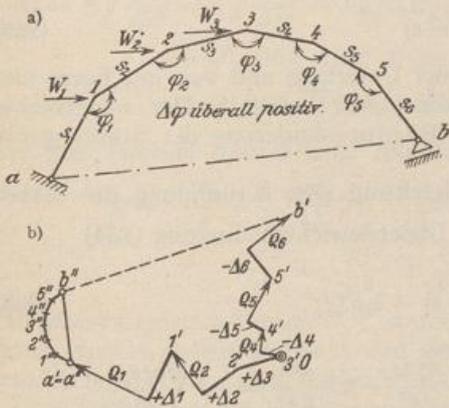


Abb. 131.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \Delta \varphi_2 + \Delta \varphi_1, & \vartheta_4 &= -\Delta \varphi_3, \\ \vartheta_2 &= \Delta \varphi_2, & \vartheta_5 &= -(\Delta \varphi_2 + \Delta \varphi_4), \\ \vartheta_3 &= 0, & \vartheta_6 &= -(\Delta \varphi_3 + \Delta \varphi_4 + \Delta \varphi_5). \end{aligned}$$

Berechnet sind  $\Delta s$  und  $\Delta \varphi$  als Änderungen der Stabzugwinkel  $\varphi$ .

Annahmen über die für die Entwicklung des ersten Planes notwendigen Formänderungen:

$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \vartheta_3 = 0.$$

$b''b' \parallel$  zur Rollenbewegung in  $b$ ,  $a''b'' \perp ab$ .

Abb. 131.

Hiernach liefert der erste Plan für Punkt 5 die Verschiebung  $\vec{O}5'$ , für den Punkt  $a$  die Verschiebung  $\vec{O}a'$ , für den Punkt  $b$  die Verschiebung  $\vec{O}b'$ . Um die Stützenbedingung  $a$  zu erfüllen, tritt zu allen Verschiebungen des ersten Planes der Verschiebungsvektor  $\vec{a'O}$ , so daß für  $b$  die Verschiebung  $\vec{a'O} + \vec{O}b' = \vec{a'b'}$  erhalten wird. Da jedoch die wirkliche Verschiebung von  $b$  parallel zur Rollenbewegung gerichtet ist, treten zu den Verschiebungen  $\vec{a'5'}$  usw.  $\vec{a'b'}$  die Wege aus einer Drehung des Stabzugs um den Punkt  $a$ . Der Weg  $\vec{b''a''}$  des Punktes  $b$  steht senkrecht zum zugeordneten Fahrstrahl  $ab$ . Die Länge des Drehweges  $\vec{b''a''}$  ist bestimmt durch die bekannte Richtung der resultierenden Verschiebung  $\vec{b''b'}$ . Mit  $\vec{a'a''}$  und  $\vec{b''b'}$  ist

der zweite Verschiebungsplan als eine zur Grundfigur ähnliche, um  $90^\circ$  gedrehte Figur ( $a'' \dots 3'' \dots b''$ ) bestimmt. Die wirkliche Verschiebung des Punktes  $k$  ist daher  $\vec{k''k'}$ .

Boussinesq, J.: Compt. rend. Bd. 96 (1883) S. 843. — Forchheimer, Ph.: Über die Festigkeit weiter Rohre. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1904 S. 133. — Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre 4. Aufl. 1913. — Mayer, R.: Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Z. Math. Physik Bd. 61 (1913) S. 246. — Derselbe: Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 216.

## 22. Der gerade Stab auf elastischer Unterlage.

**Elastizitätsgesetz.** Der durchgehend elastisch gestützte Stab kann als Grenzfall eines Trägers auf unendlich vielen elastisch senkbaren Stützen angesehen werden. Eine beliebige Teilbelastung, unter anderem die Einzellast  $P$  über einer Stütze, führt auch zur senkrechten Verschiebung der benachbarten Stützpunkte. Ihre Abstände sind im Grenzfall verschwindend klein, so daß das Gleichgewicht

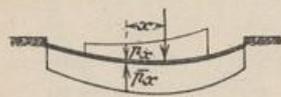


Abb. 132.

der Schnittkräfte für einen infinitesimalen Abschnitt  $dx$  des Stabes nach (48) angegeben werden kann:

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = [p(x) - \bar{p}(x)] b. \quad (254)$$

$b$  ist die Breite des Stabes,  $p(x)$  die Auflast und  $\bar{p}(x)$  der auf die Flächeneinheit bezogene Widerstand der Unterlage. Dieser ist eine Funktion der Ausbiegung des Stabes und der physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels und wird nach der Begründung in Abschn. 7 mit

$$\bar{p}(x) = c w(x) \quad (255)$$

eingeführt.  $c$  ist ein von den Eigenschaften der Unterlage und von der Form und Größe der stützenden Fläche abhängiger konstanter Leitwert. Der waagerechte Widerstand in der Grenzsicht gegen eine Richtungsänderung der Stabtangente wird nicht berücksichtigt.

**Ansatz und Lösung der Differentialgleichung.** Die Krümmung des Stabes ist nach (209)  $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ , und damit die Gleichgewichtsbedingung (254)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c b w = b p(x), \quad (256)$$

oder

$$\frac{d^4 M}{dx^4} = -b \frac{d^2}{dx^2} [p(x) - \bar{p}(x)], \quad \frac{d^4 M}{dx^4} - c b \frac{d^2 w}{dx^2} = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}.$$

also

$$\frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{c b}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (257)$$

Die Differentialquotienten werden bei veränderlichem Trägheitsmoment oder bei wechselndem Leitwert  $c$  am einfachsten durch Differenzenquotienten ersetzt und nach (212) zu linearen algebraischen Gleichungen entwickelt. Die Anzahl der unbekanntenen Einsenkungen  $w_k$  oder der Biegemomente  $M_k$  ist ebenso groß wie die Anzahl der verfügbaren Bedingungen.

Bei konstantem Trägheitsmoment ist

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + c b w = b p(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{b c}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (258)$$

Die Lösung  $w, M$  besteht aus einem partikulären Integral  $w_0, M_0$  der vollständigen