



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Ableitung der Differentialgleichung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Symmetrie ist  $w_1 = w_3$ , so daß die Differenzgleichungen nur für die Punkte 1 und 2 aufgestellt werden (Abb. 118).

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3,$$

$$\frac{p}{EJ} \Delta x^4 = w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4.$$

Hierzu treten die Randbedingungen  $w_0 = 0$ ,  $w_{-1} = 3w_1 - \frac{1}{2}w_2$ . Die Verschiebungen  $w_1$  und  $w_2$  ergeben sich daher aus den folgenden beiden Gleichungen.

$$10w_1 - 4,5w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4, \quad -8w_1 + 6w_2 = \frac{p}{EJ} \Delta x^4$$

mit

$$w_1 = 0,00171 \frac{p l^4}{EJ}, \quad w_2 = 0,00293 \frac{p l^4}{EJ}.$$

Die Momente werden mit  $w_1$  und  $w_2$  nach (212) berechnet.

$$\text{Trägermitte: } M_2 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_1 - 2w_2 + w_3) = \frac{15}{16} \frac{p l^2}{24} \approx \frac{p l^2}{24}. \quad (216)$$

$$\text{Auflager: } M_0 = -\frac{EJ}{\Delta x^2} (w_{-1} - 2w_0 + w_1) = -\frac{33}{32} \frac{p l^2}{12} \approx -\frac{p l^2}{12}. \quad (217)$$

Die Näherungsrechnung führt also trotz der geringen Anzahl der Intervalle auch für die Schnittkräfte zu relativ guten Ergebnissen, da die Unterschiede zwischen den Differential- und Differenzenquotienten selbst dann noch klein sind. Die Untersuchung muß nur im Bereiche von singulären Stellen der Funktion mit einer engeren Teilung wiederholt werden.

Ritter, A.: Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken. Zürich 1883. — Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik 3. Aufl. Berlin 1928. — Hencky, H.: Die numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 58. — Marcus, H.: Armierter Beton 1919 S. 107; außerdem: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin 1924. — Runge, C., u. H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924. — Nádai, A.: Die elastischen Platten. Berlin 1925.

## 21. Die Biegelinie von gekrümmten Stäben und Stabzügen.

Die ebene Verschiebung eines Querschnitts wird auch bei gekrümmten Stäben als brauchbare Annahme verwendet, wenn eine Symmetrieebene vorhanden ist, die mit der Kraftebene zusammenfällt. Sie wird dann ebenso wie beim geraden Stabe durch die bezogene Längenänderung  $\epsilon_0$  der Stabachse und durch die gegenseitige Verdrehung  $d\psi$  zweier benachbarter Querschnitte beschrieben. Die Veränderlichkeit von  $ds$  mit  $z$  schließt hier zwar die lineare Abhängigkeit der Normalspannungen  $\sigma_x(z)$  aus. Die Spannungen  $\sigma$ ,  $\tau$  und die Verzerrungskomponenten  $\epsilon_0$ ,  $d\psi$  sind aber nach (70), (71) trotzdem wieder Funktionen der Schnittkräfte  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  und der Temperaturänderung  $t$ ,  $\Delta t = t_i - t_a$ .

**Ableitung der Differentialgleichung.** Während sich die Querschnitte gerader Stäbe durch die Belastung mit großer Genauigkeit winkelrecht zur Stabachse bewegen, sind zur Beschreibung der Verschiebung der Querschnitte gekrümmter Stäbe zwei Komponenten  $u$ ,  $w$  notwendig. Sie werden hier im Gegensatz zu der früheren Definition waagrecht und senkrecht angenommen, um das für die geometrische Darstellung von Stabzügen übliche Koordinatensystem (Abb. 120) beizubehalten. In diesem Fall ist

$$dy = ds \sin \alpha, \quad dx = ds \cos \alpha. \quad (218a)$$

Diese geometrischen Beziehungen ändern sich durch die Belastung des Stabes.

$$y \rightarrow y + \delta y, \quad x \rightarrow x + \delta x, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \delta \alpha, \quad ds \rightarrow ds + \delta(ds).$$

9\*

Nach Abb. 120 ist

$$\delta x = u, \quad \delta y = -w, \quad \delta \alpha = -\varphi, \quad \delta(d\alpha) = d(\delta\alpha) = d\psi.$$

Durch Variation von (218a) entsteht

$$\left. \begin{aligned} \delta(dy) &= \delta(ds) \sin \alpha + ds \cos \alpha \delta \alpha = d(\delta y) = -dw, \\ \delta(dx) &= \delta(ds) \cos \alpha - ds \sin \alpha \delta \alpha = d(\delta x) = du, \\ \frac{d}{dx}(\delta y) &= \varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha + \delta \alpha, \quad \frac{d}{dy}(\delta x) = \varepsilon_0 \operatorname{ctg} \alpha - \delta \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (218b)$$

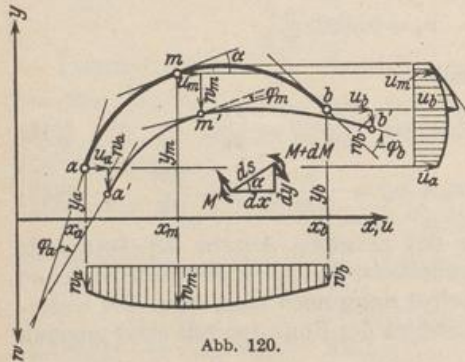


Abb. 120.

Damit sind die Differentialgleichungen für die senkrechte und waagerechte Ausbiegung gefunden:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\delta \alpha) + \frac{d}{dx}(\varepsilon_0 \operatorname{tg} \alpha); \\ -\frac{d^2 u}{dy^2} &= \frac{d}{dy}(\delta \alpha) - \frac{d}{dy}(\varepsilon_0 \operatorname{ctg} \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Die Verzerrungskomponenten  $d(\delta\alpha) = d\psi$  und  $\varepsilon_0$  sind in Abschnitt 10 für den gekrümmten Stab als Funktionen der Schnittkräfte abgeleitet worden. Bei  $\rho \gg h$  ist jedoch mit großer Genauigkeit ebenso wie für den geraden Stab

$$d\psi = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) ds, \quad d\varepsilon_0 = d \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right)$$

also

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right) \frac{dy}{dx} \right], \quad (220)$$

$$-\frac{d^2 u}{dy^2} = \left( \frac{M}{EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{d}{dy} \left[ \left( \frac{N}{EF} + \alpha_t t \right) \frac{dx}{dy} \right]. \quad (221)$$

Der Ansatz wird bei gleichbleibender Temperatur ( $t = 0, \Delta t = 0$ ) und kleinem  $\varepsilon_0$  meist in der folgenden Abkürzung verwendet:

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EJ \cos \alpha}; \quad -\frac{d^2(EJ_\varepsilon w)}{dx^2} = M \frac{J_\varepsilon}{J \cos \alpha}, \quad (222)$$

$$-\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{M}{EJ \sin \alpha}; \quad -\frac{d^2(EJ_\varepsilon u)}{dy^2} = M \frac{J_\varepsilon}{J \sin \alpha}. \quad (223)$$

Die Ausbiegungen  $u_k, w_k$  werden daraus formal ebenso wie in (199) berechnet oder durch Integration von (220) und (221) nach (201) entwickelt. Die Integrationskonstanten sind wie in (201) durch die Verschiebungskomponenten  $u_a, w_a, \varphi_a$  des linken Endquerschnitts  $a$  bestimmt. Auf diese Weise entsteht mit  $\varepsilon_a = N_a/EF_a + \alpha_t t$

$$\left. \begin{aligned} w_k &= w_a + (x_k - x_a) \varphi_a - \varepsilon_a (y_k - y_a) - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) d\psi - \int_{x_a}^{x_k} (y_k - y) d\varepsilon_0, \\ u_k &= u_a + (y_k - y_a) \varphi_a + \varepsilon_a (x_k - x_a) - \int_{y_a}^{y_k} (y_k - y) d\psi + \int_{y_a}^{x_k} (x_k - x) d\varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

$$\varphi_k = \varphi_a - \int_{x_a}^{x_k} d\psi. \quad (225)$$

Die Verdrehung des Endquerschnitts  $a$  ist für  $w_b - w_a = 0$  und mit  $x_b - x_a = l$ ,  $y_b - y_a = e$

$$\varphi_a = \varphi_{a,0} = \frac{c}{l} \varepsilon_a + \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) d\psi + \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (y_b - y) d\varepsilon_0. \quad (226)$$

Sie erhält wiederum die Bedeutung des Stützendruckes  $A_w$  eines Stabzuges  $\vec{ab}$  aus einer Gruppe von senkrecht gerichteten ideellen Drehungsgewichten  $d\psi$  und einer Gruppe von waagrecht gerichteten ideellen Dehnungsgewichten  $\varepsilon_a, d\varepsilon_0$ . Demnach darf die Verdrehung  $\varphi_k$  eines beliebigen Querschnitts  $k$  des Stabes als die Querkraft  $Q_{w,k}$  der Drehungsgewichte  $d\psi$ , die Ausbiegung  $w_k$  als das statische Moment  $M'_{w,k}$  von  $A_w$ , den senkrecht gerichteten Drehungsgewichten  $d\psi$  und den waagrecht gerichteten Dehnungsgewichten  $d\varepsilon_0$ , die Ausbiegung  $u_k$  als das statische Moment  $M''_{w,k}$  derselben, jedoch um  $90^\circ$  im Sinne von  $\delta\alpha$  gedrehten Kräftegruppe  $d\psi, d\varepsilon_0$  berechnet werden.

Die Dehnungsgewichte  $\varepsilon_a, d\varepsilon_0$  sind im Vergleich zu den Drehungsgewichten  $d\psi$  meist ohne großen Einfluß auf die Verschiebungen  $w_k, u_k$ . Sie werden daher in der Regel vernachlässigt. Die  $EJ_c$ -fachen Verschiebungen werden für  $\Delta t = 0$  folgendermaßen bezeichnet:

$$EJ_c w_k = w_k^*, \quad EJ_c u_k = u_k^*, \quad EJ_c \varphi_a = \varphi_a^*,$$

$$w_k^* = w_a^* + (x_k - x_a) \varphi_a^* - \int_{x_a}^{x_k} (x_k - x) M \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx, \quad (227)$$

$$u_k^* = u_a^* + (y_k - y_a) \varphi_a^* - \int_{y_a}^{y_k} (y_k - y) M \frac{J_c}{J \sin \alpha} dy, \quad (228)$$

$$\text{für } w_a = w_b = 0 \text{ ist } \varphi_a^* = \varphi_{a,0}^* = \frac{1}{l} \int_{x_a}^{x_b} (x_b - x) M \frac{J_c}{J \cos \alpha} dx. \quad (229)$$

Für die zeichnerische und rechnerische Auswertung der Ansätze dienen die Angaben auf S. 125, so daß

$$M \frac{J_c}{J \cos \alpha} = w', \quad M \frac{J_c}{J \sin \alpha} = w''$$

wiederum ideale Streckenlasten bedeuten, welche nach (206) und (207) durch zwei Gruppen äquivalenter Einzellasten  $\mathfrak{B}'_m, \mathfrak{B}''_m$  ersetzt werden. Mit diesen wird dann

$$\text{für } w_a = w_b = 0 \quad \varphi_{a,0}^* = A'_w; \quad \varphi_{k,0}^* = Q'_{w,k}; \quad w_{k,0}^* = M'_{w,k}; \quad u_{k,0}^* = M''_{w,k}$$

nach bekannten Regeln (Abschn. 13) numerisch berechnet oder graphisch durch Kraft- und Seileck bestimmt. Um hierbei  $w_k$  und  $u_k$  in natürlicher Größe anzugeben, wird nach S. 125 die Polweite  $H_w = EJ_c/n$  gewählt. Da unter den Voraussetzungen der Rechnung  $t, \Delta t = 0, \varepsilon_0 \approx 0$ , also nach (218b)

$$\frac{dw}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = 1 \quad (230)$$

ist, stehen einander zugeordnete Tangenten der beiden Biegelinien, also auch einander zugeordnete Seilstrahlen der beiden Richtungsbüschel senkrecht aufeinander, so daß die waagerechte Biegelinie als Normalenzug zu den Tangenten der senkrechten Biegelinie oder zu den Seilstrahlen ihres Richtungsbüschels gezeichnet werden kann.